Applications linéaires

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices corrigés

Attention : ceci est la version corrigée des exercices.

Exercice 1

Consigne

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$

1) Montrer que f est linéaire.

2) Déterminer $Kerf$ et Imf.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $f^n = f \circ f \circ f \dots \circ f$.

Correction

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$

1) Soit $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ, μ sont deux réels quelconques.

$\lambda X_1 + \mu X_2 = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$

$f(\lambda X_1 + \mu X_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$

$f(\lambda X_1 + \mu X_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2 + \lambda z_1 + \mu z_2, \lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2 + \lambda z_1 + \mu z_2, \lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2 + \lambda z_1 + \mu z_2)$

$f(\lambda X_1 + \mu X_2) = (\lambda x_1 + \lambda y_1 + \lambda z_1 + \mu x_2 + \mu y_2 + \mu z_2, \lambda x_1 + \lambda y_1 + \lambda z_1 + \mu x_2 + \mu y_2 + \mu z_2, \lambda x_1 + \lambda y_1 + \lambda z_1 + \mu x_2 + \mu y_2 + \mu z_2)$

$f(\lambda X_1 + \mu X_2) = (\lambda(x_1 + y_1 + z_1) + \mu(x_2 + y_2 + z_2), \lambda(x_1 + y_1 + z_1) + \mu(x_2 + y_2 + z_2), \lambda(x_1 + y_1 + z_1) + \mu(x_2 + y_2 + z_2))$

$f(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda f(X_1) + \mu f(X_2)$ donc f est linéaire.

2) $Kerf = \{(x, y, z)$ tels que $f(x, y, z) = (0,0,0)\}$

$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$. Donc $Kerf = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, déterminons une base de ce sous-espace vectoriel :

$v = (x, y, z) \in Kerf$ si et seulement si $v = (x, y, -x - y) = x(1,0, -1) + y(0,1, -1)$.

$\{(1,0, -1), (0,1, -1)\}$ est donc un système générateur de $Kerf$. D'autre part ce système est libre (les vecteurs ne sont pas proportionnels), c'est donc une base de $Kerf$ et $dim(Kerf) = 2$.

Imf est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $f(e_1), f(e_2)$ et $f(e_3)$. où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$Imf = \langle(1,1,1)\rangle. \{(1,1,1)\}$ est une base de Imf et $dimImf = 1$.

3) $f^2(x, y, z) = fof(x, y, z) = f(f(x, y, z)) = f(x + y + z, x + y + z, x + y + z) = ((x + y + z) + (x + y + z) + (x + y + z), (x + y + z) + (x + y + z) + (x + y + z), (x + y + z) + (x + y + z) + (x + y + z)) = 3(x + y + z, x + y + z, x + y + z)$.

La propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$.

Hypothèse de récurrence : supposons que la propriété est vraie au rang n :

$f^n(x, y, z) = 3^{n-1}(x + y + z, x + y + z, x + y + z)$.

Montrons qu'alors la propriété est vraie au rang $n + 1$, c'est à dire :

$f^{n+1}(x, y, z) = 3^n(x + y + z, x + y + z, x + y + z)$.

$f^{n+1}(x, y, z) = f(f^n(x, y, z)) = f\left(3^{n-1}(x + y + z, x + y + z, x + y + z)\right)$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc $f^{n+1}(x, y, z) = 3^{n-1} f(x + y + z, x + y + z, x + y + z) = 3^{n-1}(3(x + y + z, x + y + z, x + y + z)$

et $f^n(x, y, z) = 3^n(x + y + z, x + y + z, x + y + z)$, d'où le résultat.

Exercice 2

Consigne

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$f(x,y,z) = (x+y, 2x+z, x-z, x+y+z)$.

Cette application est-elle surjective ? Injective ?

Correction

Imf est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $f(e_1), f(e_2)$ et $f(e_3)$ où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Donc $dim(Imf) \leq 3$ et $Imf \neq \mathbb{R}^4$. f n'est donc pas surjective.

$Kerf = \{(x,y,z)$ tel que $f(x,y,z) = (0,0,0,0)\}$

$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+z=0 \\ x-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ De la troisième équation on déduit $x = z$, on remplace dans la deuxième et on trouve $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$. Et finalement $Kerf = \{(0,0,0)\}$ et f est injective.

Exercice 3

Consigne

Soit f une application linéaire : $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ telle que : $f(1,0,1,0) = (2,4,-1)$

$f(0,1,0,0) = (0,1,2), f(0,0,1,1) = (0,0,-3), f(0,0,0,1) = (2,2,0)$.

1) Montrer que ces relations définissent bien f.

2) f est-elle injective ? surjective ? Déterminer le noyau de f.

3) Donner l'image par f d'un vecteur (x,y,z,t) de $\mathbb{R}^4$.

Correction

1) Nous allons nous baser sur la propriété suivante :

Propriété : Une application linéaire f est déterminée dès que l'on connaît l'image d'une base de E par f.

Il suffit de démontrer que les quatre vecteurs $\{(1{,}0{,}1{,}0),(0{,}1{,}0{,}0),(0{,}0{,}1{,}1),(0{,}0{,}0{,}1)\}$ forment une base de $\mathbb{R}^4$.

Supposons donc qu'il existe quatre réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 tels que : $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0$. Soit $\lambda_1(1{,}0{,}1{,}0) + \lambda_2(0{,}1{,}0{,}0) + \lambda_3(0{,}0{,}1{,}1) + \lambda_4(0{,}0{,}0{,}1) = (0{,}0{,}0{,}0)$.

Cette dernière égalité s'écrit :

$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$ Ce système admet la seule solution $(0{,}0{,}0{,}0)$ ce système de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est libre, c'est une base de $\mathbb{R}^4$ et f est bien définie.

2) D'après le théorème des dimensions : $dimkerf + rang(\mathrm{f}) = dimE$

Or $rang(f) = dimImf \leq 3$ car $Imf \subset \mathbb{R}^3$. Donc $dim(kerf) \geq 1$ et f n'est pas injective.

$rang(f) = \text{rang de}\{f(1{,}0{,}1{,}0), f(0{,}1{,}0{,}0), f(0{,}0{,}1{,}1), f(0{,}0{,}0{,}1)\}, rang(f) =$ $\text{rang de}\{(2{,}4,-1),(0{,}1{,}2),(0{,}0,-3),(2{,}2{,}0)\} \leq 3$.

Or $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$.

Donc $rang(f) = 3 = \dim(Imf)$. Imf est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, et $Imf = \mathbb{R}^3$, f est surjective.

Etant donné l'énoncé, il est judicieux de chercher les coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ de (x,y,z,t) dans la base $\{(1{,}0{,}1{,}0),(0{,}1{,}0{,}0),(0{,}0{,}1{,}1),(0{,}0{,}0{,}1)\}$.

Donc $(x,y,z,t) = \alpha(1{,}0{,}1{,}0) + \beta(0{,}1{,}0{,}0) + \gamma(0{,}0{,}1{,}1) + \delta(0{,}0{,}0{,}1)$. D'où le système :

$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha + \gamma \\ t = \gamma + \delta \end{cases}$. Donc $\alpha = x, \beta = y, \gamma = -x + z \; et \; \delta = x - z + t$.

Et $(x,y,z,t) = x(1{,}0{,}1{,}0) + y(0{,}1{,}0{,}0) + (-x+z)(0{,}0{,}1{,}1) + (x-z+t)(0{,}0{,}0{,}1)$

Donc $f(x,y,z,t) = f\big(x(1{,}0{,}1{,}0) + y(0{,}1{,}0{,}0) + (-x+z)(0{,}0{,}1{,}1) + (x-z+t)(0{,}0{,}0{,}1)\big)$,

$f(x,y,z,t) = xf(1{,}0{,}1{,}0) + yf(0{,}1{,}0{,}0) + (-x+z)f(0{,}0{,}1{,}1) + (x-z+t)f(0{,}0{,}0{,}1)$,

$f(x,y,z,t) = x(2{,}4,-1) + y(0{,}1{,}2) + (-x+z)(0{,}0,-3) + (x-z+t)(2{,}2{,}0)$, d'où

$f(x,y,z,t) = (4x - 2z + 2t, 6x + y - 2z + 2t, 2x + 2y - 3z)$.

Exercice 4

Consigne

Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Montrer que $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Correction

Soit X et Y deux éléments de E et λ, μ deux réels quelconques. $g \circ f(\lambda X + \mu Y) = g\big(f(\lambda X + \mu Y)\big) = g\big(\lambda f(X) + \mu f(Y)\big)$ car f est linéaire. De plus, $g\big(\lambda\,(X) + \mu\,(Y)\big) = \lambda\,\big(f(X)\big) + \mu\,\big(f(Y)\big)$ puisque g est linéaire.

Donc $g \circ f(\lambda X + \mu Y) = \lambda gof(X)) + \mu gof(Y)$ et $g \circ f$ est aussi une application linéaire.

Exercice 5

Consigne

Soit f une application linéaire de E dans F définie par :

$f(e_1) = v_1, f(e_2) = v_2$ et $f(e_3) = 2v_1 - v_2$ où $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de E et où v_1 et v_2 sont linéairement indépendants dans F.

1) Quel est le rang de f ?

2) f est-elle injective ? Déterminer son noyau.

3) Déterminer l'image par f d'un vecteur quelconque de E, en fonction de v_1 et v_2 et de ses coordonnées dans B.

Correction

1) Le rang de f est le rang du système $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} = \{v_1, v_2, 2v_1 - v_2\}$.

Le rang de f est évidemment inférieur ou égal à 2 et puisque v_1 et v_2 sont indépendants, ce rang est exactement 2.

2) D'après le théorème des dimensions, $\dim\,(kerf)\; = 3 - 2 = 1$ donc f n'est pas injective.

On remarque ici que $-2f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = 0_F$

Donc $f(-2e_1 + e_2 + e_3) = 0_F$ d'où $kerf = \langle -2e_1 + e_2 + e_3 \rangle$.

3) Soit X de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base B, $X = x_1 + y_2 + e_3$, $f(X) = f(e_1 + y_2 + z_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$ car f est linéaire, donc on obtient $xv_1 + yv_2 + z(2v_1 - v_2) = (x + 2z)v_1 + (y - z)v_2$.

Exercice 6

Consigne

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que : $f(1{,}3) = (2{,}1)$, $f(0{,}2) = (4{,}2)$ et $f(1{,}1) = (a, b)$.

A quelles conditions sur a et b ces relations définissent-elles une application linéaire ?

Déterminer alors son noyau et son rang. Quelle est l'image de (x, y) par f ?

Correction

Notons $e_1 = (1{,}3)$ et $e_2 = (0{,}2)$. $(1{,}1) = (1{,}3) - (0{,}2)\big) = e_1 - e_2$ alors, pour que f soit linéaire il faut que $f(1{,}1) = f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2)$.

Donc, il faut $(a, b) = (2{,}1) - (4{,}2) = (-2, -1)$, soit $a = -2$ et $b = -1$.

Et comme $\{e_1, e_2\}$ est une base B de $\mathbb{R}^2$, si f est linéaire, f est bien définie.

$Kerf = \{X \in \mathbb{R}^2 ; f(X) = (0{,}0)\}$. Soit $\binom{x}{y}$, les coordonnées de X dans B.

$f(X) = (0{,}0)$ si et seulement si $f(x_1e_1 + ye_2) = (0{,}0)$. Soit $xf(e_1) + yf(e_2) = (0{,}0)$ ou $x(2{,}1) + y(4{,}2) = (0{,}0)$. D'où :

$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ soit $x = -2y$. Et $kerf = \langle(-2{,}1)\rangle$ (les coordonnées sont dans B bien sûr).

Donc $\dim(kerf) = 1$ et d'après le théorème des dimensions $rang(f) = dimImf = 2 - 1 = 1$. $(x, y) = x(1{,}0) + y(0{,}1)$ et $f(x, y) = xf(1{,}0) + yf(0{,}1)$. Donc pour calculer $f(x, y)$, il suffit de calculer $f(1{,}0)$ et $f(0{,}1)$.

Pour cela déterminons les coordonnées de $(1{,}0)$ et $(0{,}1)$ dans B.

$(0{,}1) = ae_1 + be_2$ si et seulement si $\begin{cases} 1 = a \\ 0 = 3a + 2b \end{cases}$, soit $a = 1$ et $b = -3 / 2$.

Donc $f(1{,}0) = af(\mathrm{e}_1 + \mathrm{bf}(\mathrm{e}_2) = (2{,}1) - 3/2(4{,}2) = (-4, -2)$.

De même $(0{,}1) = ce_1 + de_2$ si et seulement si $\begin{cases} 0 = c \\ 1 = 3c + 2d \end{cases}$, soit $c = 0$ et $d = 1/2$.

Et $f(0{,}1) = cf(e_1 + df(e_2) = 1/2(4{,}2) = (2{,}1)$. D'où $f(x, y) = x(-4, -2) + y(2{,}1) = (-4x + 2y, -2x + y)$.

Exercice 7

Consigne

Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1,1,0)$ et $(1,0,1)$.

Déterminer une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont le noyau est V.

Correction

f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, elle sera déterminée dès qu'on la connaîtra sur une base de $\mathbb{R}^3$. Or $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\}$ est une base de$\mathbb{R}^3$, en effet $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Si on pose $f(1,1,0) = (0,0), f(1,0,1) = (0,0)$ et $f(0,0,1) = (a,b) \neq (0,0)$. f linéaire ainsi définie convient.

Exercice 8

Consigne

Montrer que les applications linéaires suivantes sont des bijections de $\mathbb{R}^3$:

f telle que $f(x,y,z) = (x, y-z, x+z)$ et g telle que $g(x,y,z) = (x+y, -z, y)$.

Déterminer $f \circ g\ (x,y,z)$.

Correction

Pour montrer que f et g sont des bijections, il suffit de montrer qu'elles sont injectives. On détermine alors $kerf$.

$Kerf = \{X \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(X) = (0,0,0)\}$, soit les solutions du système suivant :

$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$. Ce système admet la seule solution $(0,0,0)$ et f est injective. D'autre part, par le théorème des dimensions $\dim(Imf) = 3 - 0 = 3$. Imf est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, c'est donc $\mathbb{R}^3$ et f est surjective. f est donc bien bijective.

$Kerg = \{X \in \mathbb{R}^3$ tel que $g(X) = (0,0,0)\}$, soit les solutions du système suivant :

$\begin{cases} x+y=0 \\ -z=0 \\ y=0 \end{cases}$ Ce système admet la seule solution $(0,0,0)$ et g est injective. D'autre part, par le théorème des dimensions $\dim(Img) = 3 - 0 = 3$. Img est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, c'est donc $\mathbb{R}^3$ et g est surjective. g est donc bien bijective.

$f \circ g(x,y,z) = f\big(g(x,y,z)\big) = f(x+y,-z,y) = \big((x+y),(-z)-y,(x+y)+y\big)$, $f \circ g(x,y,z) = (x+y,-z-y,x+2y)$.

Exercice 9

Consigne

Soit $u : (x,y,z) \mapsto (y+z,2y,3y)$.

1) Montrer que u est linéaire.

2) Déterminer $Imu, Im(u^2), Im(u^3), \dots Imu^n, (u^2 = u \circ u, u^3 = u \circ u \circ u \dots)$

Correction

Soit $X = (x_1,y_1,z_1)$ et $Y = (x_2,y_2,z_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ, μ sont deux réels quelconques.

$\lambda X + \mu Y = \lambda(x_1,y_1,z_1) + \mu(x_2,y_2,z_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$,

$u(\lambda X + \mu Y) = u(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$,

$u(\lambda X + \mu Y) = \big((\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2), 2(\lambda y_1 + \mu y_2), 3(\lambda y_1 + \mu y_2)\big)$,

$u(\lambda X + \mu Y) = \big(\lambda(y_1 + z_1) + \mu(y_2 + z_2), \lambda(2y_1) + \mu(2y_2), \lambda(3y_1) + \mu(3y_2)\big)$,

$u(\lambda X + \mu Y) = \big(\lambda(y_1 + z_1), \lambda(2y_1), \lambda(3y_1)\big) + \mu(y_2 + z_2), \mu(2y_2), \mu(3y_2)\big)$,

$u(\lambda X + \mu Y) = \lambda(y_1 + z_1, 2y_1, 3y_1) + \mu(y_2 + z_2, 2y_2, 3y_2)$,

$u(\lambda X + \mu Y) = \lambda u(X) + \mu u(Y)$.

Donc u est linéaire.

Imu est engendré par l'image de la base canonique. $u(1,0,0) = (0,0,0), u(0,1,0) = (1,2,3)$ et $u(0,0,1) = (1,0,0)$.

D'où $Imu = \langle (1,2,3), (1,0,0) \rangle$.

$u^2(1,0,0) = u(0,0,0) = (0,0,0), u^2(0,1,0) = u(1,2,3) = (5,4,6)$,

$u^2(0{,}0{,}1) = u(1{,}0{,}0) = (0{,}0{,}0)$.

D'où $Imu^2 = \langle(5{,}4{,}6)\rangle$.

De même $u^3(1{,}0{,}0) = u^2(0{,}0{,}0) = (0{,}0{,}0), u^3(0{,}1{,}0) = u^2(1{,}2{,}3) = u(5{,}4{,}6) = (10{,}8{,}12)$, $\mathrm{u}^3(0{,}0{,}1) = \mathrm{u}^2(1{,}0{,}0) = (0{,}0{,}0)$ et $Imu^3 = \langle(10{,}8{,}12)\rangle = \langle(5{,}4{,}6)\rangle = \mathrm{Imu}^2$.

On en déduit en itérant que si $n \geq 2$, $u^n(1{,}0{,}0) = u^n(0{,}0{,}1) = (0{,}0{,}0)$. Et on peut aisément montrer par récurrence que $u^n(0{,}1{,}0) = 2^{n-2}(5{,}4{,}6)$. Donc $Imu^n = \langle(5{,}4{,}6)\rangle \geq Imu^2$.

Exercice 10

Consigne

Déterminer l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1{,}0{,}1) = 1$, $f(0{,}1{,}1) = 0$ et $f(1{,}2{,}0) = 2$ et déterminer $Kerf$.

Correction

Posons $e_1 = (1{,}0{,}1), e_2 = (0{,}1{,}1)$ et $e_3 = (1{,}2{,}0)$. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Donc $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et f est bien définie d'après le cours. Si X a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans B, $X = xe_1 + ye_2 + ze_3$ et $f(X) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = x + 2z$.

D'autre part $X \in Kerf$ si et seulement si $f(X) = 0$, soit $x + 2\,z = 0$. Et X a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Kerf = \langle u, v\rangle$, où u et v ont respectivement $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour coordonnées dans B. Ces deux vecteurs étant indépendants (non proportionnels), ils forment une base de $Kerf$ et $\dim(Kerf) = 2$.

Exercice 11

Consigne

Soit $X_1 = (1,2,0)$, $X_2 = (1,3,0)$ et $X_3 = (0,0,1)$ et f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(X_1) = (1,0,-1)$, $f(X_2) = (1,-1,2)$ et $f(X_3) = (2,-1,3)$.

1) Déterminer une base de $f(\mathbb{R}^3)$ et le rang de f.

2) Déterminer le noyau de f et calculer $f(x,y,z)$.

Correction

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3-2=1 \neq 0$, donc $B = \{X_1, X_2, X_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et f est bien définie.

$f(\mathbb{R}^3) = \langle f(X_1), f(X_2), f(X_3)\rangle = \langle (1,0,-1), (1,-1,2), (2,-1,3)\rangle$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3+1-(2-2) = -2 \neq 0$. Donc $\dim(Imf) = 3$ et puisque Imf est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$.

2) D'après le théorème des dimensions $\dim(Kerf) = 0$

$Kerf\ = \{(0,0,0)\}$, f est bijective.

Si $X = (x,y,z)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans $B, X = aX_1 + \mathrm{b}\mathrm{X}_2 + \mathrm{c}\mathrm{X}_3$ et $f(X) = f(x,y,z) = af(X_1) + bf(X_2) + cf(X_3) = a(1,0,-1) + b(1,-1,2) + c(2,-1,3)$. Il suffit donc de calculer les coordonnées de X dans B. On a $f(x,y,z) = a(1,2,0) + b(1,3,0) + c(0,0,1)$, soit $\begin{cases} x = a+b \\ y = 2a+3b \\ z = c \end{cases}$ ou $\begin{cases} 3x-y = a \\ y-2x = b \\ z = c \end{cases}$ et $X = (x,y,z)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3x-y \\ y-2x \\ z \end{pmatrix}$ dans B.

Donc $f(x,y,z) = (3x-y)(1,0,-1) + (y-2x)(1,-1,2) + z(2,-1,3)$,

$f(x,y,z) = (x+2z, 2x-y-z, -7x+3y+3z)$.

Exercice 12

Consigne

Déterminer les matrices des applications linéaires des exercices 1,2 et 6 dans les bases canoniques des espaces vectoriels qui interviennent.

Correction

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$

Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$f(e_1) = (1,1,1), f(e_2) = (1,1,1)$ et $f(e_3) = (1,1,1)$ la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au départ et à l'arrivée est alors : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$f(x, y, z) = (x + y, 2x + z, x - z, x + y + z)$.

$f(e_1) = (1,2,1,1), f(e_2) = (1,0,0,1)$ et $f(e_3) = (0,1,-1,1)$ la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ est alors :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ D'après la correction de l'exercice 6, $f(x, y) = (-4x + 2y, -2x + y)$, donc $f(1,0) = (-4, -2)$ et $f(0,1) = (2,1)$, d'où la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ au départ et à l'arrivée : $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 13

Consigne

Soit f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x - 3y, x + y)$.

1) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.

2) Trouver la matrice de f dans les bases B et B' telles que :

$B = \{(1,1,0); (0,-1,0); (0,-1,1)\}$ et $B' = \{(1,1) ; (0,-1)\}$

Correction

1) Les colonnes de la matrice m de f dans les bases canoniques, sont les coordonnées des images des vecteurs $(1{,}0{,}0), (0{,}1{,}0)$ et $(0{,}0{,}1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. $f(1{,}0{,}0) = (2{,}1), f(0{,}1{,}0) = (-3{,}1)$ et $f(0{,}0{,}1) = (0{,}0)$. Et les coordonnées de $(2{,}1), (-3{,}1)$ et $(0{,}0)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont respectivement $\binom{2}{1}, \binom{-3}{1}$ et $\binom{0}{0}$. On obtient donc : $m = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) Si m' est la matrice de f dans B et B', m' a donc pour colonnes les coordonnées des vecteurs de $f(B)$ dans la base B'.

Or $f(1{,}1{,}0) = (-1{,}2)$, cherchons les coordonnées $\binom{a}{b}$ de $(-1{,}2)$ dans B' :

$(-1{,}2) = a(1{,}1) + b(0,-1)$, donc $\begin{cases} -1 = a \\ 2 = a - b \end{cases}$. Les coordonnées de $f(1{,}1{,}0)$ dans B' sont donc $\binom{-1}{-3}$.

$f(0,-1{,}0) = (3,-1)$, cherchons les coordonnées $\binom{a}{b}$ de $(3,-1)$ dans B'.

$(3,-1) = a(1{,}1) + b(0,-1)$, donc $\begin{cases} 3 = a \\ -1 = a - b \end{cases}$ les coordonnées de $f(0,-1{,}0)$ dans B' sont donc $\binom{3}{4}$.

$f(0,-1{,}1) = (3,-1) = f(0,-1{,}0)$ a pour coordonnées $\binom{3}{4}$ dans B'. On obtient donc $m' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

Exercice 14

Consigne

Soit f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (x - y, 2y + t, -z)$.

Donner la matrice de f en utilisant les bases suivantes :

$B = \{(1{,}0,-1{,}0), (0{,}1{,}1{,}1), (1{,}0{,}0,-1), (0{,}1{,}1{,}0)\}$ et $B' = \{(1{,}1{,}1), (1,-1{,}1), (1{,}1,-1)\}$.

Correction

La matrice m de f dans B et B' a pour colonnes les coordonnées des vecteurs de $f(B)$ dans la base B'.

$f(1{,}0,-1{,}0) = (1{,}0{,}1)$, $f(0{,}1{,}1{,}1) = (-1{,}3,-1)$, $f(1{,}0{,}0,-1) = (1,-1{,}0)$ et $f(0{,}1{,}1{,}0) = (-1{,}2,-1)$.

Déterminons les coordonnées de ces vecteurs dans la base B'.

Si $(1,0,1)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base B', $(1,0,1) = a(1,1,1) + b(1,-1,1) + c(1,1,-1)$. Soit

$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a-b+c=0 \\ a+b-c=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a+b+c=1 \\ 2b=1 \\ 2c=0 \end{cases}$. Les coordonnées de $(1,0,1)$ dans B' sont donc $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si $(-1,3,-1)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base B', $(-1,3,-1) = a(1,1,1) + b(1,-1,1) + c(1,1,-1)$.

Soit $\begin{cases} a+b+c=-1 \\ a-b+c=2 \\ a+b-c=-1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a+b+c=-1 \\ 2b=-4 \\ 2c=0 \end{cases}$. Les coordonnées de $(-1,3,-1)$ dans B' sont donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si $(1,-1,0)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base B', $(1,-1,0) = a(1,1,1) + b(1,-1,1) + c(1,1,-1)$.

Soit $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a-b+c=-1 \\ a+b-c=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a+b+c=1 \\ 2b=2 \\ 2c=1 \end{cases}$. Les coordonnées de (1,-1,0) dans B ' sont donc $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Si $(-1,2,-1)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base B', $(-1,2,-1) = a(1,1,1) + b(1,-1,1) + c(1,1,-1)$.

Soit $\begin{cases} a+b+c=-1 \\ a-b+c=2 \\ a+b-c=-1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a+b+c=-1 \\ 2b=-3 \\ 2c=0 \end{cases}$. Les coordonnées de $(-1,2,-1)$ dans B' sont $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Et donc $m = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 15

Consigne

Soit f dont la matrice est $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ dans les bases $B = \{(1,1,0);(0,-1,0);(0,-1,1)\}$ et $B' = \{(1,1)\,;(0,-1)\}$, déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Correction

Soit C la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et C' celle de $\mathbb{R}^2$.

La matrice de f dans les bases $B = \{(1,1,0);(0,-1,0);(0,-1,1)\}$ et $B' = \{(1,1)\,;(0,-1)\}$ est : $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ceci équivaut à dire que :

$f(1,1,0) = 3(1,1) = (3,3)$

$f(0,-1,0) = (1,1) + (0,-1) = (1,0)$

$f(0,-1,1) = -(1,1) + 4(0,-1) = (-1,-5)$.

La matrice demandée a pour colonnes les coordonnées de $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$ et $f(0,0,1)$ dans C'.

Remarquons que $(1,0,0) = (1,1,0) + (0,-1,0)$ (autrement dit $(1,0,0)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans B et $f(1,1,0) + f(0,-1,0) = (3,3) + (1,0) = (4,3)$.

De même $(0,1,0) = -(0,-1,0)$ et $f(0,1,0) = -f(0,-1,0) = -(1,0) = (-1,0)$

Et $(0,0,1) = (0,-1,1) - (0,-1,0)$ et $f(0,0,1) = (-1,-5) - (1,0) = (-2,-5)$. D'où la matrice de f dans C et C' : $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Exercice 16

Consigne

Soit f telle que $f(x,y) = (x + 2y, x)$. Déterminer deux vecteurs v_1 et v_2 non colinéaires et tels que $f(v_1)$ et $f(v_2)$ soient colinéaires respectivement à v_1 et v_2. Quelle est alors la matrice de f dans la base $\{v_1, v_2\}$?

Correction

Si $v_1 = (x,y), f(v_1) = (x + 2y, x)$ est colinéaire à v_1 si et seulement si il existe un réel λ tel que $f(v_1) = \lambda v_1$, soit $\begin{cases} x + 2y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}$ ou $\begin{cases} x + 2y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}$. C'est équivalent à $\begin{cases} y(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \\ x = \lambda y \end{cases}$. $y = 0$ n'est pas solution car cela implique $x = 0$ ($v_1 = 0$ n'est pas solution car v_1 et v_2 sont non colinéaires donc non nuls). On en déduit alors que nécessairement $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$.

Si $\lambda = -1$, $\begin{cases} x + 2y = -x \\ x = -y \end{cases}$ et $v_1 = (1,-1)$ convient.

Si $\lambda = 2$, $\begin{cases} x + 2y = 2x \\ x = 2y \end{cases}$ et $v_2 = (2,1)$ convient.

On a donc $f(v_1) = -v_1$ et $f(v_2) = 2v_2$, la matrice de f dans la base $\{v_1, v_2\}$ est donc $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 17

Consigne

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer le rang et le noyau de f.

Soit $v_1 = (1{,}1{,}1)$, $v_2 = (0{,}1,-1)$ et $v_3 = (1{,}0,-1)$. Calculer $f(v_1), f(v_2)$ et $f(v_3)$. On note $f(S) = \{f(V_1), f(V_2), f(V_3)\}$. Quel est le rang de $f(S)$?

Donner la matrice de f dans $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Correction

Le rang de f est le rang du système $\{(1{,}3,-1), (1,-3{,}5), (1{,}3,-1)\}$.

On remarque que le premier vecteur est égal au troisième et que les deux premiers vecteurs ne sont pas colinéaires donc le rang de f est 2.

D'après le théorème des dimensions $\dim(kerf) = 3 - 2 = 1$

$Kerf = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x, y, z) = (0{,}0{,}0)\}$.

Or $(x, y, z) = x(1{,}0{,}0) + y(0{,}1{,}0) + z(0{,}0{,}1)$ et

$f(x, y, z) = xf(1{,}0{,}0) + yf(0{,}1{,}0) + zf(0{,}0{,}1) = x(1{,}3,-1) + y(1,-3{,}5) + z(1{,}3,-1)$.

Donc $f(x, y, z) = (x + y + z, 3x - 3y + 3z, -x + 5y - z)$ et $X = (x, y, z) = Kerf$ si et seulement si :

$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \\ -x + 5y - z = 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 6y = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$. Donc $X = (x, y, z) = Kerf$ si et seulement si $X = (x, 0, -x) = x(1{,}0,-1)$. Donc $Kerf = \langle(1{,}0,-1)\rangle$ et $\dim(Kerf) = 1$.

Exercice 18

Consigne

Soit f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par : $f(x, y, z) = (2x - y, x + 3z)$.

1) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Quels sont le rang et le noyau de f ?

2) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de l'application g dans la base $B = \{v_1 = (1,2),\ v_2 = (0,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Donner la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Correction

1) $f(1,0,0) = (2,1)$; $f(0,1,0) = (-1,0)$ et $f(0,0,1) = (0,3)$.

Et la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Le rang de f est 2 car Imf est engendré par $(2,1), (-1,0)$ et $(0,3)$.

D'après le théorème des dimensions $\dim(Kerf) = 3 - 2 = 1$.

$X = (x, y, z) = Kerf$ si et seulement si $f(x, y, z) = (0,0)$ soit $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 2x \\ z = (-1/3)x \end{cases}$ et $X = (x, 2x, (-1/3)x) = x(1,2,-1/3)$. Donc $Kerf\ = \langle(1,2,-1/3)\rangle$.

2) $g(v_1) = (1,-2,0)$ et $g(v_2) = (3,1,-1)$.

Or $(1,0) = v_1 + 2v_2$. Donc $g(1,0) = (1,-2,0) + 2(3,1,-1) = (7,0,-2)$. Et $(0,1) = -v_2$, donc $g(0,1) = -(3,1,-1) = (-3,-1,1)$. D'où la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 19

Consigne

Soit $v_1 = (-1,1,0)$, $v_2 = (1,0,2)$ et $F = \langle v_1, v_2\rangle$.

1) A quelle condition sur x, y et z, $v = (x, y, z)$ appartient-il à F ?

2) Soit $v_3 = (1,1,-1)$, $v_4 = (1,1,2)$ et $v_5 = (0,1,2)$. Déterminer les rangs des systèmes suivants :

$\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_2, v_5\}$ et $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

3) Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que :

$f(1,0,0) = v_1 \quad f(0,1,0) = v_2 \quad f(0,0,1) = v_5$.

Déterminer $f(x, y, z)$, le rang de f, un système générateur de Imf et le noyau de f.

Correction

1) v_1 et v_2 étant indépendants, d'après une propriété vue dans la correction de l'exercice 21 de la leçon 9, $v \in F$ si et seulement si $\{v_1, v_2, v\}$ est lié, soit $\begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & z \end{vmatrix} = 0$, ou $2x + 2y - z = 0$.

2) Rang de $S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Le système S_1 est donc libre et de rang 3.

Rang de $S_2 = \{v_1, v_2, v_4\}$: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Le système S_2 est donc libre et de rang 3.

Rang de $S_3 = \{v_1, v_2, v_5\}$: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Les coordonnées de v_5 vérifient $2\,x + 2\,y - z = 0$, donc $v_5 \in F$ et S_3 est de rang 2.

Rang de $S_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. S_4 est de rang inférieur ou égal à 3 puisqu'il est formé de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et puisque $S_1 \subset S_4$ est de rang 3, S_4 est de rang 3.

$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$, donc

$f(x, y, z) = xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) = x(-1,1,0) + y(1,0,2) + z(0,1,2)$, d'où $f(x, y, z) = (-x + y, x + z, 2y + 2z)$.

Le rang de f est par définition celui de S_3 et égale 2.

$Imf = \langle v_1, v_2, v_5 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \geq F$.

$v = (x, y, z) \in Kerf$ si et seulement si $f(x, y, z) = (0,0,0)$ soit $\begin{cases} -x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$ ou $x = y = -z$ et

$v = (x, x, -x) = x(1,1,-1)$. Donc $Kerf = \langle v_3 \rangle$.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 2, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).