Réduction d'une matrice

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices corrigés

Attention : ceci est la version corrigée des exercices.

Exercice 1

Consigne

1) Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire ?

2) Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (on ordonnera les valeurs propres par ordre croissant)

puis calculer $A^n (n \in \mathbb{N}^*)$

Correction

1) Notons $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $PQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On en déduit par exemple que $P^{-1} = \frac{1}{3}Q$ ou que $Q^{-1} = \frac{1}{3}P$.

2) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 & 1 \\ 1 & (2-\lambda) & 1 \\ 1 & 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$

$P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(4-\lambda)$.

A a donc deux valeurs propres distinctes, $\lambda_1 = 1$ avec $m(\lambda_1) = 2$ et $\lambda_2 = 4$ avec $m(\lambda_2) = 1$. ($m(\lambda)$ désigne comme dans le cours l'ordre de multiplicité de λ).

Détermination du sous-espace propre $E_{\lambda_1} = 1$ associé à λ_1

$\left\{V=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{\lambda_1}\right\} \Leftrightarrow \{AV=\lambda_1 V\}$, soit $\begin{cases}2x+y+z=x\\x+2y+z=y\\x+y+2z=z\end{cases}$, ou $x+y+z=0$ et

$\left\{V=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{\lambda_1}\right\} \Leftrightarrow \left\{V=\begin{pmatrix}x\\y\\-x-y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. E_{λ_1} est donc engendré par $V_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $V_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $E_{\lambda_1}=\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\rangle$

D'autre part V_1 et V_2 sont libres (car non proportionnels), ils forment donc une base de E_{λ_1} et $dimE_{\lambda_1}=2=m(\lambda_1)$. A est donc diagnalisable.

Détermination du sous-espace propre E_{λ_2} associé à $\lambda_2=4$

$\left\{V=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{\lambda_2}\right\} \Leftrightarrow \{AV=\lambda_2 V\}$, soit $\begin{cases}2x+y+z=4x\\x+2y+z=4y\\x+y+2z=4z\end{cases}$, ou $\begin{cases}-3x+3y=0\\-x+z=0\end{cases}$ et $\left\{V=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{\lambda_2}\right\} \Leftrightarrow \left\{V=\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

E_{λ_2} est donc engendré par $V_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $E_{\lambda_2}=\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\rangle$

On en déduit alors que $A=PDP^{-1}$, avec $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$

D'après 1) $P^{-1}=\frac{1}{3}Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

$$A^n=PD^nP^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$$
$$A^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(2+4^n)&(-1+4^n)&(-1+4^n)\\(-1+4^n)&(3+4^n)&(-1+4^n)\\(-1+4^n)&(-1+4^n)&(2+4^n)\end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Consigne

Trouver, sans calcul, les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

B est-elle diagonalisable ?

Correction

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit f l'application linéaire de matrice B dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

D'après $B, f(e_2) = 3e_2$ et $f(e_1) = e_1 + e_3 = f(e_3)$. Donc $f(e_1 + e_3) = 2(e_1 + e_3)$ et $f(e_1 - e_3) = 0 = 0(e_1 - e_3)$.

On en déduit que e_2 est un vecteur propre de f associé a la valeur propre $3, e_1 + e_2$ est un vecteur proprte de f associé à la valeur propre 2 et $e_1 - e_3$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 0. Ainsi B a trois valeurs propres distinctes et B est diagonalisable.

Ici on a même montré que $B = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Consigne

1) Calculer $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire ?

2) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer les valeurs propres de A et diagonaliser A en précisant la matrice de passage P ainsi que P^{-1} (ordonner les valeurs propres par ordre croissant et utiliser 1)).

3) Calculer A^n.

4) On considère les trois suites réelles (u_n); (v_n); (w_n) définies par leurs premiers termes u_0; v_0 et w_0 et les relations : $\begin{cases} u_n = -4u_{n-1} - 6v_{n-1} \\ v_n = 3u_{n-1} + 5v_{n-1} \\ w_n = 3u_{n-1} + 6v_{n-1} + 5w_{n-1} \end{cases}$.

Calculer $u_n; v_n$ et w_n en fonction de n et $u_0; v_0$ et w_0. Que peut-on en déduire quant à la convergence de ces 3 suites ?

Correction

Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $P^{-1} = Q$.

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} (-4-\lambda) & -6 & 0 \\ 3 & (5-\lambda) & 0 \\ 3 & 6 & (5-\lambda) \end{vmatrix} = (5-\lambda) \begin{vmatrix} (-4-\lambda) & -6 \\ 3 & (5-\lambda) \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1+\lambda)(2-\lambda)$.

A a donc trois valeurs propres distinctes qui sont, par ordre croissant, $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 5$, et A est diagonalisable.

Détermination du sous-espace propre E_{λ_1} associé à $\lambda_1 = \mathbf{-1}$

$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\right\} \Leftrightarrow \{AV = \lambda_1 V\}$, soit $\begin{cases} -4x - 6y = -x \\ 3x + 5y = -y \\ 3x + 6y + 5z = -z \end{cases}$, ou $\begin{cases} -3x - 6y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \\ 3x + 6y + 6z = 0 \end{cases}$, ou $\begin{cases} x = -2y \\ z = 0 \end{cases}$

$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\right\} \Leftrightarrow \left\{V = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

E_{λ_1} est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (on a choisi $y = -1$ pour retrouver la première colonne de P), $E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Détermination du sous-espace propre E_{λ_2} associé à $\lambda_2 = 2$

$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\right\} \Leftrightarrow \{AV = \lambda_2 V\}$, soit $\begin{cases} -4x - 6y = 2x \\ 3x + 5y = 2y \\ 3x + 6y + 5z = 2z \end{cases}$, ou $\begin{cases} -6x - 6y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \\ 3x + 6y + 3z = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = -x \\ z = x \end{cases}$

$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\right\} \Leftrightarrow \left\{V = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

E_{λ_2} est donc engendré par $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Détermination du sous-espace propre E_{λ_3} associé à $\lambda_3 = 5$

D'après la forme de A, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\lambda_3 = 5$ puisque $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, et $E_{\lambda_3} = \langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\rangle$

Donc $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\-1 & -1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Et $P^{-1} = Q$ est donné par 1).

3) $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\-1 & -1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n & 0 & 0\\0 & 2^n & 0\\0 & 0 & 5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\-1 & -2 & 0\\1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{pmatrix}(2(-1)^n - 2^n) & (2(-1)^n - 2^{n+1}) & 0\\((-1)^{n+1} + 2^n) & ((-1)^n + 2^{n+1}) & 0\\(-2^n + 5^n) & (-2^{n+1} + 2\times 5^n) & 5^n\end{pmatrix}$$

4) On constate que le système s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\\w_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}$

On en déduit donc en itérant que :

$$\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}u_{n-1}\\v_{n-1}\\w_{n-1}\end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix}u_{n-2}\\v_{n-2}\\w_{n-2}\end{pmatrix} = \cdots A^n\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}.$$ D'où le résultat

$$\begin{cases}u_n = (2(-1)^n - 2^n)u_0 + (2(-1)^n - 2^{n+1})v_0\\v_n = ((-1)^{n+1} + 2^n)u_0 + ((-1)^n + 2^{n+1})v_0\\w_n = (-2^n + 5^n)u_0 + (-2^{n+1} + 2\times 5^n)v_0 + 5^n w_0\end{cases}$$

Si $u_0 \neq 0$ ou $v_0 \neq 0$, les trois suites divergent (pour u_n et v_n ce sont les puissances de 2 qui l'emportent, pour w_n si $w_0 \neq 0$, c'est 5^n).

Si $u_0 = v_0 = 0$ et si $w_0 \neq 0$, pour tout $n, u_n = v_n = 0$ et (w_n) diverge.

Si $u_0 = v_0 = w_0 = 0$, pour tout $n, u_n = v_n = w_n = 0$.

Exercice 4

Consigne

Montrer que si A est une matrice d'ordre n sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $A^2 = A$ (A est alors la matrice d'un projecteur) ou $A^2 = I_n$, A est diagonalisable.

Correction

4. Si $A^2 = A, A$ est la matrice d'un projecteur p, projection sur Imp parallèlement à $Kerp$ et $Imp \oplus Kerp = \mathbb{R}^n$.

Soit $\{v_1, \dots, v_r\}$ une base $\mathcal{B}_1$ de Imp et $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$, une base $\mathcal{B}_2$ de $Kerp$. Pour tout vecteur v_i de $\mathcal{B}_1, p(v_i) = v_i$ puisque $v_i \in Imp$ et tout vecteur v_i de $\mathcal{B}_2, p(v_i) = 0$ puisque $v_i \in Kerp$. Donc la matrice de p dans dans la base $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ est

$$\underbrace{r \text{ colonnes}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 1 & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$. Et A est diagonalisable.

Remarquons que si $A^2 = I_n, A = A^{-1}$.

Si $AV \neq -V, AV + V \neq 0$ et $A(AV + V) = A^2V + AV = V + AV$.

Donc $AV + V$ est un vecteur propre associé à $\lambda_1 = 1$.

Si pour tout $V, AV = -V, A = -I_n$ et est diagonale.

Si $AV \neq V, V - AV \neq 0$ et $A(V - AV) = AV - A^2V = AV - V = -(V - AV)$.

Donc $V - AV$ est un vecteur propre associé à $\lambda_2 = -1$

Si pour tout $V, AV = V, A = I_n$ et est diagonale.

Soit E_1 le sous-espace propre associé à λ_1 et E_2 le sous-espace propre associé à λ_2. On peut écrire

$$\forall V \in \mathbb{R}^n \; V = \frac{1}{2}(AV + V) + \frac{1}{2}(V - AV)$$

Or $V_1 = \frac{1}{2}(AV + V) \in E_1$ et $V_2 = \frac{1}{2}(V - AV) \in E_2$. Donc $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^n$ et puisque E_1 et E_2 sont des sous-espaces propres, cette somme est directe, $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^n$. Donc A est diagonalisable.

Remarque : Cet exercice est difficile. Il s'adresse aux plus curieux. Il est intéressant d'en comprendre le corrigé.

Exercice 5

Consigne

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & 4 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a, A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? Si oui préciser la matrice de passage.

Correction

$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 \\ a & (4-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 - a = (\lambda - 3)^2 - (a+1).$

- Si $a \neq -1, P_A(\lambda)$ a deux racines distinctes dans $\mathbb{C}$ et A est diagonalisable.
- Si $a = -1 P_A(\lambda)$ a une racine double, $\lambda = 3$.

Si A était diagonalisable, on aurait $A = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1} = 3PI_2P^{-1} = 3I_2$. or $A \neq 3I_2$ donc A n'est pas digonalisable

- Etudions le cas où $a \neq -1$ et déterminons P et D telles que $A = PDP^{-1}$. Dans ce cas A a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2.

Si $a + 1 > 0, \lambda_1 = 3 + \sqrt{a+1}$ et $\lambda_2 = 3 - \sqrt{a+1}$.

si $a + 1 < 0, \lambda_1 = 3 + i\sqrt{-a-1}$ et $\lambda_2 = 3 - i\sqrt{-a-1}$.

On peut donc écrire les valeurs propres de A sous la forme $\lambda = 3 + \varepsilon\sqrt{|a+1|}$, avec $\varepsilon = 1, -1, i, -i$ selon les 4 cas précédents. Désignons par E_λ le sous-espace propre associé à $\lambda = 3 + \varepsilon\sqrt{|a+1|}$

$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_\lambda\right\} \Leftrightarrow \{AV = \lambda V\}$, soit $\begin{cases} 2x + y = (3 + \varepsilon\sqrt{|a+1|})x \\ ax + 4y = (3 + \varepsilon\sqrt{|a+1|})y \end{cases}$, ou $\{y = (1 + \varepsilon\sqrt{|a+1|})x$ et $\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_\lambda\right\} \Leftrightarrow \left\{V = \begin{pmatrix} x \\ (1+\varepsilon\sqrt{|a+1|})x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ (1+\varepsilon\sqrt{|a+1|}) \end{pmatrix}\right\}$.

E_λ est donc engendré par $V = \begin{pmatrix} 1 \\ (1+\varepsilon\sqrt{|a+1|}) \end{pmatrix}$, $E_\lambda = \langle\begin{pmatrix} 1 \\ (1+\varepsilon\sqrt{|a+1|}) \end{pmatrix}\rangle$

Or si $a + 1 > 0, |a+1| = a + 1$ et les valeurs propres correspondent à $\varepsilon = 1$ et -1. On obtient alors $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{a+1} & 0 \\ 0 & 3 - \sqrt{a+1} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 + \sqrt{a+1} & 1 - \sqrt{a+1} \end{pmatrix}$

Si $a + 1 < 0, |a+1| = -a - 1$ et les valeurs propres correspondent à $\varepsilon = i$ et $-i$. On obtient alors $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 3 + i\sqrt{-a-1} & 0 \\ 0 & 3 - i\sqrt{-a-1} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 + i\sqrt{-a-1} & 1 - i\sqrt{-a-1} \end{pmatrix}$

Exercice 6

Consigne

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Correction

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 & 0 \\ -1 & (3-\lambda) & 1 \\ 1 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$$

$P_A(\lambda) = (2-\lambda)^3$.

On se retrouve ici dans la même situation que dans l'exercice précédent (cas $a = -1$), il n'y a qu'une seule valeur propre dont l'ordre de multiplicité est la dimension de l'espace vectoriel dans lequel on travaille, ici 3.

Si A était diagonalisable, on aurait $A = PDP^{-1}$ avec $D = 2I_3$. Or $2I_3$ commute avec P donc $A = 2I_2PP^{-1} = 2I_2$. Or $A \neq 2I_3$, donc A n'est pas digonalisable.

Remarque : On vérifie aisément que $E_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ et $\dim\ E_2 = 1 < m(2)$.

Exercice 7

Consigne

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice de l'application f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que A n'est pas diagonalisable. Déterminer la forme réduite de Jordan J semblable à A ainsi que la base dans laquelle f est représentée par J.

Correction

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -3 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1$$

$P_A(\lambda) = (1-\lambda)^3$.

Avec un raisonnement analogue à celui de l'exercice précédent, on en déduit que A n'est pas diagonalisable.

Détermination du sous-espace propre E_λ associé à $\lambda = 1$

$$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\lambda\right\} \Leftrightarrow \{AV = \lambda V\}, \text{ soit } \begin{cases} y = x \\ z = y \\ x - 3y + 3z = z \end{cases} \quad \text{ou } x = y = z$$

$$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\lambda\right\} \Leftrightarrow \left\{V = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

E_λ est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_\lambda = \left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle$

$\dim\, E_\lambda = 1$ donc la réduite de Jordan de A est $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et A a deux vecteurs de Jordan V_2 et V_3.

D'après J, V_2 vérifie $AV_2 = V_1 + V_2$ et si $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{cases} y = 1 + x \\ z = 1 + y \\ x - 3y + 3z = 1 + z \end{cases}$. $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

D'après J, V_3 vérifie $AV_3 = V_2 + V_3$ et si $V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{cases} y = -1 + x \\ z = 0 + y \\ x - 3y + 3z = 1 + z \end{cases}$. $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient. Et $A = PJP^{-1}$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 8

Consigne

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Sinon déterminer une matrice de Jordan qui lui est semblable et préciser la matrice de passage.

Correction

C'est la matrice de l'exercice 6. On a vu que $P_A(\lambda) = (2 - \lambda)^3$ et que A n'est pas diagonalisable.

Détermination du sous-espace propre E_λ associé à $\lambda = 2$

$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\lambda\right\} \Leftrightarrow \{AV = \lambda V\}$, soit $\begin{cases} 2x + y = 2x \\ -x + 3y + z = 2y \\ x = z \end{cases}$, ou $\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 2z \end{cases}$

$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\lambda\right\} \Leftrightarrow \left\{V = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

E_λ est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_\lambda = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$\dim\, E_\lambda = 1$ donc la réduite de Jordan de A est $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et A a deux vecteurs de Jordan V_2 et V_3.

D'après J, V_2 vérifie $AV_2 = V_1 + 2V_2$ et si $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{cases} 2x + y = 1 + 2x \\ -x + 3y + z = 0 + 2y \\ x + z = 1 + z \end{cases}$. $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

D'après J, V_3 vérifie $AV_3 = V_2 + 2V_3$ et si $V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{cases} 2x + y = 1 + 2x \\ -x + 3y + z = 1 + 2y \\ x + z = 0 + z \end{cases}$. $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient. Et $A = PJP^{-1}$ avec $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 9

Consigne

Déterminer pour quelles valeurs des paramètres a et b la matrice

$A = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Etudier le cas où elle ne l'est pas et la réduire à la forme la plus simple possible.

Correction

$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} (a-\lambda) & b & 0 \\ 0 & (1-\lambda) & -1 \\ 0 & 2 & (4-\lambda) \end{vmatrix} = (a-\lambda) \begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 \\ 2 & (4-\lambda) \end{vmatrix}$ $P_A(\lambda) = (a - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (a-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

- Si $a \neq 2$ et $a \neq 3, A$ a trois valeurs propres distinctes et A est diagonalisable.
- Si $a = 2$, A a une valeur propre double $\lambda = 2$.

Détermination du sous-espace propre E_λ associé à $\lambda = 2$

$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\lambda\right\} \Leftrightarrow \{AV = \lambda V\}$, soit $\begin{cases} 2x + by = 2x \\ y - z = 2y \\ 2y + 4z = 2z \end{cases}$, ou $\begin{cases} by = 0 \\ y = -z \end{cases}$

- si $a = 2$ et $b \neq 0$,

$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\lambda\right\} \Leftrightarrow \left\{V = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

E_λ est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_\lambda = \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle$

$\dim\ E_\lambda = 1 < m(\lambda)$. A n'est pas diagonalisable. Une forme réduite de Jordan de A est $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- si $a = 2$ et $b = 0$, $\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\lambda\right\} \Leftrightarrow \left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

E_λ est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_\lambda = \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\rangle$

V_1 et V_2 sont libres (car non proportionnels), ils forment une base de E_λ et $\dim\ E_\lambda = 2 = m(\lambda)$. A est alors diagonalisable et A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- si $a = 3$, A a une valeur propre double $\lambda = 3$. Et par un raisonnement analogue au précédent, on montre que si $a = 3$ et $b \neq 0$, A n'est pas diagonalisable et a une réduite de Jordan de la forme $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On montre aussi que si $a = 3$ et $b = 0$, A est diagonalisable et semblable à $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

Consigne

Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x_{t+1} = 3x_t + y_t \\ y_{t+1} = -x_t + y_t \end{cases}$.

Correction

Notons $X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, le système s'écrit $X_{t+1} = AX_t$

Réduction de A : $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (3-\lambda) & 1 \\ -1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = (\lambda - 2)^2$.

Détermination du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre $\lambda = 2$.

$\left\{V = \binom{x}{y} \in E_2\right\} \Leftrightarrow \{AV = 2V\}$, soit $\begin{cases} 3x + y = 2x \\ -x + y = 2y \end{cases}$ ou $y = -x$.

$\left\{V = \binom{x}{y} \in E_2\right\} \Leftrightarrow \left\{V = \binom{x}{-x} = x\binom{1}{-1}\right\}$.

E_2 est donc engendré par $V_1 = \binom{1}{-1}, E_2 = \langle\binom{1}{-1}\rangle$. $\dim E_2 = 1 < m(2)$, donc A n'est pas diagonalisable et a pour réduite de Jordan $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Reste à déterminer un vecteur de Jordan.

$\left\{V = \binom{x}{y}\right.$ est un vecteur de Jordan $\} \Leftrightarrow \{AV = V_1 + 2V\}$, soit $\begin{cases} 3x + y = 1 + 2x \\ -x + y = -1 + 2y \end{cases}$ ou $y = 1 - x$. Et $V_2 = \binom{1}{0}$ convient. Donc $A = PJP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Changement de variable : Le système s'écrit alors $X_{t+1} = (PJP^{-1})X_t$ ou $P^{-1}X_{t+1} = J(P^{-1}X_t)$

Faisons le changement de variable $Z_t = P^{-1}X_t$,

$$(1) \text{ devient } Z_{t+1} = JZ_t \qquad (2)$$

Notons $Z_t = \binom{u_t}{v_t}$, (2) s'écrit $\begin{cases} u_{t+1} = 2u_t + v_t \\ v_{t+1} = 2v_t \end{cases}$, soit $\begin{cases} v_t = k_1 2^t \\ u_{t+1} = 2u_t + k_1 2^t \end{cases}$

Résolution de (3) :

$u_{t+1} = k_2 2^t + u_t^*$ avec u_t^* solution particulière de (3) de la forme $u_t^* = Ct2^t$. On détermine C en écrivant que u_t^* vérifie (3) :

$C(t+1)2^{t+1} = 2Ct2^t + k_1 2^t$, soit $2^t(2C - k_1) = 0, C = \frac{k_1}{2}$ et $u_t = k_2 2^t + \frac{k_1}{2} t2^t$. Donc $Z_t = \begin{pmatrix} k_2 2^t + \frac{k_1}{2} t2^t \\ k_1 2^t \end{pmatrix}$ et $X_t = PZ_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_2 2^t + \frac{k_1}{2} 2 2^t \\ k_1 2^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_1 + k_2)2^t + \frac{k_1}{2} 2 2^t \\ -k_2 2^t - \frac{k_1}{2} t2^t \end{pmatrix}$.

D'où $\begin{cases} x_t = (k_1 + k_2)2^t + \frac{k_1}{2} t2^t \\ y_t = -k_2 2^t - \frac{k_1}{2} t2^t \end{cases}$

Les constantes k_1 et k_2 peuvent être déterminées si on connaît les conditions initiales.

Exercice 11

Consigne

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x_{t+1} = x_t + 2y_t - 2z_t \\ y_{t+1} = 2x_t + y_t - 2z_t \\ z_{t+1} = 2x_t + 2y_t - 3z_t \end{cases}$.

Correction

Notons $X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, le système s'écrit $X_{t+1} = AX_t$

On a donc $X_t = A^t X_0$. Mais ce calcul, après réduction de A utilise P^{-1}. Nous allons plutôt utiliser, comme dans l'exercice précédent un changement de variable.

Réduction de A : $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 2 & -2 \\ 2 & (1-\lambda) & -2 \\ 2 & 2 & (-3-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = (1-\lambda)(1+\lambda)^2$.

A a donc 2 valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 1$ avec $m(\lambda_1) = 1$ et $\lambda_2 = -1$ avec $m(\lambda_2) = 2$.

Détermination du sous-espace propre E_{λ_2} associé à la valeur propre $\lambda_2 = -1$.

$$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\right\} \Leftrightarrow \{AV = \lambda_2 V\}, \text{ soit } \begin{cases} x + 2y - 2z = -x \\ 2x + y - 2z = -y \\ 2x + 2y - 3z = -z \end{cases} \text{ ou } x + y - z = 0.$$

$$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\right\} \Leftrightarrow \left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

E_{λ_2} est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_{\lambda_2} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

$\dim E_{\lambda_2} = 2 = m(\lambda_2)$, donc A est diagonalisable et est semblable à $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Détermination du sous-espace propre E_{λ_1} associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$.

$$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\right\} \Leftrightarrow \{AV = \lambda_1 V\}, \text{ soit } \begin{cases} x + 2y - 2z = x \\ 2x + y - 2z = y \\ 2x + 2y - 3z = z \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases}.$$

$$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\right\} \Leftrightarrow \left\{V = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

E_{λ_1} est donc engendré par $V_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, E_{\lambda_1} =< \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} >$. Donc $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Changement de variable : Le système s'écrit alors $X_{t+1} = (PDP^{-1})X_t$ ou $P^{-1}X_{t+1} = D(P^{-1}X_t)$

Faisons le changement de variable $Z_t = P^{-1}X_t$, (1) devient $Z_{t+1} = DZ_t$

Notons $Z_t = \begin{pmatrix}u_t\\v_t\\w_t\end{pmatrix}$, (2) s'écrit $\begin{cases}u_{t+1} = -u_t\\v_{t+1} = -v_t,\\w_{t+1} = w_t\end{cases}$ soit $\begin{cases}u_t = k_1(-1)^t\\v_t = k_2(-1)^t\\w_t = k_3\end{cases}$

$Z_t = \begin{pmatrix}k_1(-1)^t\\k_2(-1)^t\\k_3\end{pmatrix}$ et $X_t = PZ_t = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1(-1)^t\\k_2(-1)^t\\k_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_1(-1)^t + k_3\\k_2(-1)^t + k_3\\(k_1+k_2)(-1)^t + k_3\end{pmatrix}$. D'où

$$\begin{cases}x_t = k_1(-1)^t + k_3\\y_t = k_2(-1)^t + k_3\\z_t = (k_1+k_2)(-1)^t + k_3\end{cases}$$

Les constantes k_1, k_2 et k_3 peuvent être déterminées si on connaît les conditions initiales.

Exercice 12

Consigne

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases}x_{t+1}^1 = 2x_t^1 - x_t^2 - 2x_t^3 + 2\\x_{t+1}^2 = x_t^1 + x_t^2 - 1\\x_{t+1}^3 = -(1/2)x_t^2 + 3/2\end{cases}$.

On remarquera que l'inverse de $\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\2 & 0 & 0\\-1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & -1 & -2\end{pmatrix}$.

Correction

Ecrivons le système sous la forme (1) $\begin{cases}x_{t+1} = 2x_t - y_t - 2z_t + 2\\y_{t+1} = x_t + y_t - 1\\z_{t+1} = -\frac{1}{2}y_t + \frac{3}{2}\end{cases}$

Notons $X_t = \begin{pmatrix}x_t\\y_t\\z_t\end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\1 & 1 & 0\\0 & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$ et $F_t = \begin{pmatrix}2\\-1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$, le système s'écrit $X_{t+1} = AX_t + F_t$

Réduction de A : $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix}(2-\lambda) & -1 & -2\\1 & (1-\lambda) & 0\\0 & -\frac{1}{2} & -\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1-\lambda)^3$.

A a donc 1 valeur propre $\lambda = 1$ avec $m(\lambda) = 3$.

Détermination du sous-espace propre E_λ associé à la valeur propre $\lambda = 1$.

$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\lambda\right\} \Leftrightarrow \{AV = \lambda V\}$, soit $\begin{cases} 2x - y - 2z = x \\ x + y = y \\ -\dfrac{1}{2}y = z \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x = 0 \\ -y = 2z \end{cases}$.

$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\lambda\right\} \Leftrightarrow \left\{V = \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

E_λ est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (on choisit $z = -1$ pour pouvoir utiliser la remarque en fin d'énoncé), $E_\lambda = \langle\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\rangle$.

$\dim\ E_\lambda = 1 < m(\lambda)$, donc A n'est pas diagonalisable et a pour réduite de Jordan $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Détermination des vecteurs de Jordan.

A a deux vecteurs de Jordan V_2 et V_3 vérifiant $AV_2 = V_1 + V_2$ et $AV_3 = V_2 + V_3$.

Donc si $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $AV_2 = V_1 + V_2$ équivaut à $\begin{cases} 2x - y - 2z = 0 + x \\ x + y = 2 + y \\ -\frac{1}{2}y = -1 + z \end{cases}$, soit $\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x = 2 \\ y = 2 - 2z \end{cases}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

Si $V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $AV_3 = V_2 + V_3$ équivaut à $\begin{cases} 2x - y - 2z = 2 + x \\ x + y = 0 + y \\ -\frac{1}{2}y = 1 + z \end{cases}$, soit $\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ x = 0 \\ y = -2 - 2z \end{cases}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient.

Donc $A = PJP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Le calcul de P^{-1} donne $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ d'après la remarque de l'énoncé.

Changement de variable : Le système s'écrit alors $X_{t+1} = (PJP^{-1})X_t + F_t$ ou $P^{-1}X_{t+1} = J(P^{-1}X_t) + P^{-1}F_t$

Or $P^{-1}F_t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Faisons le changement de variable $Z_t = P^{-1}X_t$,

(1) devient $Z_{t+1} = JZ_t + P^{-1}F_t$

$$\text{Notons } Z_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix}, \text{ (3) s'écrit } \begin{cases} u_{t+1} = u_t + v_t - \frac{1}{2} & (4) \\ v_{t+1} = v_t + w_t + 1 & (5) \\ w_{t+1} = w_t & (6) \end{cases}$$

On résout ce système en commençant par la dernière équation.

$$(6) \Leftrightarrow \{w_t = k_1\} \qquad (7)$$

(5) s'écrit $v_{t+1} = v_t + k_1 + 1$

Donc $v_t = k_2 + v_t^*$ avec v_t^* solution particulière de (7) de la forme $v_t^* = Ct$ (il y a résonance).

On détermine C en écrivant que v_t^* vérifie (7) : $C(t+1) = Ct + k_1 + 1$, soit $C = k_1 + 1$ et $v_t = k_2 + (k_1+1)t$

(4) s'écrit $u_{t+1} = u_t + k_2 + (k_1+1)t - \frac{1}{2}$

Donc $u_t = k_3 + u_t^*$ avec u_t^* solution particulière de (8) de la forme $u_t^* = (C_1 t + C_2)t = C_1 t^2 + C_2 t$ (il y a résonance). On détermine C_1 et C_2 en écrivant que u_t^* vérifie (8) :

$C_1(t+1)^2 + C_2(t+1) = C_1 t^2 + C_2 t + k_2 + (k_1+1)t - \frac{1}{2}$, soit $t(2C_1 - k_1 - 1) + \left(C_1 + C_2 - k_2 + \frac{1}{2}\right) = 0$ et $C_1 = \frac{1}{2}(k_1+1)$ et $C_2 = -\frac{1}{2}k_1 + k_2 - 1$. Donc $u_t = k_3 + \frac{1}{2}(k_1+1)t^2 + \left(-\frac{1}{2}k_1 + k_2 - 1\right)t$

D'où

$$Z_t = \begin{pmatrix} k_3 + \frac{1}{2}(k_1+1)t^2 + \left(-\frac{1}{2}k_1 + k_2 - 1\right)t \\ k_2 + (k_1+1)t \\ k_1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$X_t = PZ_t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_3 + \frac{1}{2}(k_1+1)t^2 + \left(-\frac{1}{2}k_1 + k_2 - 1\right)t \\ k_2 + (k_1+1)t \\ k_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} x_t = 2k_2 + 2(k_1+1)t \\ y_t = 2k_3 + (2k_2 - k_1 - 2)t + (k_1+1)t^2 \\ z_t = (-k_3 + k_2 - k_1) + \left(\frac{3}{2}k_1 - k_2 + 2\right)t - \frac{1}{2}(k_1+1)t^2 \end{cases}$$

Les constantes k_1, k_2 et k_3 peuvent être déterminées si on connaît les conditions initiales.

Exercice 13

Consigne

Etudier suivant la valeur de a la stabilité du système : $\begin{cases} x_{t+1}^1 = ax_t^1 + \frac{1}{2}x_t^2 \\ x_{t+1}^2 = \frac{1}{2}x_t^1 + ax_t^2 \end{cases}$.

Correction

Notons $X_t = \binom{x_t}{y_t}$ et $A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & a \end{pmatrix}$, le système s'écrit $X_{t+1} = AX_t$

La stabilité d'un système séquentiel dépend du module des valeurs propres de A.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (a-\lambda) & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & (a-\lambda) \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = \left(a - \frac{1}{2} - \lambda\right)\left(a + \frac{1}{2} - \lambda\right).$$

Les deux valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = a - \frac{1}{2}$ et $\lambda_2 = a + \frac{1}{2}$.

Et A sera séquentiellement stable si et seulement si $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$.

Soit $\left|a - \frac{1}{2}\right| < 1$ et $\left|a + \frac{1}{2}\right| < 1$. Or $\left\{\left|a - \frac{1}{2}\right| < 1\right\} \Leftrightarrow \left\{-\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}\right\}$ et $\left\{\left|a + \frac{1}{2}\right| < 1\right\} \Leftrightarrow \left\{-\frac{3}{2} < a < \frac{1}{2}\right\}$

Soit $|a| < \frac{3}{2}$

Exercice 14

Consigne

1) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -1/2 \\ -7 & 5 & -1/2 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

2) Donner la forme la plus simple de S (diagonale ou forme réduite de Jordan) telle que A $= PSP^{-1}$. Déterminer P.

3) Soit le système $\begin{cases} x_{t+1} = -x_t + y_t \\ y_{t+1} = -5x_t + 4y_t - \frac{1}{2}z_t \\ z_{t+1} = -7x_t + 5y_t - \frac{1}{2}z_t \\ x_0 = 5, y_0 = 8 \text{ et } z_0 = 4 \end{cases}$

Calculer (x_t, y_t, z_t) en fonction de t. Quel est le comportement de ce vecteur quand t tend vers $+\infty$?

Correction

1) $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 1 & 0 \\ -5 & (4-\lambda) & -\frac{1}{2} \\ -7 & 5 & \left(-\frac{1}{2}-\lambda\right) \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{5}{2}\lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2}$. $P_A(\lambda) == (1-\lambda)^2\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)$.

Les deux valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 1$ avec $m(\lambda_1) = 2$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ avec $m(\lambda_2) = 1$.

A sera diagonalisable si le sous-espace propre E_{λ_1} associé à $\lambda_1 = 1$ est de dimension 2 $(= m(\lambda_1))$.

Détermination du sous-espace propre E_{λ_1}.

$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\right\} \Leftrightarrow \{AV = \lambda_1 V\}$, soit $\begin{cases} -x + y = x \\ -5x + 4y - \frac{1}{2}z = y \\ -7x + 5y - \frac{1}{2}z = z \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 2x \\ z = 2x \end{cases}$.

$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}\right\} \Leftrightarrow \left\{V = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

E_{λ_1} est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\dim\ E_{\lambda_1} = 1 < m(\lambda_1)$, donc A n'est pas diagonalisable et est semblable à $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2) $S = J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Pour déterminer P, il faut déterminer un vecteur de Jordan V_2 associé à λ_1 et le sous-espace propre E_{λ_2} associé à λ_2.

Détermination de V_2

V_2 vérifie $AV_2 = V_1 + V_2$.

Si $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $AV_2 = V_1 + V_2$ équivaut à $\begin{cases} -x + y = 1 + x \\ -5x + 4y - \frac{1}{2}z = 2 + y \\ -7x + 5y - \frac{1}{2}z = 2 + z \end{cases}$, soit $\begin{cases} y = 1 + 2x \\ z = 2 + 2x \end{cases}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ convient.

Détermination du sous-espace propre E_{λ_2}.

$$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda_2 V\}, \text{ soit } \begin{cases} -x + y = \frac{1}{2}x \\ -5x + 4y - \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}y \\ -7x + 5y - \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}z \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ z = \frac{1}{2}x \end{cases}.$$

$$\left\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\right\} \Leftrightarrow \left\{V = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{2}x \\ \frac{1}{2}x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\}.$$

E_{λ_2} est donc engendré par $V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit P : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3) Notons $X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$, le système s'écrit $X_{t+1} = AX_t$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

Etant donnée la réduction de A, on a $X_{t+1} = (PSP^{-1})X_t$ (1) et $P^{-1}X_{t+1} = S(P^{-1}X_t)$.

Changement de variable :

Faisons le changement de variable $Z_t = P^{-1}X_t$,

(1) devient $Z_{t+1} = SZ_t$

Notons $Z_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix}$, (2) s'écrit $\begin{cases} u_{t+1} = u_t + v_t \ (3) \\ v_{t+1} = v_t (4) \\ w_{t+1} = \frac{1}{2}w_t (5) \end{cases}$. On résout ce système en commençant par la dernière équation.

$$(5) \Leftrightarrow \left\{w_t = k_1\left(\frac{1}{2}\right)^t\right\}$$

$$(4) \Leftrightarrow \{v_t = k_2\}$$

(3) s'écrit $u_{t+1} = u_t + k_2$

Donc $u_t = k_3 + u_t^*$ avec u_t^* solution particulière de (6) de la forme $u_t^* = Ct$ (il y a résonance). On détermine C en écrivant que u_t^* vérifie (6) :

$C(t+1) = Ct + k_2$, soit $C = k_2$ et $u_t = k_3 + k_2 t$

D'où $Z_t = \begin{pmatrix} k_3 + k_2 t \\ k_2 \\ k_1 \left(\frac{1}{2}\right)^t \end{pmatrix}$ et $X_t = PZ_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_3 + k_2 t \\ k_2 \\ k_1 \left(\frac{1}{2}\right)^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_3 + k_2 t + 2k_1 \left(\frac{1}{2}\right)^t \\ 2(k_3 + k_2 t) + k_2 + 3\left(k_1 \left(\frac{1}{2}\right)^t\right) \\ 2(k_3 + k_2 t) + 2k_2 + k_1 \left(\frac{1}{2}\right)^t \end{pmatrix}$

On détermine k_1, k_2 et k_3 à l'aide des conditions initiales $X_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

D'où $\begin{cases} 5 = k_3 + 2k_1 \\ 8 = 2k_3 + k_2 + 3k_1 \\ 4 = 2k_3 + 2k_2 + k_1 \end{cases}$ et $k_1 = 2, k_2 = 0$ et $k_3 = 1$. Donc $\begin{cases} x_t = 1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^t \\ y_t = 2 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^t \\ z_t = 2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^t \end{cases}$

Et $\lim_{t \to +\infty} (x_t, y_t, z_t) = (1,2,2)$

Exercice 15

Consigne

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x_{t+1} = x_t + 2y_t - 2z_t + 2t - 2 + (-1)^t \\ y_{t+1} = 2x_t + y_t - 2z_t + 6t + 5 \times 4^t \\ z_{t+1} = 2x_t + 2y_t - 3z_t + 6t - 2 + (-1)^t + 5 \times 4^t \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \text{ et } z(0) = -1 \end{cases}$

Remarque : on pourra utiliser des résultats de **11** et calculer $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction

Notons $X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$, , $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $F_t = \begin{pmatrix} 2t - 2 + (-1)^t \\ 6t + 5(4^t) \\ 6t - 2 + (-1)^t + 5(4^t) \end{pmatrix}$, le système s'écrit

$$X_{t+1} = AX_t + F_t \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Réduction de A : D'après l'exercice 11,

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque : ici on a changé l'ordre des valeurs propres et des vecteurs propres pour pouvoir utiliser l'indication de l'énoncé.

Le système s'écrit alors $X_{t+1} = (PDP^{-1})X_t + F_t$ ou $P^{-1}X_{t+1} = D(P^{-1}X_t) + P^{-1}F_t$

Changement de variable

Faisons le changement de variable $Z_t = P^{-1}X_t$,

(1) devient $Z_{t+1} = DZ_t + P^{-1}F_t$

D'autre part, si on suit les indications de l'énoncé :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}F_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2t-2+(-1)^t \\ 6t+5(4^t) \\ 6t-2+(-1)^t+5(4^t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -2+(-1)^t \\ 4t+5(4^t) \end{pmatrix}$

Notons $Z_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix}$, (2) s'écrit $\begin{cases} u_{t+1} = u_t + 2t \\ v_{t+1} = -v_t - 2 + (-1)^t \\ w_{t+1} = -w_t + 4t + 5(4^t) \end{cases}$

Résolution de (3) : $u_t = k_1 + u_t^*$ avec u_t^* solution particulière de (3) de la forme $u_t^* = C_1t^2 + C_2t$ (il y a résonance). On détermine C_1 et C_2 en écrivant que u_t^* vérifie (3) :

$C_1(t+1)^2 + C_2(t+1) = C_1t^2 + C_2t + 2t$, soit $t(2C_1 - 2) + C_1 + C_2 = 0$. D'où $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, et

$$u_t = k_1 + t^2 - t$$

Résolution de (4) : $v_t = k_2(-1)^t + v_t^*$ avec v_t^* solution particulière de (4) de la forme $v_t^* = C_1 + C_2t(-1)^t$ (il y a résonance). On détermine C_1 et C_2 en écrivant que v_t^* vérifie (4) :

$C_1 + C_2(t+1)(-1)^{t+1} = -(C_1 + C_2t(-1)^t) - 2 + (-1)^t$, soit $(2C_1 + 2) + (-1)^t(-C_2 - 1) = 0$. D'où $C_1 = -1, C_2 = -1$, et $v_t = k_2(-1)^t - 1 - t(-1)^t$

Résolution de (5) : $w_t = k_3(-1)^t + w_t^*$ avec w_t^* solution particulière de (5) de la forme $w_t^* = C_1t + C_2 + C_3(4^t)$. On détermine C_1, C_2 et C_3 en écrivant que w_t^* vérifie (5) :

$C_1(t+1) + C_2 + C_3(4^{t+1}) = -\left(C_1t + C_2 + C_3(4^t)\right) + 5(4^t) + 4t$ soit

$t(2C_1 - 4) + (C_1 + 2C_2) + 4^t(5C_3 - 5) = 0$. D'où $C_1 = 2, C_2 = -1, C_3 = 1$ et $w_t = k_3(-1)^t + 2t - 1 + 4^t$

$Z_t = \begin{pmatrix} k_1 + t^2 - t \\ k_2(-1)^t - 1 - t(-1)^t \\ k_3(-1)^t + 2t - 1 + 4^t \end{pmatrix}$ et $X_t = PZ_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 + t^2 - t \\ k_2(-1)^t - 1 - t(-1)^t \\ k_3(-1)^t + 2t - 1 + 4^t \end{pmatrix}$

$$X_t = \begin{pmatrix} k_1 + k_2(-1)^t + t^2 - t - 1 - t(-1)^t \\ k_1 + k_3(-1)^t + t^2 + t - 1 + 4^t \\ k_1 + (k_3 + k_2)(-1)^t + t^2 + t - 2 - t(-1)^t + 4^t \end{pmatrix}.$$

On détermine les constantes k_1, k_2 et k_3 en utilisant les conditions initiales $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc $\begin{cases} 0 = k_1 + k_2 - 1 \\ 0 = k_1 + k_3 - 1 + 1 \\ -1 = k_1 + (k_3 + k_2) - 2 + 1 \end{cases}$ et $k_1 = 1, k_2 = 0$ et $k_3 = -1$.

D'où $\begin{cases} x_t = t^2 - t - t(-1)^t \\ y_t = -(-1)^t + t^2 + t + 4^t \\ z_t = -(t+1)(-1)^t + t^2 + t - 1 + 4^t \end{cases}$

Exercice 16

Consigne

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x_{t+1} = -x_t + y_t + 2t^2 - 12 + 2^t \\ y_{t+1} = -5x_t + 4y_t - \frac{1}{2}z_t + 3t^2 - 16 + 2^{t+1} \\ z_{t+1} = -7x_t + 5y_t - \frac{1}{2}z_t + t^2 - 2 + 2^{t+1} \\ x_0 = 2, y_0 = 4 \text{ et } z_0 = 3 \end{cases}$

Remarque : on pourra utiliser des résultats de **14** et calculer $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Correction

Notons $X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -\frac{1}{2} \\ -7 & 5 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $F_t = \begin{pmatrix} 2t^2 - 12 + 2^t \\ 3t^2 - 16 + 2^{t+1} \\ t^2 - 2 + 2^{t+1} \end{pmatrix}$, le système s'écrit

$$X_{t+1} = AX_t + F_t \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Réduction de A : D'après l'exercice **14**, $A = PJP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Le système s'écrit alors $X_{t+1} = (PJP^{-1})X_t + F_t$ ou $P^{-1}X_{t+1} = J(P^{-1}X_t) + P^{-1}F_t$

Changement de variable : Faisons le changement de variable $Z_t = P^{-1}X_t$,

(1) devient $Z_{t+1} = JZ_t + P^{-1}F_t$

D'autre part, si on suit les indications de l'énoncé : $\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&3\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-4&2\\-4&3&-1\\-2&2&-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Donc $P^{-1}=\begin{pmatrix}5&-4&2\\-4&3&-1\\-2&2&-11\end{pmatrix}$ et $P^{-1}F_t=\begin{pmatrix}5&-4&2\\-4&3&-1\\-2&2&-11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2t^2-12+2^t\\3t^2-16+2^{t+1}\\t^2-2+2^{t+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^t\\2\\t^2-6\end{pmatrix}$

Notons $Z_t=\begin{pmatrix}u_t\\v_t\\w_t\end{pmatrix}$, (2) s'écrit $\begin{cases}u_{t+1}=u_t+v_t+2^t\\v_{t+1}=v_t+2\ (4)\\w_{t+1}=\frac{1}{2}w_t+t^2-6\end{cases}$

On résout ce système en commençant par la dernière équation.

Résolution de (5) : $w_t=k_1\left(\frac{1}{2}\right)^t+w_t^*$ avec w_t^* solution particulière de (5) de la forme $w_t^*=C_1t^2+C_2t+C_3$. On détermine C_1, C_2 et C_3 en écrivant que w_t^* vérifie (5) :

$C_1(t+1)^2+C_2(t+1)+C_3=\frac{1}{2}(C_1t^2+C_2t+C_3)+t^2-6$ soit $t^2\left(\frac{1}{2}C_1-1\right)+t\left(2C_1+\frac{1}{2}C_2\right)+\left(C_1+C_2+\frac{1}{2}C_3+6\right)=0$. D'où $C_1=2, C_2=-8, C_3=0$ et $w_t=k_1\left(\frac{1}{2}\right)^t+2t^2-8t$

Résolution de (4) : $v_t=k_2+v_t^*$ avec v_t^* solution particulière de (4) de la forme $v_t^*=C_1t$ (il y a résonance). On détermine C_1 en écrivant que v_t^* vérifie (4) :

$C_1(t+1)=C_1t+2$, soit $C_1=2$ et $v_t=k_2+2t$

Résolution de (3) : (3) devient (6) $u_{t+1}=u_t+k_2+2t+2^t$.

$u_t=k_3+u_t^*$ avec u_t^* solution particulière de (6) de la forme $u_t^*=C_1t^2+C_2t+C_32^t$ (il y a résonance). On détermine C_1e,tC_2 et C_3 en écrivant que u_t^* vérifie (6) : $C_1(t+1)^2+C_2(t+1)+C_32^{t+1}=C_1t^2+C_2t+C_32^t+k_2+2t+2^t$, soit $t(2C_1-2)+(C_1+C_2-k_2)+2^t(2C_3-C_3-1)=0$. D'où $C_1=1, C_2=k_2-1$ et $C_3=1$, et $u_t=k_3+t^2+(k_2-1)t+2^t$

D'où $Z_t=\begin{pmatrix}k_3+t^2+(k_2-1)t+2^t\\k_2+2t\\k_1\left(\frac{1}{2}\right)^t+2t^2-8t\end{pmatrix}$ et $X_t=PZ_t=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&3\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_3+t^2+(k_2-1)t+2^t\\k_2+2t\\k_1\left(\frac{1}{2}\right)^t+2t^2-8t\end{pmatrix}$,

$$X_t=\begin{pmatrix}k_3+5t^2+(k_2-17)t+2^t+2k_1\left(\frac{1}{2}\right)^t\\2k_3+8t^2+(2k_2-24)t+2^{t+1}+k_2+3k_1\left(\frac{1}{2}\right)^t\\2k_3+4t^2+(2k_2-6)t+2^{t+1}+2k_2+k_1\left(\frac{1}{2}\right)^t\end{pmatrix}$$

On détermine k_1, k_2 et k_3 à l'aide des conditions initiales $X_0=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$.

D'où $\begin{cases}2=k_3+1+2k_1\\4=2k_3+2+k_2+3k_1\\3=2k_3+2+2k_2+k_1\end{cases}$ et $k_1=1, k_2=1$ et $k_3=-1$. Donc $\begin{cases}x_t=5t^2-16t-1+2^t+\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}\\y_t=8t^2-22t-1+2^{t+1}+3\left(\frac{1}{2}\right)^t\\z_t=4t^2-4t+2^{t+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^t\end{cases}$

Exercice 17

Consigne

1) Réduire $\begin{pmatrix}5/2 & -1\\4 & -3/2\end{pmatrix}$.

2) Résoudre astucieusement dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases}x_{t+1}=5/2x_t-y_t-2+3(2^t)\\y_{t+1}=4x_t-3/2y_t-5+6(2^t)\\z_{t+1}=x_t-\frac{1}{2}y_t-\frac{1}{2}z_t-\left(\frac{1}{2}\right)^{t+1}-1\\x_0=2, y_0=1 \text{ et } z_0=1\end{cases}$.

N.B. : On donne le résultat suivant : si $\mathrm{P}=\begin{pmatrix} & \mathrm{a}\\\mathrm{c} & \mathrm{d}\end{pmatrix}$ est une matrice inversible alors $\mathrm{P}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{ad-bc}}\begin{pmatrix}\mathrm{d} & -\mathrm{b}\\-\mathrm{c} & \mathrm{a}\end{pmatrix}$

Correction

Réduction de A : $P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\left(\frac{5}{2}-\lambda\right) & -1\\4 & \left(-\frac{3}{2}-\lambda\right)\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2$.

Détermination du sous-espace propre $E_{\frac{1}{2}}$ associé à la valeur propre $\lambda=\frac{1}{2}$.

$\left\{V=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in E_{\frac{1}{2}}\right\}\Leftrightarrow\left\{AV=\frac{1}{2}V\right\}$, soit $\begin{cases}\frac{5}{2}x-y=\frac{1}{2}x\\4x-\frac{3}{2}y=\frac{1}{2}y\end{cases}$ ou $y=2x$.

$\left\{V=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in E_{\frac{1}{2}}\right\}\Leftrightarrow\left\{V=\begin{pmatrix}x\\2x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

$E_{\frac{1}{2}}$ est donc engendré par $V_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, E_{\frac{1}{2}}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\rangle$.

$\dim\ E_{\frac{1}{2}}=1<m\left(\frac{1}{2}\right)$, donc A n'est pas diagonalisable et a pour réduite de Jordan $J=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Reste à déterminer un vecteur de Jordan.

$\left\{V = \binom{x}{y} \text{ est un vecteur de Jordan}\right\} \Leftrightarrow \left\{AV = V_1 + \frac{1}{2}V\right\}$, soit $\begin{cases} \frac{5}{2}x - y = 1 + \frac{1}{2}x \\ 4x - \frac{3}{2}y = 2 + \frac{1}{2}y \end{cases}$ ou $2x = 1 + y$. Et $V_2 = \binom{0}{-1}$ convient. Donc $A = PJP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Si on considère les deux premières équations du système on a (1) $\begin{cases} x_{t+1} = \frac{5}{2}x_t - y_t - 2 + 3(2^t) \\ y_{t+1} = 4x_t - \frac{3}{2}y_t - 5 + 6(2^t) \end{cases}$

Notons $X_t = \binom{x_t}{y_t}$ et $F_t = \binom{-2+3(2^t)}{-5+6(2^t)}$, le système s'écrit

$$X_{t+1} = AX_t + F_t \text{ avec } X_0 = \binom{2}{1}$$

Le système s'écrit alors $X_{t+1} = (PJP^{-1})X_t + F_t$ ou $P^{-1}X_{t+1} = J(P^{-1}X_t) + P^{-1}F_t$

Changement de variable :

Faisons le changement de variable $Z_t = P^{-1}X_t$,

(1) devient $Z_{t+1} = JZ_t + P^{-1}F_t$

D'après la formule de l'énoncé $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}F_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\binom{-2+3(2^t)}{-5+6(2^t)} = \binom{-2+3(2^t)}{1}$

Notons $Z_t = \binom{u_t}{v_t}$, (2) s'écrit $\begin{cases} u_{t+1} = \frac{1}{2}u_t + v_t + -2 + 3(2^t) \\ v_{t+1} = \frac{1}{2}v_t + 1 \ (4) \end{cases}$

Résolution de (4) : $v_{t+1} == k_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + v_t^*$ avec v_t^* solution particulière de (4) de la forme $v_t^* = C$. On détermine C en écrivant que v_t^* vérifie (4) :

$C = \frac{1}{2}C + 1$, soit $C = 2$ et $v_t = k_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + 2$

Résolution de (3) : (3) s'écrit (5) : $u_{t+1} = \frac{1}{2}u_t + k_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + 3(2^t)$

$u_{t+1} == k_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + u_t^*$ avec u_t^* solution particulière de (5) de la forme $u_t^* = C_1 t\left(\frac{1}{2}\right)^t + C_2(2^t)$. On détermine C_1 et C_2 en écrivant que u_t^* vérifie (5) : $C_1(t+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} + C_2(2^{t+1}) = \frac{1}{2}\left(C_1 t\left(\frac{1}{2}\right)^t + C_2(2^t)\right) + k_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + 3(2^t)$, soit $\left(\frac{1}{2}\right)^t\left(\frac{1}{2}C_1 - k_1\right) + 2^t\left(2C_2 - \frac{1}{2}C_2 - 3\right) = 0$. D'où $C_1 = 2k_1, C_2 = 2$ et $u_t = k_2\left(\frac{1}{2}\right)^t + 2k_1 t\left(\frac{1}{2}\right)^t + 2^{t+1}$

Donc $Z_t = \begin{pmatrix} k_2\left(\frac{1}{2}\right)^t + 2k_1 t\left(\frac{1}{2}\right)^t + 2^{t+1} \\ k_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + 2 \end{pmatrix}$ et

$$X_t = PZ_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2\left(\frac{1}{2}\right)^t + 2k_1 t\left(\frac{1}{2}\right)^t + 2^{t+1} \\ k_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_2 + 2k_1 t)\left(\frac{1}{2}\right)^t + 2^{t+1} \\ (2k_2 - k_1 + 4k_1 t)\left(\frac{1}{2}\right)^t + 2^{t+2} - 2 \end{pmatrix}$$

On détermine k_1 et k_2 à l'aide des conditions initiales $X_0 = \binom{2}{1}$. D'où $\begin{cases} 2 = k_2 + 2 \\ 1 = 2k_2 - k_1 + 2 \end{cases}$, d'où $k_1 = 1$ et $k_2 = 0$ et $\begin{cases} x_t = 2t\left(\frac{1}{2}\right)^t + 2^{t+1} \\ y_t = (4t-1)\left(\frac{1}{2}\right)^t + 2^{t+2} - 2 \end{cases}$

D'autre part z_t vérifie alors $z_t = -\frac{1}{2}z_t$ et $z_t = k_3\left(-\frac{1}{2}\right)^t$. Et puisque $z_0 = 1, k_3 = 1$ et $z_t = \left(-\frac{1}{2}\right)^t$

En récapitulant : $\begin{cases} x_t = 2t\left(\frac{1}{2}\right)^t + 2^{t+1} \\ y_t = (4t-1)\left(\frac{1}{2}\right)^t + 2^{t+2} - 2 \\ z_t = \left(-\frac{1}{2}\right)^t \end{cases}$

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 3, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).