Déterminants et applications

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices

Exercice 1

Consigne

Calculer les déterminants des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, A + B, AB, A^2, B^2 et (A + B)^2$.

Exercice 2

Consigne

Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 8 \\ 7 & 9 & 2 & 4 \\ 2.37 & 5.19 & 6.52 & 1.84 \end{vmatrix}$.

Exercice 3

Consigne

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$.

Exercice 4

Consigne

Calculer $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ et $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$.

Exercice 5

Consigne

On considère les 3 déterminants définis par $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & a+2 \\ a & 2a+2 \end{vmatrix}$.

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & a+2 & a+4 \\ a & 2a+2 & 3a+6 \\ a & 3a+2 & 6a+8 \end{vmatrix}$ $\Delta_4 = \begin{vmatrix} a & a+2 & a+4 & a+6 \\ a & 2a+2 & 3a+6 & 4a+12 \\ a & 3a+2 & 6a+8 & 10a+20 \\ a & 4a+2 & 10a+10 & 20a+30 \end{vmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Montrer que Δ_4 s'exprime simplement en fonction de Δ_3 et Δ_3 en fonction de Δ_2. En déduire l'expression de Δ_4 en fonction de a.

Exercice 6

Consigne

Calculer le déterminant suivant : $\Delta = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}$.

Exercice 7

Consigne

Calculer le déterminant suivant : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}$.

Exercice 8

Consigne

Calculer le déterminant d'ordre n : $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$.

Exercice 9

Consigne

Calculer le déterminant d'ordre $n+1$: $D_2 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$.

Exercice 10

Consigne

Calculer le déterminant d'ordre n : $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & C_k^1 & C_k^2 & \dots & C_k^{n-1} \\ 1 & C_{k+1}^1 & C_{k+1}^2 & \dots & C_{k+1}^{n-1} \\ 1 & C_{k+2}^1 & C_{k+2}^2 & \dots & C_{k+2}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_{k+n-1}^1 & C_{k+n-1}^2 & \dots & C_{k+n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$. (On rappelle que $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$).

Exercice 11

Consigne

Calculer $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 10 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

Exercice 12

Consigne

Résoudre : $\begin{cases} x + 3y + z = 9 \\ 2x - 6y + z = 11 \\ 4x + 9y - 7z = 38 \end{cases}$.

Exercice 13

Consigne

Résoudre le système (S) suivant les valeurs du réel λ : (S) $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$.

Exercice 14

Consigne

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2\,x + 3\,y - z + t = 13 \\ x + 2\,y + 3\,z + 4\,t = 26 \\ 4\,x - y + 2\,z + 6\,t = 18 \\ -x + 4\,y + 5\,z - 3\,t = 24 \end{cases}$.

Exercice 15

Consigne

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 4x + 5\,y + 6z + 7t = 9 \\ 5x + 6\,y + 7\,z + 4\,t = 11 \\ 6x + 7y + 4\,z + 5\,t = 13 \\ 7x + 4\,y + 5\,z + 6\,t = 11 \end{cases}$.

Exercice 16

Consigne

Soit $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x+1 & 1 & -1 \\ 1-x & 1-x & 1 & -1 \\ 0 & 0 & x-4 & x \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. Montrer sans calculer $D(x)$ que $D(x)$ s'annule pour 3 valeurs de x distinctes. Calculer $D(x)$.

Exercice 17

Consigne

Résoudre : $\begin{cases} 2\,x + y - z = 1 \\ x + m\,y + z = 1 \\ 3\,x + y + m\,z = 2 \end{cases}$ suivant les valeurs du paramètre m.

Exercice 18

Consigne

Résoudre : $\begin{cases} (4-m)x + 7y - z = -1 \\ -3x + (-6-m)y + z = 1 \\ -3x - 4y + (-1-m)z = 1 \end{cases}$ suivant les valeurs du paramètre m.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 3, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).