Applications linéaires

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices

Exercice 1

Consigne

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$

1) Montrer que f est linéaire.

2) Déterminer $Kerf$ et Imf.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $f^n = f \circ f \circ f \ldots \circ f$.

Exercice 2

Consigne

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$f(x, y, z) = (x + y, 2x + z, x - z, x + y + z)$.

Cette application est-elle surjective ? Injective ?

Exercice 3

Consigne

Soit f une application linéaire : $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ telle que : $f(1,0,1,0) = (2,4,-1)$

$f(0,1,0,0) = (0,1,2), f(0,0,1,1) = (0,0,-3), f(0,0,0,1) = (2,2,0)$.

1) Montrer que ces relations définissent bien f.

2) f est-elle injective ? surjective ? Déterminer le noyau de f.

3) Donner l'image par f d'un vecteur (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4

Consigne

Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Montrer que $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Exercice 5

Consigne

Soit f une application linéaire de E dans F définie par :

$f(e_1) = v_1, f(e_2) = v_2$ et $f(e_3) = 2v_1 - v_2$ où $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de E et où v_1 et v_2 sont linéairement indépendants dans F.

1) Quel est le rang de f ?

2) f est-elle injective ? Déterminer son noyau.

3) Déterminer l'image par f d'un vecteur quelconque de E, en fonction de v_1 et v_2 et de ses coordonnées dans B.

Exercice 6

Consigne

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que : $f(1{,}3) = (2{,}1)$, $f(0{,}2) = (4{,}2)$ et $f(1{,}1) = (a, b)$.

A quelles conditions sur a et b ces relations définissent-elles une application linéaire ?

Déterminer alors son noyau et son rang. Quelle est l'image de (x, y) par f ?

Exercice 7

Consigne

Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1{,}1{,}0)$ et $(1{,}0{,}1)$.

Déterminer une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont le noyau est V.

Exercice 8

Consigne

Montrer que les applications linéaires suivantes sont des bijections de $\mathbb{R}^3$:

f telle que $f(x, y, z) = (x, y - z, x + z)$ et g telle que $g(x, y, z) = (x + y, -z, y)$.

Déterminer $f \circ g\ (x, y, z)$.

Exercice 9

Consigne

Soit $u : (x, y, z) \mapsto (y + z, 2y, 3y)$.

1) Montrer que u est linéaire.

2) Déterminer $Imu, Im(u^2), Im(u^3), \dots Imu^n, (u^2 = u \circ u, u^3 = u \circ u \circ u \dots)$

Exercice 10

Consigne

Déterminer l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1,0,1) = 1$, $f(0,1,1) = 0$ et $f(1,2,0) = 2$ et déterminer $Kerf$.

Exercice 11

Consigne

Soit $X_1 = (1,2,0)$, $X_2 = (1,3,0)$ et $X_3 = (0,0,1)$ et f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(X_1) = (1,0,-1)$, $f(X_2) = (1,-1,2)$ et $f(X_3) = (2,-1,3)$.

1) Déterminer une base de $f(\mathbb{R}^3)$ et le rang de f.

2) Déterminer le noyau de f et calculer $f(x, y, z)$.

Exercice 12

Consigne

Déterminer les matrices des applications linéaires des exercices 1,2 et 6 dans les bases canoniques des espaces vectoriels qui interviennent.

Exercice 13

Consigne

Soit f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x - 3y, x + y)$.

1) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.

2) Trouver la matrice de f dans les bases B et B' telles que :

$B = \{(1,1,0); (0,-1,0); (0,-1,1)\}$ et $B' = \{(1,1)\,;(0,-1)\}$

Exercice 14

Consigne

Soit f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (x - y, 2y + t, -z)$.

Donner la matrice de f en utilisant les bases suivantes :

$B = \{(1,0,-1,0), (0,1,1,1), (1,0,0,-1), (0,1,1,0)\}$ et $B' = \{(1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1)\}$.

Exercice 15

Consigne

Soit f dont la matrice est $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ dans les bases $B = \{(1,1,0); (0,-1,0); (0,-1,1)\}$ et $B' = \{(1,1) ; (0,-1)\}$, déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 16

Consigne

Soit f telle que $f(x, y) = (x + 2y, x)$. Déterminer deux vecteurs v_1 et v_2 non colinéaires et tels que $f(v_1)$ et $f(v_2)$ soient colinéaires respectivement à v_1 et v_2. Quelle est alors la matrice de f dans la base $\{v_1, v_2\}$?

Exercice 17

Consigne

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer le rang et le noyau de f.

Soit $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,-1)$ et $v_3 = (1,0,-1)$. Calculer $f(v_1), f(v_2)$ et $f(v_3)$. On note $f(S) = \{f(V_1), f(V_2), f(V_3)\}$. Quel est le rang de $f(S)$?

Donner la matrice de f dans $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Exercice 18

Consigne

Soit f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par : $f(x,y,z) = (2x - y, x + 3z)$.

1) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Quels sont le rang et le noyau de f ?

2) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de l'application g dans la base $B = \{v_1 = (1,2),\ v_2 = (0,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Donner la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 19

Consigne

Soit $v_1 = (-1,1,0)$, $v_2 = (1,0,2)$ et $F = \langle v_1, v_2 \rangle$.

1) A quelle condition sur x, y et z, $v = (x, y, z)$ appartient-il à F ?

2) Soit $v_3 = (1,1,-1)$, $v_4 = (1,1,2)$ et $v_5 = (0,1,2)$. Déterminer les rangs des systèmes suivants :

$\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_2, v_5\}$ et $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

3) Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que :

$f(1,0,0) = v_1 \quad f(0,1,0) = v_2 \quad f(0,0,1) = v_5$.

Déterminer $f(x, y, z)$, le rang de f, un système générateur de Imf et le noyau de f.

Références

Comment citer ce cours ?