Les nombres complexes

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices corrigés

Attention : ceci est la version corrigée des exercices.

Exercice 1

Consigne

Calculer les expressions suivantes :

1) $(1+i)^4$; 2) $(2-i)(1+i)(1-4i)$; 3) $\frac{1}{1-i}$; 4) $\frac{5-2i}{-1+i}$; 5) $\frac{(2+3i)(-1+i)}{2-3i}+3i$;

6) $\frac{1-4i}{3+2i}+\frac{2+i}{5-i}$; 7) i^2; 8) i^3; 9) i^4; 10) $in^n (n \in \mathbb{N})$.

Correction

1) $(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (2i)^2 = -4$

2) $(2-i)(1+i)(1-4i) = (3+i)(1-4i) = 7-11i$

3) $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}+\frac{i}{2}$

4) $\frac{5-2i}{-1+i} = \frac{(5-2i)(-1-i)}{2} = -\frac{7}{2}+\frac{3i}{2}$

5) $\frac{(2+3i)(-1+i)}{2-3i}+3i = \frac{(2+3i)^2(-1+i)}{13}+3i = \frac{(-5+12i)(-1+i)}{13}+3i = \frac{(2+3i)(-3i)}{2-3i}+3i = \frac{-7-17i}{13}+3i = -\frac{7}{13}+\frac{22i}{13}$

6) $\frac{1-4i}{3+2i}+\frac{2+i}{5-i} = \frac{(1-4i)(3-2i)}{13}+\frac{(2+i)(5+i)}{26} = \frac{-5-14i}{13}+\frac{9+7i}{26} = -\frac{1}{26}-\frac{21i}{26}$

7) $i^2 = -1$

8) $i^3 = -i$

9) $i^4 = 1$

10) Si $n = 4k (k \in \mathbb{N}) i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1$

Si $n = 4k + 1 (k \in \mathbb{N}) i^n = i^{4k+1} = i^{4k} i = i$

Si $n = 4k + 2 (k \in \mathbb{N}) i^n = i^{4k+2} = i^{4k} i^2 = -1$

Si $n = 4k + 3 (k \in \mathbb{N}) i^n = i^{4k+3} = i^{4k} i^3 = -i$

Exercice 2

Consigne

Résoudre $\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 5 + 2i \\ -z_1 + z_2 = 1 - 2i \end{cases}$.

Correction

$$\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 5 + 2i & (1) \\ -z_1 + z_2 = 1 - 2i & (2) \end{cases}$$

(1) - (2) donne $4z_1 = 4 + 4i$, d'où $z_1 = 1 + i$.

Et (2) donne alors $z_2 = 1 - 2i + (1 + i) = 2 - i$.

Exercice 3

Consigne

Soit $f(z) = z^3 - 2z^2 - (1 - i)z - 2i$. Calculer $f(i), f(1 - i)$ et $f(1 + i)$.

Correction

$f(i) = i^3 - 2i^3 - (1 - i)i - 2i = -1 - 2i$.

$f(1 - i) = (1 - i)^3 - 2i(1 - i)^2 - (1 - i)^2 - 2i$

$f(1 - i) = (-2i)(1 - i) - 2i(-2i) - (-2i) - 2i = -6 - 2i$

$f(1 + i) = (1 + i)^3 - 2i(1 + i)^2 - (1 - i)(1 + i) - 2i = 2i(1 + i) - 2i(2i) - 2 - 2i = 0$

Exercice 4

Consigne

1) Trouver les nombres complexes z tels que : $|z| = |z-1|$ (on pourra utiliser le conjugué de z pour exprimer $|z|^2$ et $|z-1|^2$).

2)Trouver de même les nombres complexes z tels que $|z| = |z+2i|$.

Correction

1) $|z| = |z-1| \Leftrightarrow |z^2| = |z-1|^2$ car ces nombres sont positifs. $|z|^2 = z\bar{z}$ et $|z-1|^2 = (z-1)\overline{(z-1)} = z\bar{z} - z - \bar{z} + 1$.

Donc $|z| = |z-1| \Leftrightarrow z\bar{z} = z\bar{z} - z - \bar{z} + 1$, soit $z + \bar{z} = 1$ ou $2\mathrm{R}e(z) = 1$. D'où $|z| = |z-1| \Leftrightarrow \mathrm{R}e(z) = 1/2$

2) $|z| = |z+2i| \Leftrightarrow |z|^2 = |z+2i|^2$. $|z|^2 = z\bar{z}$ et $|z+2i|^2 = (z+2i)(\bar{z}-2i) = z\bar{z} - 2i(z-\bar{z}) + 4$.

Donc $|z| = |z+2i| \Leftrightarrow z\bar{z} = z\bar{z} - 2i(z-\bar{z}) + 4$. Soit $z - \bar{z} = -2i$. Or $z - \bar{z} = 2i\mathrm{I}m(z)$.

Donc $|z| = |z+2i| \Leftrightarrow \mathrm{I}m(z) = -1$

Exercice 5

Consigne

Déterminer les modules des nombres complexes suivants :

1) $(1-2i)$; 2) $\frac{\sqrt{8}-i\sqrt{6}}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{2}}{2(1+2i)}$

Correction

1) $|1-2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

2) $\left|\frac{\sqrt{8}-i\sqrt{6}}{4}\right| = \frac{|\sqrt{8}-i\sqrt{6}|}{|4|} = \frac{\sqrt{8+6}}{4} = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

3) $\left|\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{2}}{2(1+2i)}\right| = \frac{|\sqrt{5}-i\sqrt{2}|}{|2||1+2i|} = \frac{\sqrt{5+2}}{2\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{35}}{10}$.

Exercice 6

Consigne

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $Z = \frac{z-1-i}{iz+1}$ en fonction de $Re(z)$ et de $Im(z)$.

Quels sont les complexes z tels que Z soit imaginaire pur.

Correction

Posons $z = x + i\,y$

$$Z = \frac{(x-1)+i(y-1)}{(1-y)+ix} = \frac{[(x-1)+i(y-1)][(1-y)-ix]}{(1-y)^2+x^2}$$

D'où

$$\mathrm{Re}(Z) = \frac{(x-1)(1-y)+x(y-1)}{(1-y)^2+x^2} = \frac{y-1}{(1-y)^2+x^2},$$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{-x(x-1)+(y-1)(1-y)}{(1-y)^2+x^2} = \frac{x(1-x)+(y-1)^2}{(1-y)^2+x^2}$$

Z est un imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(Z) = 0$, soit $y = 1$ et $z = x + i(x \in \mathbb{R})$.

Exercice 7

Consigne

1) Calculer $sinx$ sachant que $\cos x = -\frac{1}{3}$ et $x \in [0, \pi]$.

2) Calculer $cosx$ sachant que $\sin x = \frac{1}{5}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Correction

1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\sin^2 x = 8/9$.

$x \in [0, \pi]$ donc $\sin x \geq 0$ et $\sin x = \sqrt{8}/3$.

2) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \frac{24}{25}$.

Or $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ donc $\cos x \leq 0$ et $\cos x = -\frac{\sqrt{24}}{5} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Exercice 8

Consigne

Déterminer x tel que :

1) $\cos x = -\frac{1}{2}$ et $\sin x \geq 0$;

2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos x \leq 0$;

3) $\sin x = \frac{1}{2}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Correction

1) Si $\cos x = -1/2, x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi(k \in \mathbb{Z})$. $\mathrm{Sin}\, x \geq 0$ donc $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi(k \in \mathbb{Z})$.

2) Si $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = -\frac{\pi}{4} + 2k$ ou $-\frac{3\pi}{4} + 2k$. $\mathrm{Cos}\, x \leq 0$ donc $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k$.

3)Si $\sin x = 1/2, x = \frac{\pi}{6} + 2k$ ou $\frac{5\pi}{6} + 2k$.

Or $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc $x = \frac{5\pi}{6}$.

Exercice 9

Consigne

Donner les formes algébriques des complexes suivants :

1) $z_1 = 5e^{3i\pi/4}$ 2) $z_2 = \left(\sqrt{3}, \frac{7\pi}{6}\right)$

Correction

1) $z_1 = 5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$

(En effet $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$).

2) $z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

(En effet $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$)

Exercice 10

Consigne

Déterminer un argument de chacun des nombres complexes de module 1 suivants :

1) i; 2) $-i$; 3) 1; 4) -1; 5) $\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$; 6) $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Correction

1) $\arg(i)=\frac{\pi}{2}$,

2) $\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$,

3)$\arg(1)=0$,

4) $\arg(-1)=\pi$,

5) $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta=\frac{3\pi}{4}$ convient, $\arg\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$,

6) $\begin{cases} cos\theta_1=\frac{1}{2} \\ sin\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ a pour solution $\theta_1=\frac{\pi}{3}$ et $\begin{cases} cos\theta_2=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta_2=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ a pour solution $\theta_2=\frac{\pi}{4}$, donc

$$\arg\left[\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\theta_1+\theta_2$$

$\arg\left[\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$.

Exercice 11

Consigne

Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

1) $5i$; 2) -3; 3) $i+\sqrt{3}$; 4) $2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)$; 5) $\sqrt{2}\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)$;

6) $\left(\frac{i}{1-i}\right)^4$;

Correction

1) $|5i|=5$ et $\arg(5i)=\frac{\pi}{2}$ donc $5i=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

2) $|-3| = 3$ et $\arg(-3) =$, donc $-3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$.

3) $|i+\sqrt{3}| = 2$ et si $\theta = \arg(i+\sqrt{3})$, $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2}\end{cases}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ convient et $i+\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

4) $\left|2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)\right| = 2\sqrt{1+\frac{1}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ et si $\theta = \arg\left(2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)\right)$, $\begin{cases}\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2}\end{cases}$, $\theta = -\frac{\pi}{6}$ convient et $2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

5) $\left|\sqrt{2}\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)\right| = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = 1, \arg\left(\sqrt{2}\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)\right) = \arg(1+i) - \arg(1-i\sqrt{3})$.

Or $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ et si $\theta = \arg(1-i\sqrt{3})$, $\begin{cases}\cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$. $\theta = -\frac{\pi}{3}$ convient et $\arg\left(\sqrt{2}\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$.

$$\sqrt{2}\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right) = \cos\frac{7\pi}{12} + \sin\frac{7\pi}{12}$$

6) $\left|\left(\frac{i}{1-i}\right)^4\right| = \left|\frac{i}{1-i}\right|^4 = \frac{|i|^4}{|1-i|^4} = \frac{1}{(\sqrt{2})^4} = \frac{1}{4}$.

$\arg\left(\frac{i}{1-i}\right)^4 = 4\arg\left(\frac{i}{1-i}\right) = 4(\arg i - \arg(1-i)) = 4\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3$ ou π.

$$\left(\frac{i}{1-i}\right)^4 = \frac{1}{4}(\cos\pi + \sin\pi)$$

Exercice 12

Consigne

Donner les formes trigonométriques puis exponentielles des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = -\sqrt{3} + 3i$; 2) $z_2 = 4 - 4i$

Correction

1) $|z_1| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ et si $\theta = \arg z_1$, $\begin{cases}\cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$. $\theta = \frac{2\pi}{3}$ convient et $z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

2) $|z_2| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ et si $\theta = \arg z_2$, $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, $\theta = -\frac{\pi}{4}$. convient et $z_2 = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 13

Consigne

a) Mettre z sous forme exponentielle dans les cas suivants :

1)$z = 3\,i$; 2) $z = -8$; 3) $z = (1-i)^5$

b) Déterminer les parties réelles et imaginaires de :

$z_1 = e^{-1+i\pi/6}$; $z_2 = e^{2-i}$; $z_3 = e^{-i\pi/2}$; $z_4 = e^{1+i}e^{-2+i\pi/3}$.

Correction

(a) 1) $3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ car $|3i| = 3$ et $\arg(3i) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$.

2) $-8 = 8e^{i\pi}$ car $|-8| = 8$ et $\arg(-8) = \pi$

3) $(1-i)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5 e^{-5i\frac{\pi}{4}}$ car $|(1-i)^5| = |1-i|^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5$ et $\arg(1-i)^5 = 5\arg(1-i) = 5\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

(b) $z_1 = e^{-1}e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, d'où : $Re(z_1) = e^{-1}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2e}$ et $Im(z_1) = e^{-1}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2e}$.

$z_2 = e^2e^{-i} = e^2(\cos(-1) + i\sin(-1))$, d'où : $Re(z_2) = e^2\cos(-1)$ et $Im(z_2) = e^2\sin(-1)$.

$z_3 = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$, d'où : $Re(z_3) = 0$ et $Im(z_3) = -1$.

$z_4 = e^{1+i}e^{-2+i\frac{\pi}{3}} = e^{-1+i\left(1+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{-1}e^{i\left(1+\frac{\pi}{3}\right)}$, d'où : $Re(z_4) = e^{-1}\cos\left(1+\frac{\pi}{3}\right)$ et $Im(z_4) = e^{-1}\sin\left(1+\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 14

Consigne

1) Soit $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer que $j^2 = \bar{j}$, et calculer $1 + j + j^2$.

Correction

$j^2 = e^{4i\pi/3} = i^{-2i\pi/3} = \bar{j}$ (en effet $\frac{4\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$ représentent le même angle).

$j + \bar{j} = 2\mathrm{Re}(j) = 2\cos(2\pi/3) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$. Donc $1 + j + j^2 = 0$.

Exercice 15

Consigne

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $2z^2 - 6z + 34 = 0$; 2) $z^2 - 2z + 4 = 0$ (on donnera les racines sous forme trigonométrique)

Correction

1) $2z^2 - 6z + 34 = 0 (1)$.

$\Delta = -236 = \left(i2\sqrt{59}\right)^2$ et les solution de (1) sont : $z_1 = \frac{6-2\sqrt{59}i}{4} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{59}}{2}i$ et $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{59}}{2}i$.

2) $z^2 - 2z + 4 = 0$ (2). $\Delta = -4$, donc (2) a deux racines complexes conjuguées de module ρ et d'argument θ et $-\theta$ tels que $\begin{cases} \rho^2 = 4 \text{ et } \rho \geq 0 \\ 2\rho\cos\theta = 2 \end{cases}$. Donc $\rho = 2$ et $\cos\theta = \frac{1}{2}$. $\theta = \frac{\pi}{3}$ convient.

L'une des racines de (2) a pour module 2 et pour argument $\frac{\pi}{3}\left(2e^{i\pi/3}\right)$, l'autre a même module et pour argument $-\frac{\pi}{3}\left(2e^{-i\pi/3}\right)$.

Exercice 16

Consigne

Résoudre $z^4 - z^2 - 2 = 0$.

Correction

$z^4 - z^2 - 2 = 0$ (1). Posons $Z = z^2$, alors Z vérifie : $\begin{cases} Z = z^2 \\ Z^2 - Z - 2 = 0 \end{cases}$.

$Z = -1$ est racine évidente de (2), le produit des racines de (2) est -2 , la deuxième racine est donc 2. Donc (1) équivaut à $\begin{cases} Z = z^2 \\ Z = -1 \text{ ou } Z = 2 \end{cases}$, soit $\begin{cases} z^2 = -1 \text{ ou} \\ z^2 = 2 \end{cases}$. Or $z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \pm i$

D'où les quatre solutions de (1) : $\{i, -i, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

Exercice 17

Consigne

Soit $P(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12$;

Montrer que $1 + i$ est racine de $P(x)$. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}$.

Correction

$P(1 + i) = (1 + i)^4 - (1 + i)^3 - 6(1 + i)^2 + 14(1 + i) - 12$

$(1 + i)^2 = 2i$

$(1 + i)^3 = 2i(1 + i) = -2 + 2i$

$(1 + i)^4 = (2i)^2 = -4$. D'où $P(1 + i) = -4 — 2 + 2i - 6(2i) + 14(1 + i) - 12$

$P(1 + i) = (-4 + 2 + 14 - 12) + i(-2 - 12 + 14) = 0$.

P est à coefficients réels et $1 + i$ est racine de P, donc $\overline{1 + i} = 1 - i$ est aussi racine de P et on peut factoriser P par $\big(x - (1 + i)\big)\big(x - (1 - i)\big) = x^2 - 2x + 2$.

Pour factoriser P dans $\mathbb{R}$, on peut poser la division ou utiliser la méthode des coefficients indéterminés. On obtient alors le résultat :

$P(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + x - 6)$

Or $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$. Donc $P(x) = (x^2 - 2x + 2)(x - 2)(x + 3)$.

Exercice 18

Consigne

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = -1 \\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2u_n + 5n - 1 \end{cases}$.

Correction

$u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2u_n + 5n - 1$ (1).

D'après le cours de L2, $u_n = v_n + u_n^*$, où v_n est solution de l'équation homogène $v_{n+2} + 2v_{n+1} + 2v_n = 0 (2)$ et u_n^* est une solution particulière de (1).

Résolution de (2)

L'équation caractéristique associée à (2) est : $r^2 + 2r + 2 = 0$ (3).

$\Delta = -4 < 0$, donc (3) a deux racines complexes conjuguées r_1 et $\overline{r_1}$. Si ρ et θ sont les module et argument de r_1, on a $\begin{cases} \rho^2 = 2 \\ 2\rho\cos\theta = -2 \end{cases}$, soit $\begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$. $\theta = \frac{3\pi}{4}$ convient et $r_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ et $\overline{r_1} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$. Les solutions de (2) sont alors de la forme :

$$v_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\lambda\cos\left(n\frac{3\pi}{4}\right) + \mu\sin\left(n\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

λ et μ sont des constantes réelles.

Détermination de u_n^*

On cherche u_n^* sous la forme $u_n^* = an + b$ (même forme que le second membre) et puisque u_n^* vérifie (1) :

$a(n+2) + b = -2(a(n+1) + b) - 2(an + b) + 5n - 1$, soit

$n(a + 2a + 2a - 5) + (2a + b + 2a + 2b + 2b + 1) = 0$.

D'où $a = 1$ et $b = -2$ et $u_n^* = n - 2$.

Donc les solutions de (1) sont de la forme :

$$u_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\lambda\cos\left(n\frac{3\pi}{4}\right) + \mu\sin\left(n\frac{3\pi}{4}\right)\right) + n - 2$$

On détermine λ et μ à l'aide des conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = -1$, c'est à dire $\begin{cases} 1 = \lambda - 2 \\ -1 = \sqrt{2}\left(\lambda\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \mu\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 - 2 \end{cases}$, soit λ = 3 et μ = 3.

$$u_n = 3(\sqrt{2})^n\left(\cos\left(n\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(n\frac{3\pi}{4}\right)\right) + n - 2$$

Exercice 19

Consigne

Déterminer u telle que : $4u_{n+2} + 2\sqrt{3}u_{n+1} + u_n = 19(\sqrt{3})^n$.

Quel est le comportement de u_n quand n tend vers l'infini ?

Quelles sont les conditions initiales qui suppriment les termes en cosinus et sinus ?

Correction

$4u_{n+2} + 2\sqrt{3}u_{n+1} + u_n = 19(\sqrt{3})^n (1)$.

D'après le cours de L2, $u_n = v_n + u_n^*$, où v_n est solution de l'équation homogène $4v_{n+2} + 2\sqrt{3}v_{n+1} + v_n = 0$ (2) et u_n^* est une solution particulière de (1).

Résolution de (2)

L'équation caractéristique associée à (2) est : $4r^2 + 2\sqrt{3}r + 1 = 0$ (3).

$\Delta = -4 < 0$, donc (3) a deux racines complexes conjuguées r_1 et $\overline{r_1}$. Si ρ et θ sont les module et argument de r_1, on a $\begin{cases} \rho^2 = \frac{1}{4} \\ 2\rho\cos\theta = -\frac{2\sqrt{3}}{4} \end{cases}$, soit $\begin{cases} \rho = \frac{1}{2} \\ \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

$\theta = \frac{5\pi}{6}$ convient et $r_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\overline{r_1} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$. Les solutions de (2) sont alors de la forme :

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\lambda\cos\left(n\frac{5\pi}{6}\right) + \mu\sin\left(n\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

λ et μ sont des constantes réelles.

Détermination de u_n^*

On cherche u_n^* sous la forme $u_n^* = C(\sqrt{3})^n$ (même forme que le second membre) et puisque u_n^* vérifie (1) :

$4C(\sqrt{3})^{n+2} + 2\sqrt{3}(\sqrt{3})^{n+1} + C(\sqrt{3})^{n} = 19(\sqrt{3})^{n}$, soit en divisant par $(\sqrt{3})^{n}(\neq 0)$, $12\,C + 6\,C + C = 19$.

D'où $C = 1$ et $u_n^* = (\sqrt{3})^{n}$.

Donc les solutions de (1) sont de la forme

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\lambda \cos\left(n\frac{5\pi}{6}\right) + \mu \sin\left(n\frac{5\pi}{6}\right)\right) + (\sqrt{3})^n$$

λ et μ sont des constantes réelles et $\cos\left(n\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(n\frac{5\pi}{6}\right)$ sont compris entre 1 et -1 . Donc $\lambda \cos\left(n\frac{5\pi}{6}\right) + \mu \sin\left(n\frac{5\pi}{6}\right)$ est borné puisque $\left|\lambda \cos\left(n\frac{5\pi}{6}\right) + \mu \sin\left(n\frac{5\pi}{6}\right)\right| < |\lambda| + |\mu|$

D'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\lambda \cos\left(n\frac{5\pi}{6}\right) + \mu \sin\left(n\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 0$

De plus $\sqrt{3} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{3})^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Les conditions initiales qui suppriment les termes en sinus et cosinus correspondent à $\lambda = \mu = 0$ et $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{3}$.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 3, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).