Somme de sous-espaces vectoriels – Produit scalaire - Projections

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices

Exercice 1

Consigne

Soit F_1 le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2,1,0)$ $v_2 = (-1,0,1)$ et $w = (4,1,-2)$.

1) Déterminer une base et la dimension de F_1. Ecrire la forme générale d'un vecteur de F_1.

2) Soit $F_2 = \{(0, a + b, -b),\ a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F_2 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera la dimension et une base.

3) Donner une base et la dimension de $F_1 \cap F_2$ et $F_1 + F_2$. La somme $F_1 + F_2$ est-elle directe ?

Exercice 2

Consigne

Soit F_1 et F_2 les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ engendrés respectivement par les familles $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{v_1, v_2\}$ où :

$u_1 = (1,0,4,2), u_2 = (1,2,3,1)$ et $u_3 = (1,-2,5,3)$

$v_1 = (4,2,0,1)$ et $v_2 = (1,4,2,1)$

1) Déterminer la dimension et une base des espaces F_1 et F_2.

2) Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3

Consigne

Déterminer l'application linéaire qui projette $\mathbb{R}^3$ dans le plan engendré par $V_1 = (-1,0,1)$ et $V_2 = (0,1,0)$ parallèlement à $Y = (1,0,1)$.

Exercice 4

Consigne

Déterminer le produit scalaire de V_1 et V_2 ainsi que $||V_1||$ et $||V_2||$ dans les cas suivants :

1) $V_1 = \left(-1, \sqrt{3}, 1, -2\right)$ et $V_2 = \left(1,2,3,\sqrt{3}\right)$

2) $V_1 = (1,-2,-1)$ et $V_2 = \left(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

Exercice 5

Consigne

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $v_1 = (1,-1,1)$ et $v_2 = (-1,0,1)$.

1) Démontrer que ces vecteurs sont orthogonaux. Sont-ils dépendants ?

2) Déterminer un vecteur v_3 tel que $\{v_1, v_2, v_3\}$ soit une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ puis exprimer $w = (1,0,0)$ dans cette base.

Exercice 6

Consigne

Soient $v = (1,0,-1)$ et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à v (c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs orthogonaux à v). Quelle est la dimension de F ? Déterminer F.

Exercice 7

Consigne

Soit $v_1 = (1,-1,1,1)$ et $v_2 = (0,1,0,1)$. Montrer que v_1 et v_2 sont orthogonaux et déterminer le sous-espace vectoriel orthogonal au sous espace vectoriel engendré par v_1 et v_2.

Exercice 8

Consigne

Soit $v_1 = \left(1/2, \sqrt{2}/4, 3/4, -1/4\right)$. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ contenant v_1.

Exercice 9

Consigne

Montrer que $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.

Exercice 10

Consigne

Soit $F = \{(x, y, z) \in R^3; x - 2y + z = 0\}$.

1) Donner une base de F.

2) Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à F.

3) Déterminer la projection orthogonale p sur F (c'est-à-dire la projection sur F parallèlement au sous espace orthogonal à F) sans utiliser le dernier résultat du cours (on demande d'exprimer $p(v) = p(x, y, z)$ en fonction des coordonnées x, y et z d'un vecteur v quelconque de $\mathbb{R}^3$).

4) Donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, sans utiliser le dernier résultat du cours.

5) Soit $v = (-1,0,-1)$. Trouver le vecteur w de F qui approxime le mieux v, au sens où $||v - w||$ est minimale.

Exercice 11

Consigne

1) Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ orthogonal à F tel que :

$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x = y - t \; et \; z = y + 2t\}$

2) Déterminer la projection orthogonale sur F correspondante sans utiliser le dernier résultat du cours.

3) Soit $v \; = (1,2,-1,3)$. Trouver le vecteur w de F qui approxime le mieux v, au sens où $||v - w||$ est minimale.

Exercice 12

Consigne

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique.

Soit $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Déterminer le vecteur w de $F = \langle e \rangle$ qui approxime le mieux X, au sens où $||X - w||$ est minimale.

Exercice 13

Consigne

Soit F_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$\{(x, y, z, t); 2x + y = z$ et $z + t = 0\}$.

1) Donner une base de F_1 puis sa dimension.

2) Soit $F_2 = \langle(1,1,0,0), (0,1,1,0)\rangle$. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

3) Soit $p(x, y, z, t) = \left(\frac{x-y+z}{3}, \frac{-2x+2y-2z-3t}{3}, -t, t\right)$. Montrer que p est un projecteur.

Montrer que p est la projection sur F_1 parallèlement à F_2.

(On n'utilisera pas le dernier résultat du cours).

Exercice 14

Consigne

Soient $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (1,-1,-1,1), u_3 = (1,-1,1,-1)$ et $u_4 = (1,1,-1,-1)$.

1) a) Montrer que $b = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^4$.

b) Calculer la norme de chacun des vecteurs de b et en déduire que A est orthogonale.

c) Calculer A^{-1}.

2) Soit E_1 le sous-espace vectoriel engendré par $(2,1,0,1)$ et $(1,0,1,0)$ (E_1 est en fait le sous-espace propre de A relatif à la valeur propre 1) et E_2 le sous-espace vectoriel engendré par $(1,2,-1,0)$ et $(0,-1,0,1)$ (E_2 est le sous-espace propre de A relatif à la valeur propre -1). E_1 et E_2 sont-ils orthogonaux ?

Expliciter, dans une base que l'on précisera et que l'on choisira la plus simple possible, la projection de p sur E_1 parallèlement à E_2 (on demande $p(v)$ en fonction des coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de v (vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$) dans la base choisie et la matrice de p dans cette base sans utiliser le dernier résultat du cours).

Exercice 15

Consigne

Reprendre les exercices 10, 11 et 14 et déterminer les matrices des projections dans la base canonique en utilisant le dernier résultat du cours.

On rappelle que si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $détP \neq 0, P^{-1} = \frac{1}{détP}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exercice 16

Consigne

Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & -12 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique.

1. Déterminer une base de $kerf$ et une base de Imf.

2. Montrer que f est un projecteur.

3. Déterminer E_1 et E_2 tels que f soit une projection sur E_1 parallèlement à E_2.

4. Soit B_1 et B_2 des bases respectives de E_1 et E_2. Donner la matrice de f dans $B_1 \cup B_2$.

Exercice 17

Consigne

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ admettant une base orthonormée $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ (bien sûr $r \leq n$). Montrer que si Z est la projection orthogonale de V sur F alors $||Z||^2 = \sum_{j=1}^{r} < V, u_i >^2$.

Indication : Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ contenant B_1 et une base orthonormée B_2 de $F^{\perp}$.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 3, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).