Déterminants et applications

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Introduction

Objectif de la leçon : On a vu dans le cours de L2 combien il est important de savoir si une matrice est inversible, si des vecteurs sont liés ou non, si un système d'équations linéaires a une solution unique ou pas ...

Aussi il est intéressant d'associer à un système de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n ou ce qui revient au même à une matrice carrée d'ordre n, un nombre qui sera nul si et seulement si ces n vecteurs sont liés ou si et seulement si la matrice de ces vecteurs est de rang différent de n (strictement inférieur à n) ou si et seulement si cette matrice n'est pas inversible.

Ce nombre est le déterminant de ce système ou de la matrice associée relativement à une base donnée.

Dans ce cours a été volontairement omis toute la partie théorique et fastidieuse, on s'attachera cependant à bien connaître les propriétés des déterminants et à savoir les utiliser dans les exercices et les applications.

Déterminant

Dans tout ce chapitre, on considère un espace vectoriel E de dimension n sur un corps K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On peut donc considérer que $E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathbb{C}^n$.

Soit $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canonique de $E = K^n(\mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n)$.

$$\big(e_1 = (1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,\dots,0,1)\big)$$

Définition

On appelle déterminant d'ordre n une application qui à n vecteurs $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ de E fait correspondre un réel noté dét $(V_1, V_2, \dots, V_n)$. Cette application est telle que dét $(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$ et vérifie $dét(V_1, V_2, \dots, V_n) = 0$ si et seulement si $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ est lié.

$dét(V_1, V_2, \dots, V_n)$ est appelé déterminant des vecteurs $V_1, V_2, \dots, V_n$.

On admettra l'existence et l'unicité d'une telle fonction.

D'autre part on notera $dét(V_1, V_2, \dots, V_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & . & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & . & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & . & x_{nn} \end{vmatrix}$, où $\mathrm{x_{ij}}$ désigne la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de V_j dans B.

Les colonnes du déterminant sont donc les matrices colonnes des coordonnées des V_j dans B.

Si A est la matrice (x_{ij}), on notera $dét(A)$ au lieu de $dét(V_1, \dots, V_n)$.

Et puisqu'une matrice carrée est inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes sont indépendants :

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $dét(A) \neq 0$.

Un déterminant a toujours autant de lignes que de colonnes.

On admettra la propriété suivante :

Si ${}^tA$ est la matrice transposée de A (matrice dont les lignes sont les colonnes de A) : $dét({}^tA) = dét(A)$.

On peut donc échanger le rôle des colonnes et celui des lignes. Ce qui explique les parenthèses ci-dessous.

Propriétés

Le déterminant de n vecteurs a les propriétés suivantes :

- Il est linéaire par rapport à chaque colonne (ou chaque ligne).

$$dét(V_1, \dots, \lambda V_i + \mu W_i, \dots, V_n) = \lambda dét(V_1, \dots, V_i, \dots, V_n) + \mu dét(V_1, \dots, W_i, \dots, V_n)$$

- Il change de signe si on échange 2 colonnes (ou 2 lignes).

$$dét(V_1, \dots, V_i, .., V_j, .., V_n) = -dét(V_1, \dots, V_j, \dots, V_i, .., V_n)$$

- Il est inchangé si on ajoute à une colonne (resp. ligne) une combinaison linéaire des autres.

$$dét(V_1, \dots, V_i, \dots, V_n) = dét\left(V_1, \dots, V_i + \sum_{j\neq} \lambda_j V_j, \dots, V_n\right)$$

- Il est nul s'il a une colonne (ou une ligne) nulle ou s'il a 2 colonnes (ou 2 lignes) identiques ou si l'une est une combinaison linéaire des autres.

Exemple : 1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ 20 & 0 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 20 & 0 & 10 & 5 \end{vmatrix}$ (en utilisant la 1ère propriété et en mettant 2 en facteur dans la 4ème colonne).

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ 20 & 0 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 20 & 0 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (en mettant 5 en facteur dans la 4ème ligne).

2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 20 & 0 & 10 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (on a échangé la 1ère et la 2ème colonne).

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 20 & 0 & 10 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ (on a échangé la 1ère et la 4ème ligne).

3) Faire apparaître un maximum de zéros sur une ligne ou une colonne de $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

La seconde colonne contient un 0, il est facile d'en faire apparaître un autre en ajoutant la seconde ligne à la première d'où : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 & 2 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ on peut alors ajouter 2 fois la deuxième ligne à la troisième et on obtient : $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 & 2 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 13 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. On verra plus loin qu'en développant Δ par rapport à la deuxième colonne, on calcule alors aisément Δ.

Calcul d'un déterminant

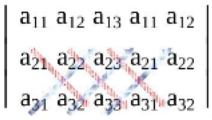
Cas de l'ordre 2

Si $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $dét(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$=$a_{11}a_{22}$-$a_{21}a_{12}$.

Cas de l'ordre 3

Si $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $dét(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ et $dét(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})$.

Ce résultat est donné par la règle dite de Sarrus et peut se retenir à l'aide du schéma suivant :



les produits allant de haut en bas (flèches rouges) étant attribués du signe + et les autres (de bas en haut, flèches bleues) du signe -.

Définitions : 1) Si $A=(a_{ij})$ est une matrice d'ordre n, on appelle mineur de a_{ij} dans A, le déterminant A_{ij} obtenu en considérant celui de A où on a enlevé la ligne et la colonne contenant a_{ij}. A_{ij} est donc un déterminant d'ordre $n-1$.

2) On appelle cofacteur de a_{ij} dans A le nombre C_{ij} tel que : $C_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$.

<u>Exemple</u> : Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, C_{23}=$(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$=$(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$.

D'où $C_{23}=-(-9+6+9)=-6$.

On a alors la propriété suivante très utile pour calculer des déterminants d'ordre supérieur à 3 : Si $A=(a_{ij})$,

$dét(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}C_{ij}$ (Développement suivant la j^{ème} colonne) ou

$dét(\mathrm{A})=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}C_{ij}$ (Développement suivant la i^{ème} ligne)

Exemple : Si on reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ de l'exemple précédent et si on développe suivant la $1^{ère}$ ligne : $dét(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

$$dét(A) = (-18+4) + 2(3-2-9) - 3(-4+6-4) = -24$$

Remarque : Pour faire un tel développement, on choisira une ligne (ou une colonne) qui comprend un maximum de 0 ou on en fera apparaître en ajoutant à une ligne ou à une colonne une combinaison linéaire des autres.

C'est ce qui a été fait dans le premier exemple en 3) et le calcul de $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ s'effectue simplement en utilisant la dernière forme de $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 & 2 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 13 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ et en développant suivant la deuxième colonne : $\Delta = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 1 & 7 & 13 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ on peut utiliser la règle de Sarrus ou faire apparaître un maximum de 0 dans une colonne (ou une ligne) et développer suivant cette colonne (ou ligne). Par exemple si on ajoute l'opposé de la première ligne à la deuxième et -4 fois la première à la troisième, on obtient : $\Delta = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & -2 & 11 \\ 0 & -34 & -5 \end{vmatrix}$=(-1) $\begin{vmatrix} -2 & 11 \\ -34 & -5 \end{vmatrix} = -384$

Cas des matrices triangulaires

C'est un cas où le calcul du déterminant est aisé. En effet on a la propriété suivante

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.

En effet : Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & a_{nn} \end{pmatrix}$, en développant par rapport à la première colonne :

$dét(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & . & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & . & a_{3n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & a_{nn} \end{vmatrix}$ et en itérant et en développant successivement par rapport aux premières colonnes, on obtient : $dét(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \dots a_{nn}$ d'où le résultat.

Ce résultat se généralise au cas des matrices par blocs :

Si $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \mathbf{0} & A_3 \end{pmatrix}$, où les A_1 et A_3 sont des matrices carrées d'ordre n_1 et n_2, où 0 est une matrice nulle à n_1 colonnes et n_2 lignes, et où A_2 a n_2 colonnes et n_1 lignes quelconques.

Alors $dét(A) = dét(A_1).\, dét(A_3)$.

Avez-vous compris ? 3 : Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -3 & -8 \\ -1 & -3 & 8 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez $dét(M)$.

On admettra aussi le résultat suivant : $dét(A \cdot B) = dét(A) \cdot dét(B)$.

Conséquence : Si A est d'ordre n et inversible, $dét(A) \neq 0$ et :

$dét(A) \times dét(\,A^{-1}) = dét(A \cdot A^{-1}) = dét(I_n) = 1$. D'où $dét(A^{-1}) = \frac{1}{dét(A)}$

Application

Résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode de Cramer

Cette méthode ne s'applique qu'aux systèmes de n équations à n inconnues dont le déterminant est non nul.

(Ici les inconnues sont les x_i, les a_{ij} sont donnés et les u_i sont donnés ou jouent le rôle de paramètres.)

Soit (I) $\begin{cases} a_{11}x_1 + . + a_{1n}x_n = u_1 \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ a_{n1}x_1 + . + a_{nn}x_n = u_n \end{cases}$. (I) peut s'écrire : $AX = U$

où A est la matrice (a_{ij}), X la matrice colonne des x_i et U celle des u_i. $dét(A)$ est le déterminant du système. Si $dét(A)$ est non nul A est inversible et (I) a une solution unique de la forme : $X = A^{-1}U$. On dit qu'on a un système de Cramer. A n'est pas toujours simplement inversible, voici une méthode qui permet de calculer X aisément sans inverser A.

Si A_i est la $i^{ème}$ colonne de A :

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n = U$$

Si B_1 est la matrice de A où la première colonne est remplacée par U :

$$B_1 = (UA_2 \ldots A_n) = \big((x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n)A_2 \ldots A_n\big)$$

Donc $dét\,(B_1) = x_1 dét(A_1 A_2 \dots A_n) + x_2 dét(A_2 A_2 \dots A_n) + \cdots + x_n dét(A_n A_2 \dots A_n)$ puisque la fonction déterminante est linéaire par rapport à la première colonne. D'autre part un déterminant ayant deux colonnes identiques étant nul :

$dét(B_1) = x_1 dét(A)$ et si $dét(A) \neq 0$ (A est inversible) : $x_1 = \frac{dét\,(B_1)}{dét\,(A)}$.

De façon identique :

$x_i = \frac{dét(B_i)}{dét(A)}$ où B_i est la matrice A où la ième colonne est remplacée par U.

Cette méthode est bien sûr valable si les matrices sont à coefficients réels ou complexes.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 3, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).