Les nombres complexes

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Introduction

Objectif de la leçon : Ce cours introduit les nombres complexes le plus simplement possible et dans le but exclusif de pouvoir traiter des questions intervenant dans les chapitres suivants. C'est un outil indispensable pour traiter certains exercices.

Les problèmes économiques n'utilisent que des données réelles mais doivent parfois, pour être traités, utiliser l'intermédiaire des nombres complexes. Les solutions se présentent alors toujours sous forme réelle.

Dans $\mathbb{N}$ l'équation $x + 2 = 0$ n'a pas de solution et on a été ainsi amené à construire un ensemble de nombres plus grand contenant $\mathbb{N}$ et dans lequel cette équation a une solution. On y a défini les mêmes opérations que dans $\mathbb{N}$ et on a veillé à ce qu'elles gardent les mêmes propriétés. On introduit ainsi $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs et on dit qu'on a plongé $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

De même dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2x = 1$ n'a pas de solution et on est amené à plonger $\mathbb{Z}$ dans un nouvel ensemble $\mathbb{Q}$, ensemble des nombres rationnels.

L'équation $x^2 = 2$ n'ayant pas de solution dans $\mathbb{Q}$, on construit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, comprenant les nombres rationnels de $\mathbb{Q}$ et des nombres irrationnels tels que $\sqrt{2}, \pi, e$.

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution. On a ainsi l'idée de plonger $\mathbb{R}$ dans un ensemble plus vaste, qui contient tous les nombres réels et un nombre solution de $x^2 + 1 = 0$, c'est-à-dire dont le carré est -1. Cet ensemble doit en plus posséder une structure algébrique permettant des calculs analogues à ceux qui sont effectués dans $\mathbb{R}$. C'est ainsi qu'on construit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On démontre alors (Théorème de d'Alembert) que tout polynôme non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Et une conséquence importante de ce théorème est que :

Tout polynôme de degré n à coefficients complexes (et à fortiori réels) admet n racines (éventuellement multiples) dans $\mathbb{C}$ et peut s'écrire comme un produit de facteurs du premier degré :

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - z_1)(x - z_2) \ldots (x - z_n)$ (les racines z_i sont dans $\mathbb{C}$ et peuvent ne pas toutes être distinctes).

Ainsi le processus utilisé pour construire successivement $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ s'arrête à l'ensemble $\mathbb{C}$, on ne peut construire un sur-corps de $\mathbb{C}$ (l'addition et la multiplication munissent $\mathbb{R}$ de la structure algébrique d'un corps et $\mathbb{C}$ se présente comme un sur-corps de $\mathbb{R}$ puisque les opérations y conservent leurs propriétés et que $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$).

Définitions et propriétés de $\mathbb{C}$

Définitions

L'introduction a montré l'intérêt de faire intervenir un nombre dont le carré est -1. On note i un tel nombre. On a donc $i^2 = -1$.

On définit alors l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par l'ensemble des nombres de la forme $a + ib$, où a et b sont des réels.

Si $z = a + ib$, a est **la partie réelle** de z, notée $Re(\text{z})$, et b est la partie imaginaire de z, notée $Im(\text{z})$.

Si $b = 0$, z est réel et $\mathbb{C}$ contient bien $\mathbb{R}$. Si $a = 0, z$ est dit imaginaire pur.

Propriétés

- On a déjà vu que : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- $(a + ib = 0) \; \Leftrightarrow (a = 0$ et $b = 0)$. (En effet si $a + ib = 0$ et si $b \neq 0, i = -\frac{a}{b}$ et c'est impossible car i n'est pas réel).

On en déduit donc que : $(a + ib = c + id) \; \Leftrightarrow (a = c$ et $b = d)$.

- **Somme de deux complexes** : $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$. (On somme les parties réelles entre elles et les parties imaginaires entre elles).
- **Produit de deux complexes** : $(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd$ donc $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$. Il est inutile de retenir cette formule par cœur.

Attention : $(a + ib)(c + id) \neq ac + ibd$.

On peut définir des relations d'ordre sur $\mathbb{C}$, mais aucune d'entre elles ne peuvent être compatibles avec les opérations définies sur $\mathbb{C}$.

Etant données les propriétés des opérations sur $\mathbb{R}$, on en déduit les propriétés des opérations valables pour tous les complexes z_1, z_2 et z_3 :

- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (Commutativité de l'addition).
- $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (Associativité de l'addition).
- $Z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$ (0 est élément neutre pour l'addition).
- $(a + ib) + \big(-a + i(-b)\big) = 0$ (Tout nombre complexe a un opposé (l'opposé de $z_1 = a + ib$ est $-z_1 = -a - ib$).
- $z_1z_2 = z_2z_1$ (Commutativité de la multiplication).
- $Z_1(z_2Z_3) = (z_1z_2)z_3$ (Associativité de la multiplication).
- $z_1 = z_1 \cdot 1 = z_1$ (1 est élément neutre pour la multiplication).

Soit $z = a + ib \neq 0$, on cherche $z' = x + iy$ tel que $zz = 1$.

Donc $(a + ib)(x + iy) = 1$ et $(ax - by) + i(ay + bx) = 1$. Soit $\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$.

D'où $x = \frac{a}{a^2+b^2}$ et $y = \frac{-b}{a^2+b^2}$ $(a^2 + b^2 \neq 0$ puisque $z \neq 0)$, z' existe et est unique. Tout complexe non nul a donc un inverse.

Attention : ne pas retenir ces formules, plus loin nous donnerons la méthode d'obtention de l'inverse d'un nombre complexe.

- $Z_1(z_2 + z_3) = z_1 Z_2 + z_1 Z_3$ (Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition).

Toutes ces propriétés permettent d'affirmer que ($\mathbb{C}$, +,×) est un corps commutatif ($\mathbb{R}$, +,×) possède les mêmes propriétés et a la même structure de corps commutatif).

On a dans $\mathbb{C}$ les mêmes propriétés algébriques que dans $\mathbb{R}$.

On pourra donc appliquer à $\mathbb{C}$ les mêmes techniques de calculs et de résolution d'équations que dans $\mathbb{R}$. Par exemple :

- $(z' = 0) \Leftrightarrow (z = 0$ ou $z' = 0)$. En effet si $z \neq 0$ par multiplication par $\frac{1}{z}$, on obtient $z' = 0$.

Nombre complexe conjugué – Module – Représentation graphique

Nombre complexe conjugué

Définition : Si $z = a + ib$ (a et b réels), on appelle conjugué de z et on note $\bar{z}$, le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

Exemple : si $z = 2 - 5i$; $\bar{z} = 2 + 5i$

Propriétés : *Quels que soient les complexes z et z' :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \ ; \ \overline{zz'} = \bar{z}.\bar{z}' \ ; \ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \ ; \ \overline{(\bar{z})} = z$$

Les démonstrations découlent immédiatement de la définition :

par exemple si $z = a + ib$; $\bar{z} = a - ib$ et $\bar{\bar{z}} = a + ib = z)$

*Si $z = a + ib$: $Re(z) = a = \frac{z+\bar{z}}{2}$; $Im(z) = b = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ et $z\bar{z} = a^2 + b^2$

(Là encore les démonstrations sont immédiates :

Par exemple $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2)$

On **remarquera** donc que quelque soit le complexe $z = a + ib$:

$z + \bar{z} \in \mathbb{R}, z - \bar{z}$ est un imaginaire pur et $z\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+$

*(z réel) $\Leftrightarrow$ $(z = \bar{z})$ (en effet $z = \bar{z} \Leftrightarrow b = 0$)

(z est imaginaire pur) $\Leftrightarrow$ $(z = -\bar{z})$ (en effet $\mathrm{z} = -\bar{\mathrm{z}} \Leftrightarrow a = 0$)

Lorsqu'on donne le résultat d'un calcul dans $\mathbb{C}$, on veille à ce que le dénominateur soit réel afin de faire apparaître clairement la partie réelle et la partie imaginaire. Ainsi, pour faire le quotient de deux nombres complexes, on multipliera numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur si celui-ci n'est pas réel.

Remarque : si $z = a + ib, \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2}, \frac{z'}{z} = \frac{z'\bar{z}}{zz} = \frac{z'\bar{z}}{a^2+b^2}$. C'est la méthode à utiliser pour calculer l'inverse d'un nombre complexe (seule la méthode est à retenir, pas les formules).

Module d'un nombre complexe

Définition : Si $z = a + ib$ (a et b réels), on appelle module de z et on note $|z|$, le réel positif ou nul défini par : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ (ainsi $|z| = |-z| = |\bar{z}|$).

Remarque : Si z est réel le module de z est sa valeur absolue. Cela explique la notation utilisée.

Propriétés : $* \ (\mathrm{z} = 0) \Leftrightarrow (|z| = 0)$

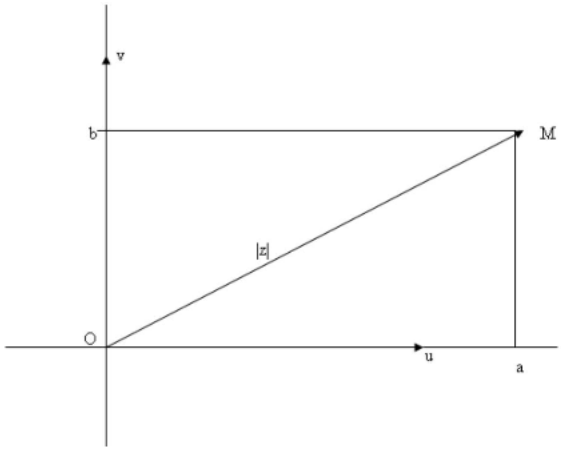
$* \ |zz'| = |z||z'|$ et si $z \neq 0$ $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$

Attention : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

Représentation graphique

On suppose le plan P rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$ et à tout nombre complexe $z = a + ib$, on fait correspondre le point M de P de coordonnées (a, b). On a ainsi défini une bijection de $\mathbb{C}$ dans P (à tout complexe z correspond un et un seul point M et à tout point M correspond un unique complexe z). P est appelé *plan complexe*.

- $M(a, b)$ est **l'image** de $z = a + ib$
- $z = a + ib$ est **l'affixe** de $M(a, b)$
- On note parfois $M(z)$ l'image de z



Propriétés : Si z est le nombre complexe d'image $M, OM = |z|$.

(Pythagore dans le triangle rectangle OMa)

Représentation trigonométrique

On munit le plan complexe P d'une orientation. Le sens positif est celui du cercle trigonométrique (inverse de celui des aiguilles d'une montre).

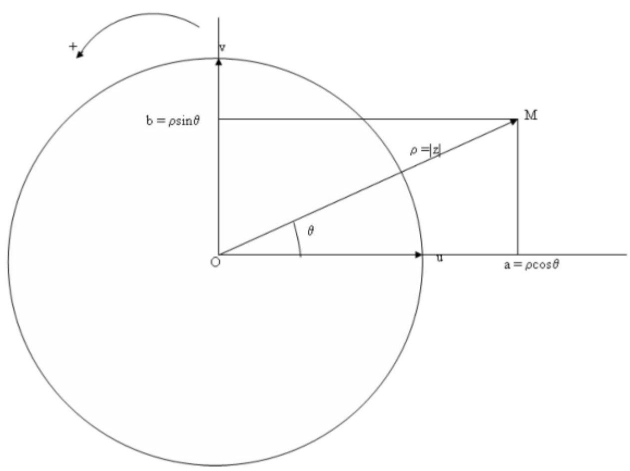
Soit $z = a + ib$, un nombre complexe **non nul** d'image M.

Il lui correspond un unique angle de vecteurs $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. Cet angle a une **infinité** de mesures (en radians) et si θ est l'une d'elles, les autres sont de la forme

$\theta + 2k\pi (k \in Z)$. La mesure principale est celle qui appartient à $]-\pi, \pi]$.

Un **argument** de z est l'une de ces mesures et est noté $arg z$.

Un complexe z est donc parfaitement déterminé dès qu'on en connaît son module ρ et un de ses arguments θ.



M a alors pour coordonnées : $(\rho \cos \theta \, , \rho \sin \theta)$, donc

Si $z = a + ib$, a pour module ρ et pour argument $\theta : z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$.

On dit que z est alors mis sous forme trigonométrique et on a $a = \rho \cos \theta$ et $b = \rho \sin \theta$.

On note aussi $z = (\rho, \theta)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemples : En examinant le plan complexe, on a immédiatement que :

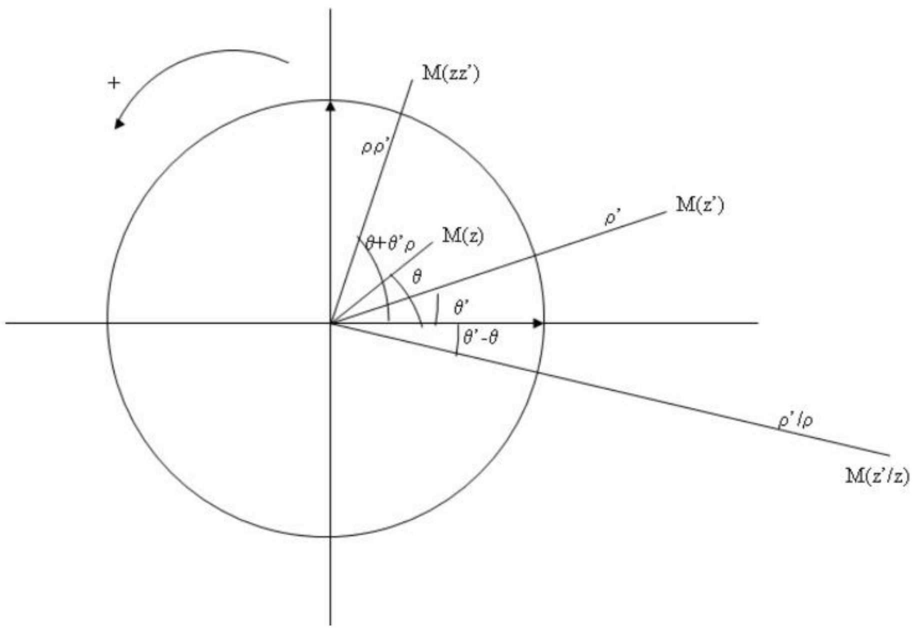
- Tout réel positif a pour argument 0 et pour module lui-même.
- Tout réel négatif a pour argument π et pour module son opposé.
- i a pour argument $\frac{\pi}{2}$ et pour module 1.
- $-i$ a pour argument $\frac{3\pi}{2}$ (ou $-\frac{\pi}{2}$) et pour module 1.

Propriété des arguments :

- 0 n'a pas d'argument.

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls :

- $arg(z') = arg(z) + arg(z')$
- $arg\left(\frac{z'}{z}\right) = arg(z') - arg(z)$



De plus $arg(\overline{z}) = - arg(z)$

(En effet les représentants de z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe (Ox) des réels).

Démonstration : Si $z = \rho(\cos\theta + isin\theta)$ et si $z' = \rho'(\cos\theta' + isin\theta')$,

$z' = \rho\rho'(\cos\theta + \text{isin}\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \rho\rho'\big(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')\big)$.

D'où $zz' = \rho\rho'\big(\cos(\theta+\theta') + isin(\theta+\theta')\big)$ et la première égalité est montrée, la deuxième se montre de façon analogue).

Conséquence : Si $arg(z) = \theta, arg(z^2) = 2\theta, arg(z^3) = 3, arg(z^n) = n$

D'autre part, puisque $|zz'| = |z||z'|, |z^2| = |z|^2$ et en itérant $|z^n| = |z|^n$

D'où $z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + \ isin\ 2\theta), z^3 = \rho^3(\cos 3\theta + \ isin\ 3\theta)$ ...

$$z^n = \rho^n(\cos n\,\theta + isinn\theta)$$

On retiendra donc que pour élever un nombre complexe à une puissance importante, c'est sa forme trigonométrique qu'il faut utiliser.

D'autre part si $\rho = 1, z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ et la formule précédente s'écrit :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\,\theta + isinn\theta$$

C'est la célèbre formule de Moivre.

Passage de la forme algébrique $z = a + ib$ à la forme trigonométrique $z = (\rho, \theta)$

On a déjà vu le passage inverse, en effet $a = \rho\cos\theta$ et $b = \rho\sin\theta$, d'autre part puisque ρ est le module de z.

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2} \text{ et est défini par } \begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Forme exponentielle d'un nombre complexe :

Si z a pour forme trigonométrique (ρ, θ), on utilise une notation commode pour écrire z. En effet, on note : $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et $z = \rho e^{i\theta}$.

On remarquera aussi que si $z = \rho e^{i\theta}, \overline{z} = \rho e^{-i\theta}$.

On démontre que $e^{i\theta}$ possède toutes les propriétés algébriques de l'exponentielle réelle. Et on retrouve par exemple que si $z^{'} = \rho' e^{i\theta^{'}}, zz^{'} = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta^{'})}$ et donc que l'argument d'un produit est la somme des arguments.

Cette notation permet de trouver bien des formules trigonométriques (c.f. exercices mais peuvent être sautés dans le cadre de ce cours).

On a aussi les formules **d'Euler** : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Polynômes à coefficients réels

Propriété fondamentale

Soit le polynôme $P(z) = a_n z^n + \cdots \ldots\ldots + a_1 z + a_0$ les coefficients $a_i (i = 0, \ldots, n)$ étant tous réels.

Proposition : Si z_0 est une racine de P alors $\overline{z}_0$ est encore une racine de P.

Démonstration : z_0 est une racine de P donc $P(z_0) = 0$. Montrons qu'alors $P(\overline{z}_0) = 0$ (cela signifie que $\overline{z_0}$ est une racine de P).

$a_n z_0^n + \cdots \ldots\ldots + a_1 z_0 + a_0 = 0$, en prenant le conjugué de chaque membre et en utilisant les propriétés des conjugués, on obtient

$\overline{a}_n \overline{z_0}^n + \cdots + \overline{a}_1 \overline{z}_0 + \overline{a}_0 = \overline{0} = 0$. Or puisque $a_i \in \mathbb{R}$, on a $\overline{a}_i = a_i$. D'où

$a_n \overline{z_0}^n + \cdots . + a_1 \overline{z}_0 + a_0 = 0$ et $P(\overline{z_0}) = 0$. D'où le résultat.

> **Attention** : Cette proposition est fausse si les coefficients de P ne sont pas réels.

Si $z_0 \in \mathbb{C}$ est une racine de P, P admet une factorisation par $(z - z0)(z - z0)$.

Or $(z - z_0)(z - \overline{z}_0) = z_2 - (z_0 + \overline{z_0})z + z_0\overline{z_0}$ et $z_0 + \overline{z_0} \in \mathbb{R}$ et $z_0\overline{z_0} \in \mathbb{R}+$. C'est une factorisation de P dans $\mathbb{R}$, par un polynôme de degré 2, n'ayant pas de racines réelles.

Cas particulier : $P(z) = az^2 + bz + c$ avec $a \neq 0$

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0, \Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2 . z_0 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\overline{z_0}$ sont les racines de P.

Si $z_0 = \rho(\cos\ \theta + i \sin\ \theta)$ $\quad \overline{z_0} = \rho(\cos\ \theta - i \sin\ \theta) = \rho(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$

(En effet $arg(\overline{z_0}) = -arg(z_0) = -\theta$)

$z_0 + \overline{z_0} = 2\rho\cos\theta = -\frac{b}{a}$ et $z_0\overline{z_0} = \rho^2 = \frac{c}{a}$. ρ et θ sont donc déterminés par $\begin{cases} \rho = \sqrt{\frac{c}{a}} \\ 2\rho\cos\theta = -\frac{b}{a} \end{cases}$

Application aux suites linéaires récurrentes d'ordre 2

En L2 on a étudié les suites linéaires récurrentes d'ordre 2 définies par u_0 et u_1 et une relation de la forme :

$$u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = g(n) \qquad (1)$$

On sait que :

$$u_n = v_n + u_n^*$$

où v_n est solution de l'équation homogène associée:

$$v_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n = 0 \qquad (2)$$

et u_n^* une solution particulière de (1).

D'autre part on a vu que si r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$r^2 + br + c = 0 \qquad (3)$$

$v_n = \lambda r_1 n^n + \mu r_2^n$ est la solution générale de (2).

(λ et μ sont des réels dépendant des conditions initiales u_0 et u_1)

Dans le cours de L2, on a traité le cas où (3) a des racines réelles (distinctes ou non).

Plaçons-nous dans le cas $\Delta < 0$ (donc nécessairement $\mathrm{c} > 0$).

Les racines complexes conjuguées de (3) sont de la forme $r_1 = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ et

$r_2 = \overline{r_1}$.

ρ et θ vérifient $\begin{cases} \rho = \sqrt{c} \\ 2\rho\cos\theta = -b \end{cases}$.

$$r_1^n = \rho^n(\cos n + i\mathrm{sin}n\theta) \text{ et } r_2^n = \rho^n(\cos n\,\theta - i\mathrm{sin}n\theta)$$

Ainsi les solutions complexes de (2) sont :

$$v_n = \lambda' r_1^n + \mu' r_2^n = \rho^n[(\lambda' + \mu')\cos n\,\theta + \mathrm{i}(\lambda' - \mu')sinn\theta] \text{ avec } \lambda' \text{ et } \mu' \text{ complexes.}$$

Il faut récupérer les solutions réelles. Elles correspondent à $\lambda = \lambda' + \mu' \in \mathbb{R}$ et $\mu = i(\lambda' - \mu') \in \mathbb{R}$. Pour cela il suffit de choisir λ' et μ' conjugués. Les solutions cherchées sont donc de la forme :

$$v_n = \rho^n(\lambda\cos\theta\,\theta + \mu sinn\theta)$$

(λ et μ sont des réels dépendant des conditions initiales u_0 et u_1).

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 3, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).