Réduction d'une matrice

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices

Exercice 1

Consigne

1) Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire ?

2) Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (on ordonnera les valeurs propres par ordre croissant)

puis calculer $A^n (n \in \mathbb{N}^*)$

Exercice 2

Consigne

Trouver, sans calcul, les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

B est-elle diagonalisable ?

Exercice 3

Consigne

1) Calculer $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire ?

2) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer les valeurs propres de A et diagonaliser A en précisant la matrice de passage P ainsi que P^{-1} (ordonner les valeurs propres par ordre croissant et utiliser 1)).

3) Calculer A^n.

4) On considère les trois suites réelles (u_n); (v_n); (w_n) définies par leurs premiers termes u_0; v_0 et w_0 et les relations : $\begin{cases} u_n = -4u_{n-1} - 6v_{n-1} \\ v_n = 3u_{n-1} + 5v_{n-1} \\ w_n = 3u_{n-1} + 6v_{n-1} + 5w_{n-1} \end{cases}$.

Calculer $u_n; v_n$ et w_n en fonction de n et $u_0; v_0$ et w_0. Que peut-on en déduire quant à la convergence de ces 3 suites ?

Exercice 4

Consigne

Montrer que si A est une matrice d'ordre n sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $A^2 = A$ (A est alors la matrice d'un projecteur) ou $A^2 = I_n$, A est diagonalisable.

Exercice 5

Consigne

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \text{a} & 4 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a, A est-elle diagonalisable dans C ? Si oui préciser la matrice de passage.

Exercice 6

Consigne

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 7

Consigne

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice de l'application f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que A n'est pas diagonalisable. Déterminer la forme réduite de Jordan J semblable à A ainsi que la base dans laquelle f est représentée par J.

Exercice 8

Consigne

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Sinon déterminer une matrice de Jordan qui lui est semblable et préciser la matrice de passage.

Exercice 9

Consigne

Déterminer pour quelles valeurs des paramètres a et b la matrice

$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Etudier le cas où elle ne l'est pas et la réduire à la forme la plus simple possible.

Exercice 10

Consigne

Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x_{t+1} = 3x_t + y_t \\ y_{t+1} = -x_t + y_t \end{cases}$.

Exercice 11

Consigne

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x_{t+1} = x_t + 2y_t - 2z_t \\ y_{t+1} = 2x_t + y_t - 2z_t \\ z_{t+1} = 2x_t + 2y_t - 3z_t \end{cases}$.

Exercice 12

Consigne

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x_{t+1}^1 = 2x_t^1 - x_t^2 - 2x_t^3 + 2 \\ x_{t+1}^2 = x_t^1 + x_t^2 - 1 \\ x_{t+1}^3 = -(1/2)x_t^2 + 3/2 \end{cases}$.

On remarquera que l'inverse de $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 13

Consigne

Etudier suivant la valeur de a la stabilité du système : $\begin{cases} x_{t+1}^1 = ax_t^1 + \frac{1}{2}x_t^2 \\ x_{t+1}^2 = \frac{1}{2}x_t^1 + ax_t^2 \end{cases}$.

Exercice 14

Consigne

1) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -1/2 \\ -7 & 5 & -1/2 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

2) Donner la forme la plus simple de S (diagonale ou forme réduite de Jordan) telle que $\mathrm{A} = PSP^{-1}$. Déterminer P.

3) Soit le système $\begin{cases} x_{t+1} = -x_t + y_t \\ y_{t+1} = -5x_t + 4y_t - \frac{1}{2}z_t \\ z_{t+1} = -7x_t + 5y_t - \frac{1}{2}z_t \\ x_0 = 5, y_0 = 8 \text{ et } z_0 = 4 \end{cases}$

Calculer (x_t, y_t, z_t) en fonction de t. Quel est le comportement de ce vecteur quand t tend vers $+\infty$?

Exercice 15

Consigne

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x_{t+1} = x_t + 2y_t - 2z_t + 2t - 2 + (-1)^t \\ y_{t+1} = 2x_t + y_t - 2z_t + 6t + 5 \times 4^t \\ z_{t+1} = 2x_t + 2y_t - 3z_t + 6t - 2 + (-1)^t + 5 \times 4^t \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \text{ et } z(0) = -1 \end{cases}$

Remarque : on pourra utiliser des résultats de **11** et calculer $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 16

Consigne

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x_{t+1} = -x_t + y_t + 2t^2 - 12 + 2^t \\ y_{t+1} = -5x_t + 4y_t - \frac{1}{2}z_t + 3t^2 - 16 + 2^{t+1} \\ z_{t+1} = -7x_t + 5y_t - \frac{1}{2}z_t + t^2 - 2 + 2^{t+1} \\ x_0 = 2, y_0 = 4 \text{ et } z_0 = 3 \end{cases}$

Remarque : on pourra utiliser des résultats de **14** et calculer $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 17

Consigne

1) Réduire $\begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 4 & -3/2 \end{pmatrix}$.

2) Résoudre astucieusement dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x_{t+1} = 5/2x_t - y_t - 2 + 3(2^t) \\ y_{t+1} = 4x_t - 3/2y_t - 5 + 6(2^t) \\ z_{t+1} = x_t - \frac{1}{2}y_t - \frac{1}{2}z_t - \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} - 1 \\ x_0 = 2, y_0 = 1 \text{ et } z_0 = 1 \end{cases}$.

N.B. : On donne le résultat suivant : si $P = \begin{pmatrix} & a \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice inversible alors $P^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 3, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).