Déterminants et applications

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices corrigés

Attention : ceci est la version corrigée des exercices.

Exercice 1

Consigne

Calculer les déterminants des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A + B, AB, A^2, B^2 et (A + B)^2$.

Correction

$$dét A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$$

$$dét B = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -20$$

$$dét(A + B) = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 63 = -60$$

$$dét(AB) = dét A \times dét B = 200$$

$$dét(A^2) = (dét A)^2 = 100$$

$$dét(B^2) = (det B)^2 = 400$$

$$dét(A + B)^2 = \left(dét(A + B)\right)^2 = 3600$$

Exercice 2

Consigne

Calculer le déterminant $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 8 \\ 7 & 9 & 2 & 4 \\ 2.37 & 5.19 & 6.52 & 1.84 \end{vmatrix}$.

Correction

On remarque que la dernière ligne est une combinaison linéaire des 3 autres en effet : $L_4 = L_1 + 0.1L_2 + 0.01L_3$. Donc $\Delta = 0$.

Exercice 3

Consigne

Calculer le déterminant $D=\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$.

Correction

$D=\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$. En faisant les transformations suivantes $C_1 \longrightarrow C_1, C_2 \longrightarrow C_2 - C_1, C_3 \longrightarrow C_3 - C_2,\ C_4 \longrightarrow C_4 - C_3$, on obtient $D = a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 & 0 \\ a & b-a & c-b & 0 \\ a & b-a & c-b & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$ (déterminant d'une matrice triangulaire).

Exercice 4

Consigne

Calculer $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ et $D_3=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$.

Correction

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

En faisant les transformations suivantes : $L_1 \longrightarrow L_1, L_2 \longrightarrow L_2 - L_1, L_3 \longrightarrow L_3 - L_1$, on obtient

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2 a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$. Et en développant suivant la première colonne : $D_2 = \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) \\ c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$

$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$. En faisant les transformations suivantes, $L_1 \longrightarrow L_1, L_2 \longrightarrow L_2 - L_1, L_3 \longrightarrow L_3 - L_1, L_4 \longrightarrow L_4 - L_1$, on obtient $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 1 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ 1 & d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix}$. En développant suivant la première colonne et en mettant en facteur $(b-a)$ dans la première ligne, $(c-a)$ dans la deuxième ligne et $(d-a)$ dans la troisième ligne, on obtient $D_3 = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c+a & c^2+ac+a^2 \\ 0 & d+a & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix}$.

En faisant les transformations suivantes, $L_1 \longrightarrow L_1, L_2 \longrightarrow L_2 - L_1, L_3 \longrightarrow L_3 - L_1$, on obtient $D_3 = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c-b & c^2+ac-ab+a^2 \\ 0 & d-b & d^2+ad-ab+a^2 \end{vmatrix}$. En développant suivant la première colonne et en mettant en facteur $(c-b)$ dans la première ligne et $(d-b)$ dans la deuxième ligne, on obtient $D_3 = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & a+b+c \\ 1 & a+b+d \end{vmatrix}$ et $D_3 = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

Exercice 5

Consigne

On considère les 3 déterminants définis par $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & a+2 \\ a & 2a+2 \end{vmatrix}$.

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & a+2 & a+4 \\ a & 2a+2 & 3a+6 \\ a & 3a+2 & 6a+8 \end{vmatrix}$ $\Delta_4 = \begin{vmatrix} a & a+2 & a+4 & a+6 \\ a & 2a+2 & 3a+6 & 4a+12 \\ a & 3a+2 & 6a+8 & 10a+20 \\ a & 4a+2 & 10a+10 & 20a+30 \end{vmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Montrer que Δ_4 s'exprime simplement en fonction de Δ_3 et Δ_3 en fonction de Δ_2. En déduire l'expression de Δ_4 en fonction de a.

Correction

Dans Δ_4, si on fait les transformations suivantes,

$L_4 \longrightarrow L_4 - L_3, L_3 \longrightarrow L_3 - L_2, L_2 \longrightarrow L_2 - L_1, L_1 \longrightarrow L_1$, on obtient $\Delta_4 = \begin{vmatrix} a & a+2 & a+4 & a+6 \\ a & 2a+2 & 3a+6 & 4a+12 \\ a & 3a+2 & 6a+8 & 10a+20 \\ a & 4a+2 & 10a+10 & 20a+30 \end{vmatrix}$.

En développant suivant la première colonne $\Delta_4 = a \begin{vmatrix} a & 2a+2 & 3a+6 \\ a & 3a+2 & 6a+8 \\ a & 4a+2 & 10a+10 \end{vmatrix}$. Si on fait les transformations suivantes, $C_3 \longrightarrow C_3 - C_2, C_2 \longrightarrow C_2 - C_1, C_1 \longrightarrow C_1$, on obtient $\Delta_4 = a \begin{vmatrix} a & a+2 & a+4 \\ a & 2a+2 & 3a+6 \\ a & 3a+2 & 6a+8 \end{vmatrix}$. D'où $\Delta_4 = a\Delta_3$.

Dans Δ_3, si on fait les transformations suivantes, $L_3 - L_2, L_2 \longrightarrow L_2 - L_1, L_1 \longrightarrow L_1$, on obtient $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & a+2 & a+4 \\ 0 & a & 2a+2 \\ 0 & a & 3a+2 \end{vmatrix}$, et en développant suivant la première colonne, on a $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 2a+2 \\ a & 3a+2 \end{vmatrix}$. Si on fait les transformations suivantes, $C_1 \longrightarrow C_1, C_2 \longrightarrow C_2 - C_1$, on obtient $\Delta_3 = a\Delta_2$.

Or $\Delta_2 = a\big((2a+2) - a(a+2)\big) = a^2$. D'où $\Delta_3 = a^3$ et $\Delta_4 = a^4$.

Exercice 6

Consigne

Calculer le déterminant suivant : $\Delta = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}$.

Correction

Si on met a_1 en facteur dans la première ligne, a_2 dans la deuxième, …, a_n dans la dernière ligne, on obtient $\Delta = a_1 a_2 \dots a_n \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{vmatrix}$ (les lignes sont égales).

Exercice 7

Consigne

Calculer le déterminant suivant : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}$.

Correction

Si on fait les transformations suivantes, $L_1 \longrightarrow L_1, L_2 \longrightarrow L_2 - L_1, L_3 \longrightarrow L_3 - L_1, L_4 \longrightarrow L_4 - L_1$, on obtient $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i-1 & -2 & -i-1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2i & 0 & 2i \end{vmatrix}$, et en développant suivant la deuxième colonne, $\Delta = \begin{vmatrix} i-1 & -2 & -i-1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2i & 0 & 2i \end{vmatrix}$. En développant suivant la deuxième colonne, $\Delta = 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2i & 2i \end{vmatrix} = -16i$.

Exercice 8

Consigne

Calculer le déterminant d'ordre n : $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$.

Correction

Si on fait les transformations suivantes, $L_n \longrightarrow L_n - L_{n-1}, L_{n-1} \longrightarrow L_{n-1} - L_{n-2},, L_2 \longrightarrow L_2 - L_1, L_1 \longrightarrow L_1$, on obtient $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & (a_1 - a_2) & (a_2 - a_3) & \dots & (a_{n-1} - a_n) \\ 0 & 0 & (a_1 - a_2) & \dots & (a_{n-2} - a_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (a_1 - a_2) \end{vmatrix}$$=a_1(a_1 - a_2)^{n-1}$ (le déterminant est triangulaire).

Exercice 9

Consigne

Calculer le déterminant d'ordre $n+1$: $D_2 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$.

Correction

En développant D_2 suivant la première colonne, on a

$$D_2 = a_n \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & \dots & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

Si $D_2 = \Delta_n$, le deuxième déterminant de la précédente égalité s'écrit Δ_{n-1}.

Ainsi $D_2 = \Delta_n = a_n x^n + \Delta_{n-1}$. En itérant la dernière relation de récurrence, on obtient $\Delta_{n-1} = a_{n-1}x^{n-1} + \Delta_{n-2}, \dots, \Delta_2 = a_1 x + \Delta_1, \Delta_1 = a_0$.

Donc $D_2 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Exercice 10

Consigne

Calculer le déterminant d'ordre n : $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & C_k^1 & C_k^2 & \dots & C_k^{n-1} \\ 1 & C_{k+1}^1 & C_{k+1}^2 & \dots & C_{k+1}^{n-1} \\ 1 & C_{k+2}^1 & C_{k+2}^2 & \dots & C_{k+2}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_{k+n-1}^1 & C_{k+n-1}^2 & \dots & C_{k+n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$.

(On rappelle que $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$).

Correction

Si on fait les transformations suivantes, $L_n \longrightarrow L_n - L_{n-1}, L_{n-1} \longrightarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \dots, L_2 \longrightarrow L_2 - L_1, L_1 \longrightarrow L_1$, en utilisant la relation $C_n^p - C_{n-1}^p = C_{n-1}^{p-1}$ (donc $C_{k+1}^1 - C_k^1 = C_k^0, C_{k+1}^2 - C_k^2 = C_k^1$,) on obtient

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & C_k^1 & C_k^2 & \dots & C_k^{n-1} \\ 0 & C_k^0 & C_k^1 & \dots & C_k^{n-2} \\ 0 & C_{k+1}^0 & C_{k+1}^1 & \dots & C_{k+1}^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & C_{k+n-2}^0 & C_{k+n-2}^1 & \dots & C_{k+n-2}^{n-2} \end{vmatrix}$. En développant suivant la première colonne et en utilisant C_n^0=1, on a $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & C_k^1 & \dots & C_k^{n-2} \\ 1 & C_{k+1}^1 & \dots & C_{k+1}^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_{k+n-2}^1 & \dots & C_{k+n-2}^{n-2} \end{vmatrix}$. C'est le même déterminant que D_2, mais au rang inférieur $(n \to n-1)$. En itérant on obtient $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & C_k^1 \\ 1 & C_{k+1}^1 \end{vmatrix} = C_k^1 - C_{k+1}^1 = C_k^0 = 1.$

Exercice 11

Consigne

Calculer $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 10 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

Correction

En développant suivant la dernière ligne, $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

En développant le premier déterminant suivant la troisième ligne et le deuxième suivant la dernière :

$D = -4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 6(-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 6(-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. En développant chaque déterminant suivant leur dernière ligne : $D = -4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 12 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 18 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -50.$

Exercice 12

Consigne

Résoudre : $\begin{cases} x + 3y + z = 9 \\ 2x - 6y + z = 11 \\ 4x + 9y - 7z = 38 \end{cases}$.

Correction

Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 4 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 129 \neq 0$. C'est donc un système de Cramer qui admet une unique solution de la forme

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 11 & -6 & 1 \\ 38 & 9 & 7 \end{vmatrix}}{129} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 21 & 11 & 1 \\ 4 & 38 & 7 \end{vmatrix}}{129} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & -6 & 11 \\ 4 & 9 & 38 \end{vmatrix}}{129} b,$$

$$x = \frac{323}{43}, \; y = \frac{79}{129}, \; z = -\frac{15}{43}.$$

Exercice 13

Consigne

Résoudre le système (S) suivant les valeurs du réel λ : (S) $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$.

Correction

$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$. Le déterminant du système est

$$D\lambda = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

- Si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -2$, le système est un système de Cramer qui a une solution unique donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)},$$

$$x = \frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = \frac{1}{\lambda+2} = y = z.$$

- Si $\lambda = 1$, ce n'est plus un système de Cramer et il y a une infinité de solution de la forme $\{((x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 1\}$.
- Si $\lambda = -2$, le système s'écrit $\begin{cases} -2x + y + z = 1 & (1) \\ x - 2y + z = 1 & (2) \\ x + y - 2z = 1 & (3) \end{cases}$. (1)+(2)+(3) donne 0=3 et le système n'a donc pas de solution.

Exercice 14

Consigne

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2\,x + 3\,y - z + t = 13 \\ x + 2\,y + 3\,z + 4\,t = 26 \\ 4\,x - y + 2\,z + 6\,t = 18 \\ -x + 4\,y + 5\,z - 3\,t = 24 \end{cases}$.

Correction

Le déterminant du système est $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -7 & -7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -10 & -10 \\ 0 & 6 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 7 \\ -9 & -10 & -10 \\ 6 & 8 & 1 \end{vmatrix} =$ $-371 \neq 0$. C'est donc un système de Cramer qui a une unique solution de la forme :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 3 & -1 & 1 \\ 26 & 2 & 3 & 4 \\ 18 & -1 & 2 & 6 \\ 24 & 4 & 5 & -3 \end{vmatrix}}{-371} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 13 & -1 & 1 \\ 1 & 26 & 3 & 4 \\ 4 & 18 & 2 & 6 \\ -1 & 24 & 5 & -3 \end{vmatrix}}{-371} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 13 & 1 \\ 1 & 2 & 26 & 4 \\ 4 & -1 & 18 & 6 \\ -1 & 4 & 24 & -3 \end{vmatrix}}{-371}$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \\ 4 & -1 & 2 & 18 \\ -1 & 4 & 5 & 24 \end{vmatrix}}{-371},$$

$$x = 1 \ , \ y = 4 \ , \ z = 3 \ , \ t = 2$$

Exercice 15

Consigne

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 4x + 5\,y + 6z + 7t = 9 \\ 5x + 6\,y + 7\,z + 4\,t = 11 \\ 6x + 7y + 4\,z + 5\,t = 13 \\ 7x + 4\,y + 5\,z + 6\,t = 11 \end{cases}$.

Correction

Ici on observe une permutation circulaire des coefficients et en sommant les 4 équations on obtient : $x + y + z + t = 2$.

D'autre part en soustrayant la quatrième équation de la deuxième, on obtient : $x - y - z + t = 0$.

Soit $\begin{cases}(x+t)+(y+z)=2\\(x+t)-(y+z)=0\end{cases}$ et $x+t=y+z=1$.

Donc $t=1-x$ et $z=1-y$ et le système s'écrit $\begin{cases}t=1-x\\z=1-y\\3x+y=4\\x-y=0\end{cases}$.

D'où les solutions : $x=1=y$ et $z=t=0$.

Exercice 16

Consigne

Soit $D(x)=\begin{vmatrix}1 & x+1 & 1 & -1\\1-x & 1-x & 1 & -1\\0 & 0 & x-4 & x\\0 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix}$. Montrer sans calculer $D(x)$ que $D(x)$ s'annule pour 3 valeurs de x distinctes. Calculer $D(x)$.

Correction

$D(0)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\1 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & -4 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$ (les deux premières lignes sont égales).

$D(1)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & -3 & 1\\0 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$ (les deux premières colonnes sont proportionnelles).

$D(2)=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1 & -1\\-1 & -1 & 1 & -1\\0 & 0 & -2 & 2\\0 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$ (les deux dernières colonnes sont opposées).

En développant $D(x)$ suivant la première colonne, $D(x)=\begin{vmatrix}1-x & 1 & -1\\0 & x-4 & x\\0 & 1 & -1\end{vmatrix}+(x-1)\begin{vmatrix}x+1 & 1 & -1\\0 & x-4 & x\\0 & 1 & -1\end{vmatrix}$.

$D(x)=(1-x)(4-2x)+(x-1)(x+1)(-(x-4)-x)$

$D(x)=(1-x)(4-2x)\big(1-(x+1)\big)=2x(x-1)(x-2)$

(on retrouve que D s'annule en 0, 1 et 2).

Exercice 17

Consigne

Résoudre : $\begin{cases} 2\,x + y - z = 1 \\ x + m\,y + z = 1 \\ 3\,x + y + m\,z = 2 \end{cases}$ suivant les valeurs du paramètre m.

Correction

$(I)\begin{cases} 2\,x + y - z = 1 \\ x + m\,y + z = 1 \\ 3\,x + y + m\,z = 2 \end{cases}$. Le déterminant de (I) est $D_m = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \\ 3+2m & 1 & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & m+1 & 1 \\ 3+2m & m+1 & m \end{vmatrix}$.

$D_m = \begin{vmatrix} 3 & m+1 \\ 3+2m & m+1 \end{vmatrix} = 2m(m+1)$

- Si $m \neq 0$ et $m \neq -1, D_m \neq 0$ et (I) est un système de Cramer qui admet pour unique solution

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix}}{2m(m+1)} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix}}{2m(m+1)} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{2m(m+1)},$$

  $$x = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{2(m+1)} \quad z = \frac{1}{2(m+1)}.$$

- Si $m = 0$, (I) devient $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + z = 1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ z = 1 - x \\ y = 2 - 3x \end{cases}$. Or si $z = 1 - x$ et $y = 2 - 3\,x, 2\,x + y - z = 1$ est vérifiée et (I) s'écrit $\begin{cases} z = 1 - x \\ y = 2 - 3x \end{cases}$. Les solutions sont de la forme $\{(x, 2 - 3x, 1 - x), x \in \mathbb{R}\}$, il y en a une infinité.

- Si $m = -1$, (I) devient $\begin{cases} 2x + y - z = 1 & (1) \\ x - y + z = 1 & (2) \\ 3x + y - z = 2 & (3) \end{cases}$. (3) - (2) donne $x = 1$ et (1) + (2) donne $x = 3 / 2$. C'est impossible et (I) n'a pas de solution.

Exercice 18

Consigne

Résoudre : $\begin{cases} (4 - m)x + 7y - z = -1 \\ -3x + (-6 - m)y + z = 1 \\ -3x - 4y + (-1 - m)z = 1 \end{cases}$ suivant les valeurs du paramètre m.

Correction

Si D_m est le déterminant du système $D_m = \begin{vmatrix} (4-m) & 7 & -1 \\ -3 & (-6-m) & 1 \\ -3 & -4 & (-1-m) \end{vmatrix}$.

$$D_m = -m^3 - m^2 + 4 = -(m-1)(m+2)^2$$

- Si $m \neq 1$ et $m \neq -2, D_m \neq 0$ et le système est un système de Cramer qui admet pour unique solution

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 1 & (-6-m) & 1 \\ 1 & -4 & (-1-m) \end{vmatrix}}{-(m-1)(m+2)^2} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} (4-m) & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & (-1-m) \end{vmatrix}}{-(m-1)(m+2)^2} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} (4-m) & 7 & -1 \\ -3 & (-6-m) & 1 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{-(m-1)(m+2)^2},$$

$$x = \frac{1}{m+2} \quad y = -\frac{1}{m+2} \quad z = -\frac{1}{m+2}.$$

- Si $m = 1$, le système devient $\begin{cases} 3x + 7y - z = -1 \\ -3x - 7y + z = 1 \\ -3x - 4y - 2z = 1 \end{cases}$, soit $\begin{cases} 3x + 7y - z = -1 \\ -3x - 4y - 2z = 1 \end{cases}$. D'où $\begin{cases} y = z \\ x = -3z - \frac{1}{3} \end{cases}$.
  Le système a donc une infinité de solutions de la forme $\left\{\left(-3z - \frac{1}{3}, z, z\right), z \in \mathbb{R}\right\}$.
- Si $m = -2$, le système s'écrit $\begin{cases} 6x + 7y - z = -1 \\ -3x - 4y + z = 1 \\ -3x - 4y + z = 1 \end{cases}$, soit $\begin{cases} 3x + 7y - z = -1 \\ -3x - 4y + z = 1 \end{cases}$. D'où $\begin{cases} x = -y \\ z = 1 + y \end{cases}$. Le système a donc une infinité de solutions de la forme $\{(-y, y, 1 + y), y \in \mathbb{R}\}$.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 3, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).