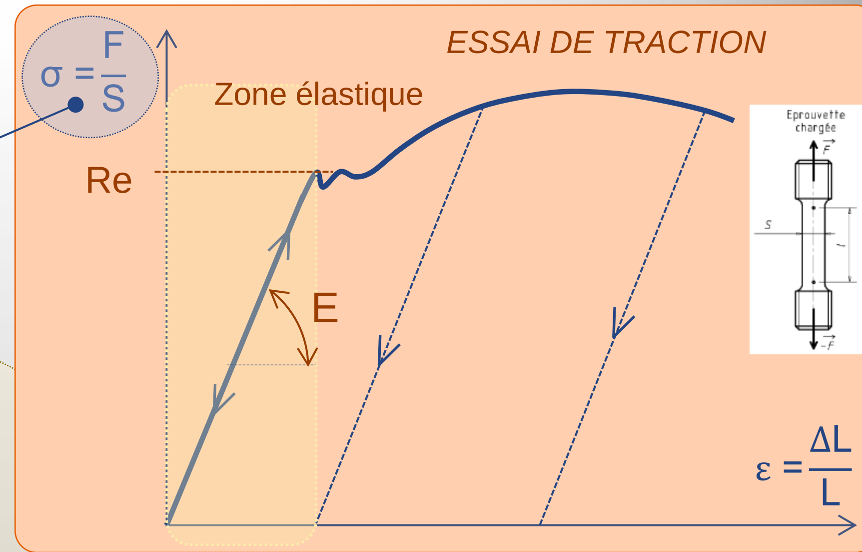
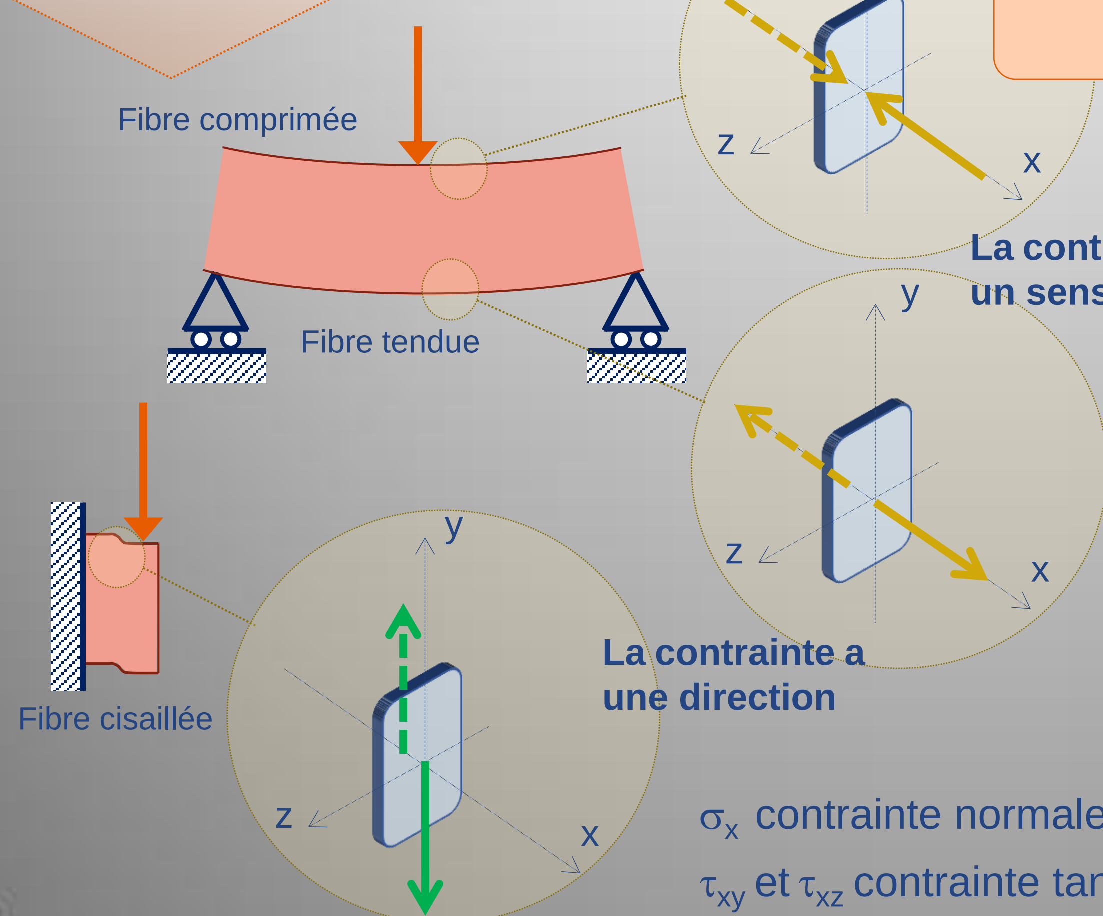
Vecteur contrainte

La grandeur de référence est la **contrainte**

Elle correspond à une force par unité de surface (unité=MPa)



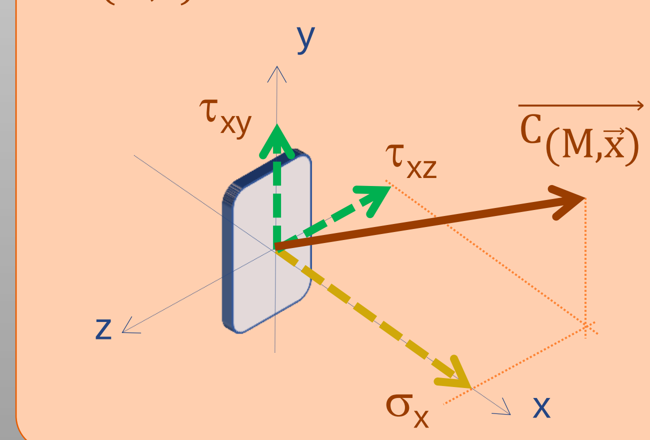


La contrainte a un sens

La contrainte a une direction

Vecteur contrainte

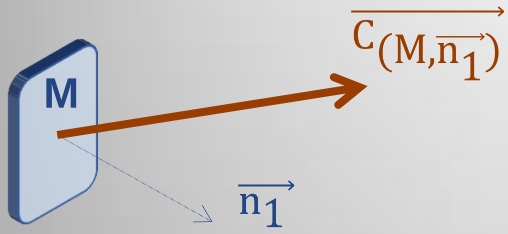
$$\overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}} = \sigma_x.\vec{x} + \tau_{xy}.\vec{y} + \tau_{xz}.\vec{z}$$

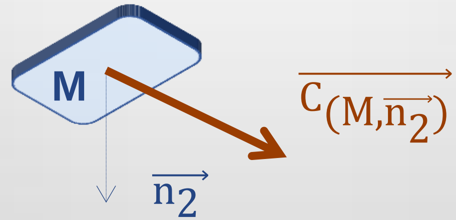


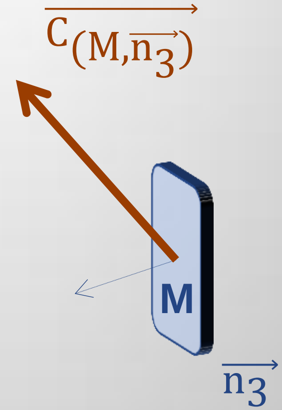
σ_x contrainte normale

τ_{xy} et τ_{xz} contrainte tangentielle

Etat de contrainte







Le vecteur contrainte dépend de l'orientation de la facette (sous quel angle on regarde le point)

Caractérisation mathématique : Tenseur des contraintes

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}_{xyz}$$

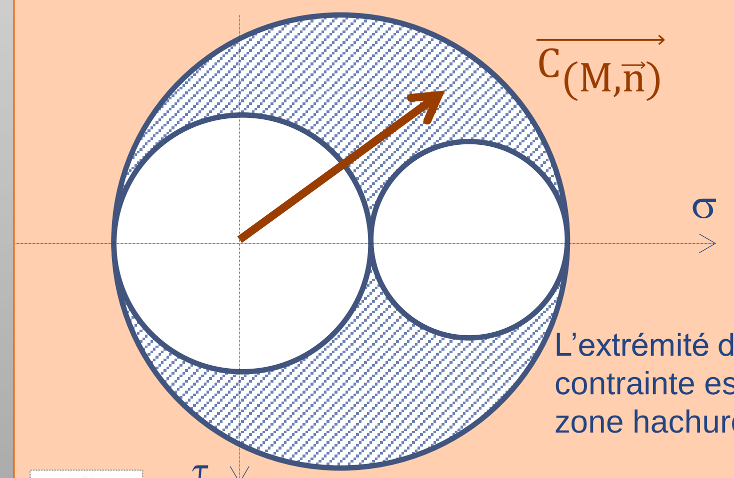
$$\overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}} \quad \overrightarrow{C_{(M,\vec{y})}} \quad \overrightarrow{C_{(M,\vec{z})}}$$

Le tenseur est symétrique

Il permet de calculer le vecteur contrainte pour toute orientation

$$\overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}} = [\sigma_{ij}].\{\vec{n}\}$$

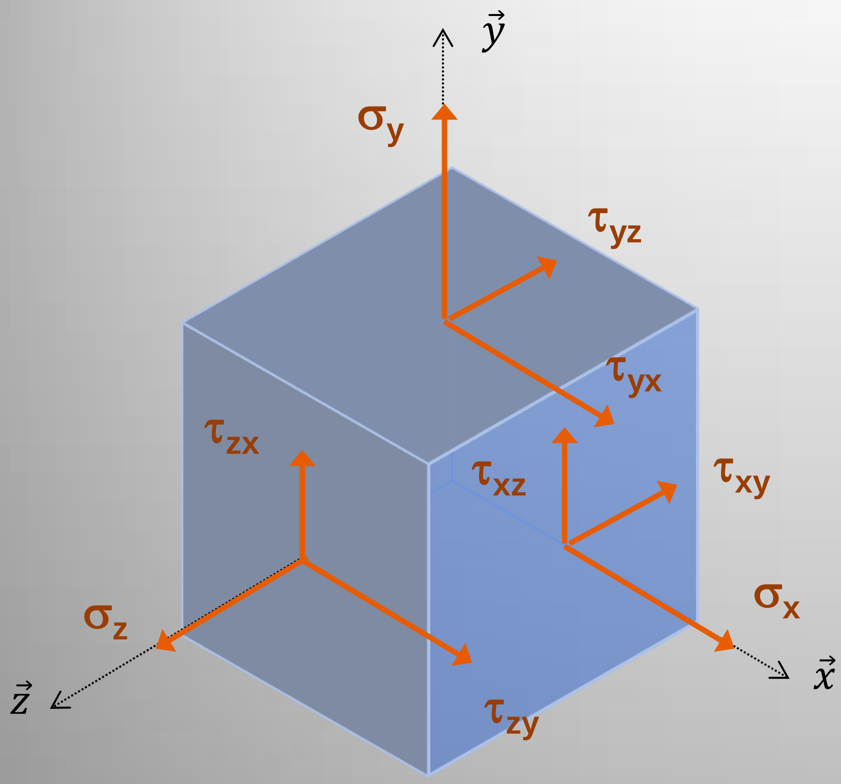
Caractérisation graphique : Tricercle de Mohr



L'extrémité du vecteur contrainte est dans la zone hachurée

Il permet de visualiser en un point tous les vecteurs contraintes pour toute orientation

Relations d'équilibre



Caractérisation mathématique : Tenseur des contraintes

$$[\sigma_{ij}] = \begin{array}{ccc} \left(\begin{matrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{matrix} \right)_{xyz} \\ \overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}} \quad \overrightarrow{C_{(M,\vec{y})}} \quad \overrightarrow{C_{(M,\vec{z})}} \end{array}$$

Forces volumiques sur l'élément : $\overrightarrow{f_v} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$

Equilibre des forces

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$$

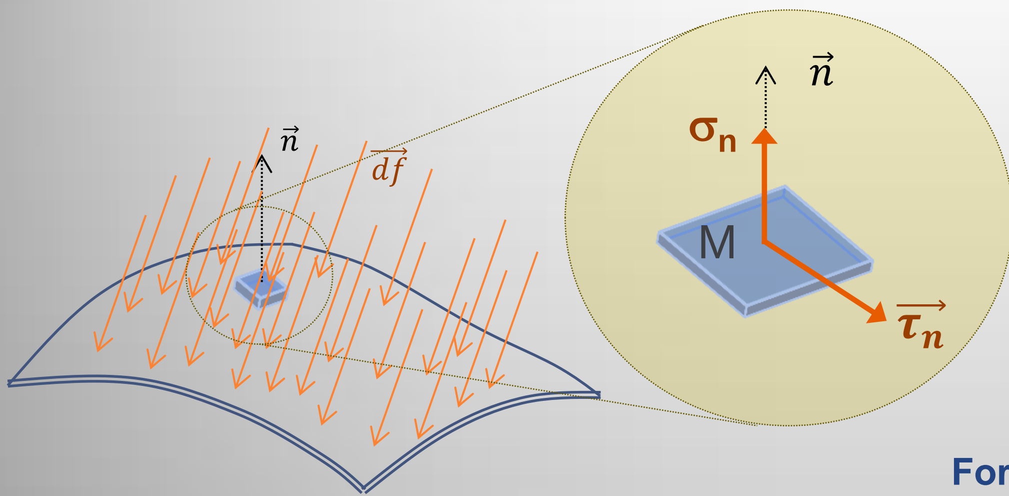
Equilibre des moments autour du point

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Conditions aux limites



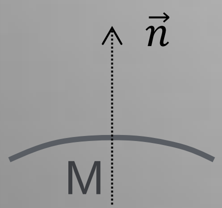
Caractérisation mathématique : Tenseur des contraintes

$$[\sigma_{ij}] = \begin{array}{ccc} \left(\begin{matrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{matrix}\right)_{xyz} \\ \overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}} \quad \overrightarrow{C_{(M,\vec{y})}} \quad \overrightarrow{C_{(M,\vec{z})}} \end{array}$$

Forces surfaciques sur l'élément : $\overrightarrow{df_s}$

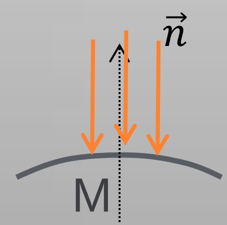
Conditions aux limites sur le vecteur contrainte

$$\overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}} = -\overrightarrow{df_s}$$



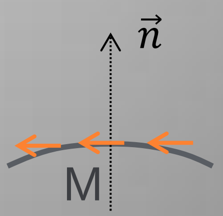
Surface libre

$$\overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}} = \vec{0}$$



Pression p en surface

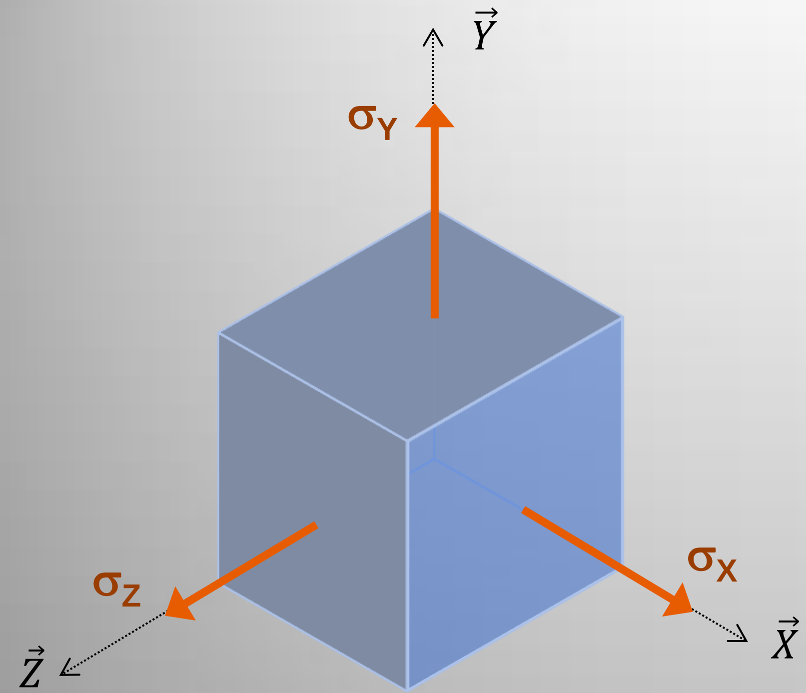
$$\overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}} = -p.\vec{n}$$



Cisaillement $\overrightarrow{f_T}$ en surface

$$\overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}} = -\overrightarrow{f_T}$$

Contraintes principales



Caractérisation mathématique : Tenseur des contraintes

$$\begin{array}{c} [\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}_{xyz} \\ \qquad\quad \overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}} \quad \overrightarrow{C_{(M,\vec{y})}} \quad \overrightarrow{C_{(M,\vec{z})}} \end{array}$$

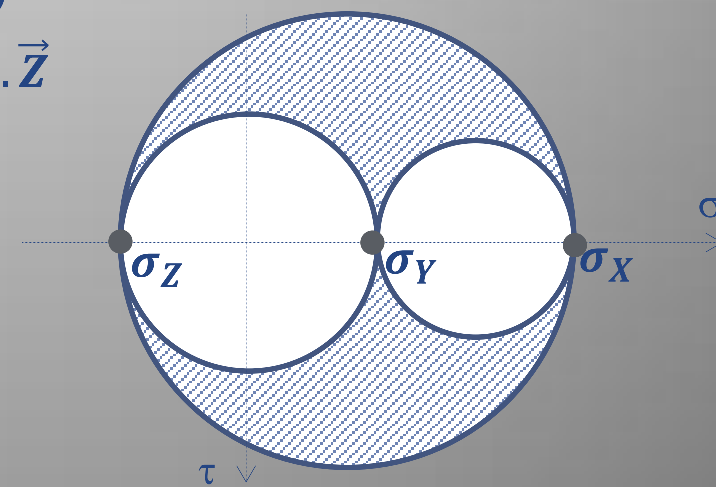
Il existe une base principale telle que :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_X & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_Y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_Z \end{pmatrix}_{XYZ}$$

Suivant ces trois directions privilégiées (directions principales)

$$\overrightarrow{C_{(M,\vec{X})}} = \sigma_X.\vec{X} \qquad \overrightarrow{C_{(M,\vec{Y})}} = \sigma_Y.\vec{Y} \qquad \overrightarrow{C_{(M,\vec{Z})}} = \sigma_Z.\vec{Z}$$

Sur le cercle de Mohr, les points correspondants sont sur l'axe des contraintes normales σ.



Invariants et décomposition

Caractérisation mathématique : Tenseur des contraintes

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}_{xyz}$$

$$\overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}} \quad \overrightarrow{C_{(M,\vec{y})}} \quad \overrightarrow{C_{(M,\vec{z})}}$$

1er invariant : $\sigma_X+\sigma_Y+\sigma_Z = \sigma_x+\sigma_y+\sigma_z = s$

2ème invariant :

$$\sigma_X.\sigma_Y+\sigma_X.\sigma_Z+\sigma_Y.\sigma_Z = \sigma_x.\sigma_y+\sigma_x.\sigma_z+\sigma_y.\sigma_z$$

3ème invariant : $\sigma_X.\sigma_Y.\sigma_Z = \sigma_x.\sigma_y.\sigma_z$

Décomposition du tenseur des contraintes

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}_{xyz} = \begin{pmatrix} s/3 & 0 & 0 \\ 0 & s/3 & 0 \\ 0 & 0 & s/3 \end{pmatrix}_{xyz} + \begin{pmatrix} \textit{Déviateur} \end{pmatrix}_{xyz}$$

Contraintes équivalentes

$$\boldsymbol{\sigma_{Tresca} = \max(|\sigma_X-\sigma_Y|,|\sigma_X-\sigma_Z|,|\sigma_y-\sigma_Z|)}$$ **(Contrainte équivalente de Tresca)**

$$\boldsymbol{\sigma_{Von-Mises} = \sqrt{\frac{1}{2}.\left[(\sigma_X-\sigma_Y)^2+(\sigma_X-\sigma_Z)^2+(\sigma_y-\sigma_Z)^2\right]}}$$ **(Contrainte équivalente de Von-Mises)**

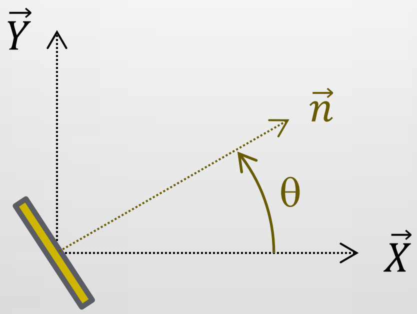
Cercle de Mohr (dans le plan)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{xyz}$$

Etat plan de contraintes

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_X & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{XYZ}$$

Contraintes principales



$$\overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}} = [\sigma_{ij}].\vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_X & 0 \\ 0 & \sigma_Y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

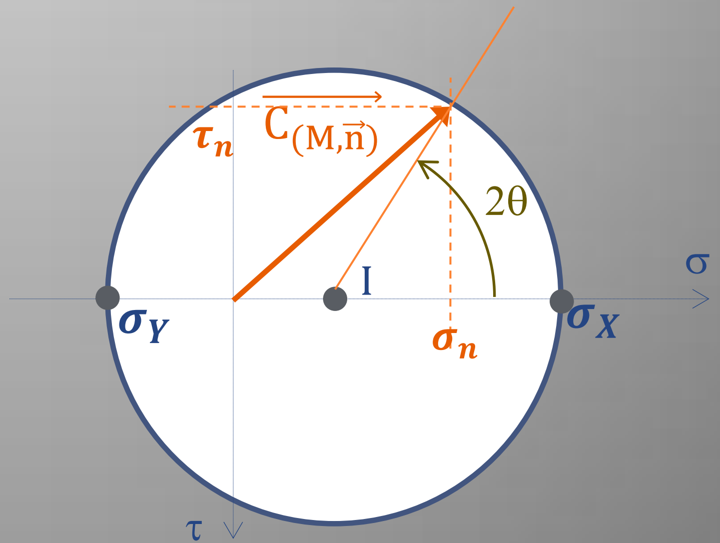
$$\overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}} = \begin{pmatrix} \sigma_X.\cos(\theta) \\ \sigma_Y.\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\sigma_n = \overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}}.\vec{n} = \sigma_X.\cos^2(\theta) + \sigma_Y.\sin^2(\theta)$$

$$\tau_n = \overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}}.\vec{t} = -\sigma_X.\cos(\theta).\sin(\theta) + \sigma_Y.\cos(\theta).\sin(\theta)$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} + \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}.\cos(2\theta)$$

$$\tau_n = -\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}.\sin(2\theta)$$



Cercle de centre ($\frac{\sigma_X+\sigma_Y}{2}$) et de rayon ($\frac{\sigma_X-\sigma_Y}{2}$)