Somme de sous-espaces vectoriels – Produit scalaire - Projections

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices corrigés

Attention : ceci est la version corrigée des exercices.

Exercice 1

Consigne

Soit F_1 le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2,1,0)$ $v_2 = (-1,0,1)$ et $w = (4,1,-2)$.

1) Déterminer une base et la dimension de F_1. Ecrire la forme générale d'un vecteur de F_1.

2) Soit $F_2 = \{(0, a + b, -b),\ a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F_2 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera la dimension et une base.

3) Donner une base et la dimension de $F_1 \cap F_2$ et $F_1 + F_2$. La somme $F_1 + F_2$ est-elle directe ?

Correction

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Les vecteurs v_1, v_2 et w sont donc liés et $dimF_1 \leq 2$.

$\{v_1, v_2\}$ est un système libre de deux vecteurs de F_1, c'est une base de F_1 et $dimF_1 = 2$.Un vecteur v de F_1 est une combinaison linéaire de v_1 et v_2 et s'écrit $\alpha v_1 + \beta v_2$, et β réels quelconques. Donc $v = (2\alpha - \beta, \alpha, \beta)$, et

$$v = (x, y, z) \in F \Leftrightarrow x = 2y - z$$

On peut aussi écrire que $v = (x, y, z) \in F_1$ si et seulement si $dét(v_1, v_2, v) = 0$, soit $\begin{vmatrix} 2 & -1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$, soit $x - 2\,y + z = 0$.

2) Si $v = (0, a+b, -b) \in F_2, v = a(0,1,0) + b(0,1,-1)$. F_2 est donc l'ensemble des combinaisons linéaire de $u_1 = (0,1,0)$ et $u_2 = (0,1,-1)$, c'est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et $\{u_1, u_2\}$ en est un système générateur. D'autre part u_1 et u_2 sont indépendants (car non proportionnels), ils forment donc une base de F_2 et $dimF_2 = 2$.

Remarque : En fait $\{v = (x, y, z) \in F_2\} \Leftrightarrow \{x = 0\}$.

3) $\{v = (x, y, z) \in F_1 \cap F_2\} \Leftrightarrow \{x = 2y - z$ et $x = 0\}$.

$\{v = (x, y, z) \in F_1 \cap F_2\} \Leftrightarrow \{x = 0$ et $z = 2\,y\}$.

$\{v = (x, y, z) \in F_1 \cap F_2\} \Leftrightarrow \{v = (0, y, 2y) = y(0,1,2)\}$.

$F_1 \cap F_2$ est donc le sous-espace vectoriel engendré par $u_3 = (0,1,2)$ et $dimF_1 \cap F_2 = 1$.

$\{v \in F_1 + F_2\} \Leftrightarrow \{v = V_1 + V_2, V_1 \in F_1, V_2 \in F_2\}$.

Puisque $\{v_1, v_2\}$ est une base de F_1 et $\{u_1, u_2\}$ une base de F_2, $v = (av_1 + bv_2) + (cu_1 + du_2)$ et $\{v_1, v_2, u_1, u_2\}$ est un système générateur de $F_1 + F_2$. Ce système de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est évidemment lié. Par contre $\{v_1, v_2, u_1\}$ est libre (on vérifie en effet que $dét(v_1, v_2, u_1) \neq 0$), c'est donc une base de $F_1 + F_2$ et $dim(F_1 + F_2) = 3$. On en déduit donc que $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$ (le seul sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 est $\mathbb{R}^3$). La somme $F_1 + F_2$ n'est pas directe car $F_1 \cap F_2 \neq \{(0,0,0)\}$ (on a aussi $dim(F_1 + F_2) \neq dimF_1 + dimF_2$).

Exercice 2

Consigne

Soit F_1 et F_2 les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ engendrés respectivement par les familles $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{v_1, v_2\}$ où :

$u_1 = (1,0,4,2), u_2 = (1,2,3,1)$ et $u_3 = (1,-2,5,3)$

$v_1 = (4,2,0,1)$ et $v_2 = (1,4,2,1)$

1) Déterminer la dimension et une base des espaces F_1 et F_2.

2) Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Correction

1) On remarque que $2u_1 - u_2 = u_3, \{u_1, u_2, u_3\}$ est donc lié. u_1 et u_2 sont indépendants (non proportionnels) et forment donc une base de F_1 et $dimF_1 = 2$.

D'autre part $\{v_1, v_2\}$ est libre (les vecteurs ne sont pas proportionnels), c'est donc une base de F_2 et $dimF_2 = 2$.

2) F_1 est engendré par $\{u_1, u_2\}$ et F_2 est engendré par $\{v_1, v_2\}, F_1 + F_2$ est donc engendré par $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$.

Or $dét(u_1, u_2, v_1, v_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -16 & -2 \\ 0 & -1 & -7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & -16 & -2 \\ -1 & -7 & -1 \end{vmatrix}$, et $dét(u_1, u_2, v_1, v_2) = -30 \neq 0. \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ est un système libre de $\mathbb{R}^4$, c'est une base de $\mathbb{R}^4$ et puisque c'est un système générateur de $F_1 + F_2, dim(F_1 + F_2) = 4$ et $F_1 + F_2 = R^4$. $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ est une base de $F_1 + F_2$ donc pour tout vecteurs v de $F_1 + F_2 = R^4$, il existe a, b, c et d, uniques tels que $v = au_1 + bu_2 + cv_1 + dv_2$. $au_1 + bu_2 = V_1 \in F_1$ et $cv_1 + dv_2 = V_2 \in F_2$, sont uniques. La décomposition $v = V_1 + V_2$ de v est donc unique et la somme est directe : $F_1 \oplus F_2$.

Exercice 3

Consigne

Déterminer l'application linéaire qui projette R^3 dans le plan engendré par $V_1 = (-1,0,1)$ et $V_2 = (0,1,0)$ parallèlement à $Y = (1,0,1)$.

Correction

Soit p l'application linéaire cherchée. Remarquons d'abord que $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. $\mathcal{B} = \{V_1, V_2, Y\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Si $F_1 = \langle V_1, V_2 >$ et $F_2 = \langle Y >, F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^3$ et la projection p sur F_1 parallèlement à F_2 est bien définie.

Si $v = (x, y, z) = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma Y$ et $p(v) = \alpha V_1 + \beta V_2$.

Calculons α et β, les deux premières coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$.

$\{v = (x, y, z) = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma Y\} \Leftrightarrow \{v = (x, y, z) = (-\alpha + \gamma, \beta, \alpha + \gamma)\}$. D'où $\begin{cases} x = -\alpha + \gamma \\ y = \beta \\ z = \alpha + \gamma \end{cases}$ et $\alpha = \frac{-x+z}{2}$ et $\beta = y$. Donc $p(x, y, z) = \alpha V_1 + \beta V_2 = \frac{-x+z}{2}(-1,0,1) + y(0,1,0) = \left(\frac{x-z}{2}, y, \frac{-x+z}{2}\right)$.

Exercice 4

Consigne

Déterminer le produit scalaire de V_1 et V_2 ainsi que $||V_1||$ et $||V_2||$ dans les cas suivants :

1) $V_1 = \left(-1, \sqrt{3}, 1, -2\right)$ et $V_2 = \left(1,2,3,\sqrt{3}\right)$

2) $V_1 = (1, -2, -1)$ et $V_2 = \left(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

Correction

1) $V_1 \cdot V_2 = -1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{3} = 2.$

$||V_1|| = \sqrt{1+3+1+4} = 3.$

$||V_2|| = \sqrt{1+4+9+3} = \sqrt{17}.$

2) $V_1 \cdot V_2 = 1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2}.$

$||V_1|| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}.$

$||V_2|| = \sqrt{1+2+2} = \sqrt{5}.$

Exercice 5

Consigne

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $v_1 = (1, -1, 1)$ et $v_2 = (-1, 0, 1)$.

1) Démontrer que ces vecteurs sont orthogonaux. Sont-ils dépendants ?

2) Déterminer un vecteur v_3 tel que $\{v_1, v_2, v_3\}$ soit une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ puis exprimer $w = (1,0,0)$ dans cette base.

Correction

1) $v_1 \cdot v_2 = -1 + 1 = 0$. v_1 et v_2 sont orthogonaux et non nuls, ils sont donc indépendants d'après le cours.

2) $v_3 = (x, y, z)$ convient si et seulement si c'est un vecteur à la fois orthogonal à v_1 et v_2.

Donc $\begin{cases} v_1 \cdot v_3 = 0 \\ v_2 \cdot v_3 = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} y = 2x \\ z = x \end{cases}$ et $v_3 = (1,2,1)$ convient.

Première méthode

Si $w = (1,0,0) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$, $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ est la matrice des coordonnées de w dans $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

On a $(1,0,0) = (\alpha - \beta + \gamma, -\alpha + 2\gamma, \alpha + \beta + \gamma)$, soit $\begin{cases} 1 = \alpha - \beta + \gamma \\ 0 = -\alpha + 2\gamma \\ 0 = \alpha + \beta + \gamma \end{cases}$, et $\begin{cases} \alpha = 2\gamma \\ 3\gamma - \beta = 1 \\ \beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$.

D'où $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = -\frac{1}{2}, \gamma = \frac{1}{6}$ et les coordonnées de w dans $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/2 \\ 1/6 \end{pmatrix}$.

Deuxième méthode

Si $w = (1,0,0) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$

$w \cdot v_1 = \alpha||v_1||^2$ car la base est orthogonale et que $v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot v_3 = 0$. Donc $\alpha = \frac{w \cdot v_1}{||v_1||^2} = \frac{1}{3}$.

De même $w \cdot v_2 = \beta||v_2||^2$ et $\beta = \frac{w \cdot v_2}{||v_2||^2} = -\frac{1}{2}$.

Et $w \cdot v_3 = \gamma||v_3||^2$ et $\gamma = \frac{w \cdot v_3}{||v_3||^2} = \frac{1}{6}$.

Exercice 6

Consigne

Soient $v = (1,0,-1)$ et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à v (c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs orthogonaux à v). Quelle est la dimension de F ? Déterminer F.

Correction

$\langle v \rangle$ et F sont supplémentaires d'après le cours et $dim\langle v \rangle + dimF = dim\mathbb{R}^3$. Donc $dimF = 2$.

$$\{u = (x, y, z) \in F\} \Leftrightarrow \{u \cdot v = 0\}$$

$$\{u = (x, y, z) \in F\} \Leftrightarrow \{x - z = 0\}$$

Donc $F = \{(x, y, z); x = z\}$.

$\{u = (x, y, z) \in F\} \Leftrightarrow \{u = (x, y, x) = x(1,0,1) + y(0,1,0)\}$. $\{(1,0,1), (0,1,0)\}$ est donc un système générateur de F. Ces deux vecteurs sont indépendants (non proportionnels) et forment une base de F.

Exercice 7

Consigne

Soit $v_1 = (1,-1,1,1)$ et $v_2 = (0,1,0,1)$. Montrer que v_1 et v_2 sont orthogonaux et déterminer le sous-espace vectoriel orthogonal au sous espace vectoriel engendré par v_1 et v_2.

Correction

$v_1 \cdot v_2 = 0 - 1 + 0 + 1 = 0$. v_1 et v_2 sont donc bien orthogonaux. Soit $F = \langle v_1, v_2 \rangle$, on cherche donc $F^\perp$.

$\{u = (x, y, z, t) \in F^\perp\} \Leftrightarrow \{u \perp v_1$ et $u \perp v_2\}$.

Soit $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} t = -y \\ z = 2y - x \end{cases}$. Donc

$\{u = (x, y, z, t) \in F^\perp\} \Leftrightarrow \{u = (x, y, 2y - x, -y) = x(1,0,-1,0) + y(0,1,2,-1)\}$

Ainsi $F^\perp$ est engendré par $u_1 = (1,0,-1,0)$ et $u_2 = (0,1,2,-1)$. Ces deux vecteurs forment une base de $F^\perp$ puisqu'ils sont de surcroît indépendants, et $dimF^\perp = 2$.

On a aussi l'expression de $F^\perp$ sous les formes :

$F^\perp = \{(x, y, z, t) \in R^4; y + t = 0$ et $x - y + z + t = 0\}$

$F^\perp = \{(x, y, 2y - x, -y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 8

Consigne

Soit $v_1 = \left(1/2, \sqrt{2}/4, 3/4, -1/4\right)$. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ contenant v_1.

Correction

$||v_1||^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{16} + \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = 1$, v_1 est donc bien normé.

De façon évidente $v_2 = (1,0,0,2)$ est orthogonal à v_1, ainsi que $v_3 = \left(0,3,-\sqrt{2},0\right)$. Et bien sûr v_2 est orthogonal à v_3.

Reste à trouver un vecteur v_4 orthogonal à la fois à v_1, v_2 et v_3 puis à normer tous les vecteurs qui ne le sont pas.

$v_4 = (x, y, z, t)$ est orthogonal à v_1, v_2 et v_3 si et seulement si $\begin{cases} v_4.v_1 = 0 \\ v_4.v_2 = 0, \\ v_4.v_3 = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{2}}{4} + \frac{3z}{4} - \frac{t}{4} = 0 \\ x + 2t = 0 \\ 3y - z\sqrt{2} = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2t \\ y = z\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -t + z\frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3z}{4} - \frac{t}{4} = 0 \end{cases}.$$

On obtient alors $\begin{cases} x = -2t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{3}z \\ t = \frac{11}{15}z \end{cases}$ et $v_4 = (-22{,}5\sqrt{2}, 15{,}11)$ convient. Reste à normer v_2, v_3 et v_4.

$$|v_2|^2 = 1 + 4 = 5$$

$$|v_3|^2 = 9 + 2 = 11$$

$|v_4|^2 = 484 + 50 + 225 + 121 = 880 = \left(4\sqrt{55}\right)^2$.

Une base solution (il y en plusieurs possible bien sûr) est

$$\left\{v_1, \frac{v_2}{||v_2||}, \frac{v_3}{||v_3||}, \frac{v_4}{||v_4||}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{5}{5}, 0{,}0, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right), \left(0, \frac{3\sqrt{11}}{11}, \frac{-\sqrt{22}}{11}, 0\right), \left(\frac{-\sqrt{55}}{10}, \frac{\sqrt{110}}{44}, \frac{3\sqrt{55}}{44}, \frac{\sqrt{55}}{20}\right)\right\}.$$

Exercice 9

Consigne

Montrer que $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.

Correction

Il y a deux méthodes possibles ici.

Première méthode

On peut vérifier que les colonnes de M sont normées et orthogonales deux à deux :

Pour la première colonne C_1: $||C_1||^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$,

pour la deuxième colonne C_2: $||C_2||^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$,

pour la troisième colonne C_3: $||C_3||^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$,

$C_1 \cdot C_2 = \frac{1}{9}(4-2-2) = 0$, $C_1 \cdot C_3 = \frac{1}{9}(-2+4-2) = 0$, $C_2 \cdot C_3 = \frac{1}{9}(-2-2+4) = 0$. M est bien orthogonale.

Deuxième méthode

On peut faire le produit ${}^tMM$ et vérifier que l'on obtient bien la matrice identité, cela voudra alors dire que ${}^tM = M^{-1}$ et d'après le cours cela équivaut bien à M orthogonale.

${}^tMM = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. D'où le résultat.

Exercice 10

Consigne

Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x - 2y + z = 0\}$.

1) Donner une base de F.

2) Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à F.

3) Déterminer la projection orthogonale p sur F (c'est à dire la projection sur F parallèlement au sous espace orthogonal à F) sans utiliser le dernier résultat du cours (on demande d'exprimer $p(v) = p(x,y,z)$ en fonction des coordonnées x, y et z d'un vecteur v quelconque de $\mathbb{R}^3$).

4) Donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, sans utiliser le dernier résultat du cours.

5) Soit $v = (-1,0,-1)$. Trouver le vecteur w de F qui approxime le mieux v, au sens où $||v - w||$ est minimale.

Correction

(a) $\{v = (x,y,z) \in F\} \Leftrightarrow \{v = (x, y, 2y - x) = x(1,0,-1) + y(0,1,2)\}$.

Ainsi $e_1 = (1,0,-1)$ et $e_2 = (0,1,2)$ forment un système générateur de F. De plus ces vecteurs sont indépendants (non proportionnels), ils forment donc une base de F et F est de dimension 2.

(b) $\{v = (x,y,z) \in F^\perp\} \Leftrightarrow \{v \perp e_1$ et $v \perp e_2\}$,

$\{v = (x,y,z) \in F^\perp\} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$, donc $v = (z, -2z, z) = z(1,-2,1)$.

Ainsi $F^\perp$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $e_3 = (1,-2,1)$ et $F^\perp$ est de dimension 1.

(c) On sait que $F \oplus F^{\perp} = \mathbb{R}^3$ et que pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$, la décomposition $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in F$ et $v_2 \in F^{\perp}$ est unique. Alors si p est la projection orthogonale sur $F, p(v) = v_1$.

Or $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2\}$ est une base de $F, \mathcal{B}_2 = \{e_3\}$ est une base de $F^{\perp}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et tout vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de façon unique de la forme :

$v = (x, y, z) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$ et nécessairement $p(v) = v_1 = \alpha e_1 + \beta e_2$. Pour déterminer p il suffit donc de calculer α et β en fonction de x, y et z.

Or $\{v = (x, y, z) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3\} \Leftrightarrow \{(x, y, z) = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,2) + \gamma(1,-2,1)\}$, soit $\begin{cases} x = \alpha + \gamma \\ y = \beta - 2\gamma \\ z = -\alpha + 2\beta + \gamma \end{cases}$, d'où $\begin{cases} 3\beta = x + y + z \\ 2\alpha + \beta = 2x + y \end{cases}$, $\alpha = \frac{1}{6}(5x + 2y - z)$ et $\beta = \frac{1}{3}(x + y + z)$

On en déduit alors que $p(x, y, z) = \frac{1}{6}(5x + 2y - z)e_1 + \frac{1}{3}(x + y + z)e_2 = \left(\frac{5x+2y-z}{6}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{-x+2y+5z}{6}\right)$

(d) On déduit de la question précédente que si P est la matrice de p dans la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(e) D'après le cours $w = p(v)$, donc $w = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Exercice 11

Consigne

1) Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ orthogonal à F tel que :

$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x = y - t \; et \; z = y + 2t\}$

2) Déterminer la projection orthogonale sur F correspondante sans utiliser le dernier résultat du cours.

3) Soit $v = (1,2,-1,3)$. Trouver le vecteur w de F qui approxime le mieux v, au sens où $||v - w||$ est minimale.

Correction

(a) Déterminons d'abord une base de F :

$\{v = (x, y, z, t) \in F\} \Leftrightarrow \{v = (y - t, y, y + 2t, t) = y(1,1,1,0) + t(-1,0,2,1)\}$.

Ainsi $e_1 = (1,1,1,0)$ et $e_2 = (-1,0,2,1)$ forment un système générateur de F. De plus ces vecteurs sont indépendants (non proportionnels), ils forment donc une base de F et F est de dimension 2.

$\{v = (x,y,z) \in F^\perp\} \Leftrightarrow \{v \perp e_1$ et $v \perp e_2\}$,

$\{v = (x,y,z,t) \in F^\perp\} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+2z+t=0 \end{cases}$, donc $v = (x,-x-z,z,x-2z) = x(1,-1,0,1) + z(0,-1,1,-2)$.

Ainsi $F^\perp$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $e_3 = (1,-1,0,1)$ et $e_4 = (0,-1,1,-2)$, $F^\perp$ est de dimension 2.

(b) On sait que $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^4$ et que pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^4$, la décomposition $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in F$ et $v_2 \in F^\perp$ est unique. Alors si p est la projection orthogonale sur F, $p(v) = v_1$.

Or $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2\}$ est une base de F, $\mathcal{B}_2 = \{e_3, e_4\}$ est une base de $F^\perp$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et tout vecteur $v = (x,y,z,t)$ de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique de la forme :

$v = (x,y,z,t) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4$ $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$ et nécessairement $p(v) = v_1 = \alpha e_1 + \beta e_2$. Pour déterminer p il suffit donc de calculer α et β en fonction de x, y, z et t.

Or $\{v = (x,y,z,t) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4\} \Leftrightarrow \{(x,y,z,t) = \alpha(1,1,1,0) + \beta(-1,0,2,1) + \gamma(1,-1,0,1) + \delta(0,-1,1,-2)\}$ soit $\begin{cases} x = \alpha - \beta + \gamma \\ y = \alpha - \gamma - \delta \\ z = \alpha + 2\beta + \delta \\ t = \beta + \gamma - 2\delta \end{cases}$, d'où $\begin{cases} \gamma = x - \alpha + \beta \\ \delta = z - \alpha - 2\beta \\ 3\alpha + \beta = x + y + z \\ \alpha + 6\beta = -x + 2z + t \end{cases}$ et $\alpha = \frac{1}{17}(7x + 6y + 4z - t)$ et $\beta = \frac{1}{17}(-4x - y + 5z + 3t)$.

On en déduit alors que $p(x,y,z,t) = \frac{1}{17}(7x + 6y + 4z - t)e_1 + \frac{1}{17}(-4x - y + 5z + 3t)e_2$

$$p(x,y,z,t) = \left(\frac{11x + 7y - z - 4t}{17}, \frac{7x + 6y + 4z - t}{17}\frac{-x + 4y + 14z + 5t}{17}, \frac{-4x - y + 5z + 3t}{17}\right)$$

(c) D'après le cours $w = p(v)$, donc $w = \left(\frac{14}{17}, -\frac{12}{17}, \frac{8}{17}, \frac{1}{17}\right)$.

Exercice 12

Consigne

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique.

Soit $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Déterminer le vecteur w de $F = \langle e \rangle$ qui approxime le mieux X, au sens où $||X - w||$ est minimale.

Correction

Notons p la projection orthogonale sur F, d'après le cours, $w = p(X)$ (ici on note aussi $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, de même on notera $e = (1,1,\dots,1)\big)$.

Si $X = V_1 + V_2$ avec $V_1 \in F$ et $V_2 \in F^{\perp}, p(X) = V_1$.

Et puisque $F =< e >, V_1 = ke, k \in \mathbb{R}$.

Et si $X = ke + V_2, X.e = k|e|^2$ (en effet $e.V_2 = 0$ puisque $V_2 \in< e >^{\perp}$).

Or $X.e = x_1 + x_2 + \cdots x_n$ et $|e|^2 = n$. Donc $k = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \bar{X}$. Et $w = p(X) = \bar{X}e = (\bar{X}, \bar{X}, \dots, \bar{X})$

Exercice 13

Consigne

Soit F_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$\{(x, y, z, t); 2x + y = z$ et $z + t = 0\}$.

1) Donner une base de F_1 puis sa dimension.

2) Soit $F_2 = \langle (1,1,0,0), (0,1,1,0) \rangle$. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

3) Soit $p(x, y, z, t) = \left(\frac{x-y+z}{3}, \frac{-2x+2y-2z-3t}{3}, -t, t\right)$. Montrer que p est un projecteur.

Montrer que p est la projection sur F_1 parallèlement à F_2.

(On n'utilisera pas le dernier résultat du cours).

Correction

(a) $\{v = (x, y, z) \in F_1\} \Leftrightarrow \{v = (x, y, 2x + y, -2x - y) = x(1,0,2,-2) + y(0,1,1,-1)\}$. F_1 est donc engendré par $v_1 = (1,0,2,-2)$ et $v_2 = (0,1,1,-1)$. Ces deux vecteurs étant libres (non proportionnels) forment une base de F_1 et $dimF_1 = 2$.

(b) Notons $v_3 = (1,1,0,0)$ et $v_4 = (0,1,1,0)$. $det(v_1, v_2, v_3, v_4) = -3 \neq 0$. Donc $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^4$, il existe α, β, γ, et δ, uniques tels que $v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4$. Or $V_1 = \alpha v_1 + \beta v_2 \in F_1$ et $V_2 = \gamma v_3 + \delta v_4 \in F_2$.

Cette décomposition est unique, d'où $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^4$

Remarque : On peut aussi vérifier que $F_1 \cap F_2 = \{(0,0,0,0)\}$ mais c'est long.

(c) $p \circ p(x, y, z, t) = p\big(p(x, y, z, t)\big) = p\left(\frac{1}{3}(x - y + z), -\frac{2}{3}(x - y + z) - t, -t, t\right)$,

$$p \circ p(x, y, z, t) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(x - y + z) + \frac{2}{3}(x - y + z) + t - t,\right.$$

$$\left.-\frac{2}{3}(x - y + z) - \frac{4}{3}(x - y + z) - 2t + 2t - 3t, -3t, 3t\right),$$

$p \circ p(x, y, z, t) = p(x, y, z, t)$, et p est bien un projecteur.

D'après le cours p est une projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à ker p et $\mathrm{I}mp \oplus kerp = \mathbb{R}^4$. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{I}mp = F_1$ et $kerp = F_2$.

$p(v_1) = p(1,0,2,-2) = (1,0,2,-2) = v_1$ donc $v_1 \in \mathrm{I}mp$

$p(v_2) = p(0,1,1,-1) = (0,1,1,-1) = v_2$ donc $v_2 \in \mathrm{I}mp$

$p(v_3) = p(1,1,0,0) = (0,0,0,0)$ donc $v_3 \in kerp$

$p(v_4) = p(0,1,1,0) = (0,0,0,0)$ donc $v_4 \in kerp$

On en déduit donc que $F_1 \subset \mathrm{I}mp$ et $F_2 \subset kerp$. Or $dimF_1 = dimF_2 = 2$ et les inclusions ne peuvent pas être strictes sinon on aurait $dim\mathrm{I}mp + dimkerp > 4$ et c'est incompatible avec $\mathrm{I}mp \oplus kerp = \mathbb{R}^4$.

On a bien $\mathrm{I}mp = F_1$ et $kerp = F_2$.

Exercice 14

Consigne

Soient $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (1,-1,-1,1), u_3 = (1,-1,1,-1)$ et $u_4 = (1,1,-1,-1)$.

1) a) Montrer que $b = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^4$.

b) Calculer la norme de chacun des vecteurs de b et en déduire que A est orthogonale.

c) Calculer A^{-1}.

2) Soit E_1 le sous-espace vectoriel engendré par $(2,1,0,1)$ et $(1,0,1,0)$ (E_1 est en fait le sous-espace propre de A relatif à la valeur propre 1) et E_2 le sous-espace vectoriel engendré par $(1,2,-1,0)$ et $(0,-1,0,1)$ (E_2 est le sous-espace propre de A relatif à la valeur propre -1). E_1 et E_2 sont-ils orthogonaux ?

Expliciter, dans une base que l'on précisera et que l'on choisira la plus simple possible, la projection de p sur E_1 parallèlement à E_2 (on demande $p(v)$ en fonction des coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de v (vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$) dans la base choisie et la matrice de p dans cette base sans utiliser le dernier résultat du cours).

Correction

1) (a) $u_1 \cdot u_2 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$ donc $u_1 \perp u_2$

$u_1 \cdot u_3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$ donc $u_1 \perp u_3$

$u_1 \cdot u_4 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$ donc $u_1 \perp u_4$

$u_2 \cdot u_3 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$ donc $u_2 \perp u_3$

$u_2 \cdot u_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$ donc $u_2 \perp u_4$

$u_3 \cdot u_4 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$ donc $u_3 \perp u_4$.

b contient 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$, non nuls et deux à deux orthogonaux (c'est un système libre d'après le cours), c'est bien une base orthogonale.

(b) $|u_1| = \sqrt{4} = 2 = |u_2| = |u_3| = |u_4|$.

Les vecteurs colonnes de A sont donc normés et deux à deux ortogonaux, A est donc orthogonale.

(c) Puisque A est orthogonale, $A^{-1} = ^t A = A$, car A est symétrique.

2) Notons $v_1 = (2,1,0,1)$ et $v_2 = (1,0,1,0)$ les deux vecteurs qui engendrent E_1, ils sont libres (non proportionnels) et forment une base de E_1, $dimE_1 = 2$.

Notons $v_3 = (1,-2,-1,0)$ et $v_4 = (0,-1,0,1)$ les deux vecteurs qui engendrent E_2, ils sont libres (non proportionnels) et forment une base de E_2, $dimE_2 = 2$.

$v_1 \cdot v_3 = 2 - 2 = 0$ et $v_1 \cdot v_4 = -1 + 1 = 0$. Donc v_1 est orthogonal à E_2.

$v_2 \cdot v_3 = 1 - 1 = 0$ et $v_2 \cdot v_4 = 0$. Donc v_2 est orthogonal à E_2.

D'après le cours $E_1 \perp E_2$.

Ici le plus simple est de travailler dans la base $c = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Si v a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ dans c, $p(v) = p(xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4) = xp(v_1) + yp(v_2) + zp(v_3) + tp(v_4) = xv_1 + yv_2$ et la matrice de p dans la base c est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 15

Consigne

Reprendre les exercices 10, 11 et 14 et déterminer les matrices des projections dans la base canonique en utilisant le dernier résultat du cours.

On rappelle que si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $détP \neq 0, P^{-1} = \frac{1}{détP}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Correction

(a) Si on reprend l'exercice 10, F a pour base $(1,0,-1)$ et $((0,1,2)$, avec les notations du cours, dans la base canonique $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, ^t X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $et ^t XX = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. D'après la formule donnée : $^t XX^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Et si P est la matrice de p dans la base canonique :

$$P = X({}^tXX)^{-1}({}^tX) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Si on reprend l'exercice $11, F$ a pour base $(1,1,1,0)$ et $((-1,0,2,1)$, avec les notations du cours, dans la base canonique $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et ${}^tX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et ${}^tXX = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. D'après la formule donnée : $({}^tXX)^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Et si P est la matrice de p dans la base canonique :

$$P = X({}^tXX)^{-1}({}^tX) = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 11 & 7 & -1 & -4 \\ 7 & 6 & 4 & -1 \\ -1 & 6 & 4 & -1 \\ -4 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Si on reprend l'exercice $14, F$ a pour base $(2,1,0,-1)$ et $((1,0,1,0)$, avec les notations du cours, dans la base canonique $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, {}^tX = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $et {}^tXX = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. D'après la formule donnée : ${}^tXX^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Et si P est la matrice de p dans la base canonique :

$$P = X({}^tXX)^{-1}({}^tX) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 16

Consigne

Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & -12 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique.

1. Déterminer une base de $kerf$ et une base de Imf.

2. Montrer que f est un projecteur.

3. Déterminer E_1 et E_2 tels que f soit une projection sur E_1 parallèlement à E_2.

4. Soit B_1 et B_2 des bases respectives de E_1 et E_2. Donner la matrice de f dans $B_1 \cup B_2$.

Correction

1) $\{v = (x, y, z) \in kerf\} \Leftrightarrow \{f(x, y, z) = (0,0,0)\}$

$\{v=(x,y,z) \in kerf\} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-12y-12z=0 \\ y=0 \\ X-6y-3z=0 \end{cases}$. Soit $\begin{cases} x=3z \\ y=0 \end{cases}$ et $\{v=(x,y,z) \in kerf\} \Leftrightarrow \{v=(3z,0,z)= z(3,0,1)\}$.

Donc $kerf = \langle(3,0,1)\rangle$ et $dimkerf = 1$. Notons $u_1 = (3,0,1)$.

Imf est engendré par les vecteurs colonnes de M : $Imf = \langle(4,0,1),(-12,1,-6),(-12,0,-3)\rangle$. Or ces trois derniers vecteurs sont liés car leur déterminant est nul (c'est prévisible car par le théorème des dimensions $dimImf = dim\mathbb{R}^3 - dimkerf = 2$). $u_2 = (4,0,1)$ et $u_3 = (-12,1,-6)$ sont libres (non proportionnels) et forment une base de Imf.

2) f étant une application linéaire, f sera un projecteur dès que $f \circ f = f$.

La matrice de $f \circ f$ dans la base canonique est

$$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & -12 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -12 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -12 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & -3 \end{pmatrix} = M.$$

D'où le résultat.

3) D'après le cours f est une projection sur Imf parallèlement à $kerf$. Donc $E_1 = Imf$ et $E_2 = kerf$.

4) $\mathcal{B}_1 = \{u_1\}, \mathcal{B}_2 = \{u_2, u_3\}$ et $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$.

$f(u_1) = (0,0,0), f(u_2) = u_2$ et $f(u_3) = u_3, f$ a donc pour matrice dans $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 17

Consigne

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ admettant une base orthonormée $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ (bien sûr $r \leq n$). Montrer que si Z est la projection orthogonale de V sur F alors $||Z||^2 = \sum_{j=1}^{r}\langle V, u_i\rangle^2$.

Indication : Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ contenant B_1 et une base orthonormée B_2 de $\mathrm{F}^{\perp}$

Correction

Soit $F^{\perp}$ l'orthogonal de F.

$\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ est une base orthonormée de F, notons $\mathcal{B}_2$ une base orthonormée de $F^\perp$. Puisque $F \oplus F^\perp = R^n, \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_2$ contient $n-r$ vecteurs. Notons $\mathcal{B}_2 = \{u_{r+1}, \dots, u_n\}$.

D'autre part puisque $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont orthonormées et que F et $F^\perp$ sont orthogonaux, $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Soit V un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.

$$V = x_1u_1 + \cdots x_ru_r + x_{r+1}u_{r+1} + \cdots + x_nu_n$$

Or $V_1 = x_1u_1 + \cdots x_ru_r \in F$ et $V_2 = x_{r+1}u_{r+1} + \cdots + x_nu_n \in F^\perp$, donc si Z est la projection orthogonale de V sur $F, Z = V_1 = x_1u_1 + \cdots x_ru_r = \sum_{i=1}^r x_iu_i$. Et $|Z|^2 = \sum_{i=1}^r x_i^2$ (1) puisque $\mathcal{B}_1$ est orthonormée.

Or d'après le cours (propriété 5) $x_i = V\,.u_i$. En effet $V.u_i = (x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_n).u_i$ et puisque $\mathcal{B}$ est une base orthonormée $u_j \cdot u_i = 0$ si $j\ \neq i$ et 1 si $i = j$, donc en utilisant la linéarité du produit scalaire, on obtient bien $V.u_i = x_i$ et (1) s'écrit bien

$$|Z|^2 = \sum_{i=1}^{r} (V \cdot u_i)^2$$

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 3, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).