Les nombres complexes

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices

Exercice 1

Consigne

Calculer les expressions suivantes :

1) $(1+i)^4$; 2) $(2-i)(1+i)(1-4i)$; 3) $\frac{1}{1-i}$; 4) $\frac{5-2i}{-1+i}$; 5) $\frac{(2+3i)(-1+i)}{2-3i}+3i$;

6) $\frac{1-4i}{3+2i}+\frac{2+i}{5-i}$; 7) i^2; 8) i^3; 9) i^4; 10) $in^n (n \in \mathbb{N})$.

Exercice 2

Consigne

Résoudre $\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 5+2i \\ -z_1 + z_2 = 1-2i \end{cases}$.

Exercice 3

Consigne

Soit $f(z) = z^3 - 2z^2 - (1-i)z - 2i$. Calculer $f(i), f(1-i)$ et $f(1+i)$.

Exercice 4

Consigne

1) Trouver les nombres complexes z tels que : $|z| = |z - 1|$ (on pourra utiliser le conjugué de z pour exprimer $|z|^2$ et $|z - 1|^2$).

2)Trouver de même les nombres complexes z tels que $|z| = |z + 2i|$.

Exercice 5

Consigne

Déterminer les modules des nombres complexes suivants :

1) $(1 - 2i)$; 2) $\frac{\sqrt{8}-i\sqrt{6}}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{2}}{2(1+2i)}$

Exercice 6

Consigne

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $Z = \frac{z-1-i}{iz+1}$ en fonction de $Re(z)$ et de $Im(z)$. Quels sont les complexes z tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 7

Consigne

1) Calculer $sinx$ sachant que $\cos x = -\frac{1}{3}$ et $x \in [0, \pi]$.

2) Calculer $cosx$ sachant que $\sin x = \frac{1}{5}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Exercice 8

Consigne

Déterminer x tel que :

1) $\cos x = -\frac{1}{2}$ et $\sin x \geq 0$;

2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos x \leq 0$;

3) $\sin x = \frac{1}{2}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Exercice 9

Consigne

Donner les formes algébriques des complexes suivants :

1) $z_1 = 5e^{3i\pi/4}$ 2) $z_2 = \left(\sqrt{3}, \frac{7\pi}{6}\right)$

Exercice 10

Consigne

Déterminer un argument de chacun des nombres complexes de module 1 suivants :

1) i; 2) $-i$; 3) 1; 4) -1; 5) $\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$; 6) $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Exercice 11

Consigne

Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

1) $5i$; 2) -3; 3) $i + \sqrt{3}$; 4) $2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)$; 5) $\sqrt{2}\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)$; 6) $\left(\frac{i}{1-i}\right)^4$;

Exercice 12

Consigne

Donner les formes trigonométriques puis exponentielles des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = -\sqrt{3} + 3i$; 2) $z_2 = 4 - 4i$

Exercice 13

Consigne

a) Mettre z sous forme exponentielle dans les cas suivants :

1) $z = 3\,i$; 2) $z = -8$; 3) $z = (1-i)^5$

b) Déterminer les parties réelles et imaginaires de :

$z_1 = e^{-1+i\pi/6}$; $z_2 = e^{2-i}$; $z_3 = e^{-i\pi/2}$; $z_4 = e^{1+i}e^{-2+i\pi/3}$.

Exercice 14

Consigne

1) Soit $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer que $j^2 = \bar{j}$, et calculer $1 + j + j^2$.

Exercice 15

Consigne

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $2z^2 - 6z + 34 = 0$; 2) $z^2 - 2z + 4 = 0$ (on donnera les racines sous forme trigonométrique)

Exercice 16

Consigne

Résoudre $z^4 - z^2 - 2 = 0$.

Exercice 17

Consigne

Soit $P(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12;$

Montrer que $1 + i$ est racine de $P(x)$. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}$.

Exercice 18

Consigne

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = -1 \\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2u_n + 5n - 1 \end{cases}$.

Exercice 19

Consigne

Déterminer u telle que : $4u_{n+2} + 2\sqrt{3}u_{n+1} + u_n = 19\left(\sqrt{3}\right)^n$.

Quel est le comportement de u_n quand n tend vers l'infini ?

Quelles sont les conditions initiales qui suppriment les termes en cosinus et sinus ?

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 3, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).