Applications linéaires

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Introduction

Objectif de la leçon : L'objectif de cette leçon est de généraliser la notion de linéarité (dite aussi de proportionnalité et la fameuse règle de trois) sur les espaces vectoriels et donc d'acquérir les différentes notions liées aux applications linéaires et à leurs caractéristiques qui sont le noyau et l'image.

Cette leçon est dans le prolongement de la leçon 9 qui en est un prérequis. Ces deux leçons sont des prérequis indispensables à la compréhension du calcul matriciel, outil très utilisé en économie et statistiques et développé en L2.

Définitions et propriétés

Rappel sur les applications

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.

f est injective si et seulement si deux éléments distincts de E, ont des images distinctes par f :

(f est injective) $\Leftrightarrow \left(x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')\right)$

On peut aussi écrire : (f est injective) $\Leftrightarrow (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

f est surjective si et seulement si tout élément de F a un antécédent par f :

(f est surjective) $\Leftrightarrow \left(\forall y \in F \quad \exists x \in E; y = f(x)\right)$

Soit $f(E) = F$

f est bijective si et seulement si f est à la fois injective et surjective. Tout élément y de F a un et un seul antécédent par f :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E, \textbf{ unique } ; y = f(x)$$

De façon pratique, pour montrer que f est bijective, on montre souvent que pour tout y de F, l'équation $y = f(x)$ a une et une seule solution dans E.

Exemple :

Considérons $E = F = \mathbb{R}$ et f, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$.

f n'est pas injective puisque deux réels opposés ont même carré et donc même image par f.

Par contre si on remplace E par $\mathbb{R}^+$. f est une injection de $\mathbb{R}^+$dans $\mathbb{R}$.

Un carré est toujours positif et si y est strictement négatif, il n'existe pas de x tel que $y = x^2$, et y n'a pas d'antécédent par f. f n'est donc pas surjective si $F = \mathbb{R}$, par contre si $F = \mathbb{R}^+$, f est une surjection.

f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

Applications linéaires

Dans cette leçon, on considérera des espaces vectoriels E et F de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et on notera $dimE = n$ et $dimF = p$.

Définition : Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application de E dans F.

(f est une application linéaire) $\Leftrightarrow$ ($\forall X$ et Y de $E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(X+Y) = f(X) + f(Y)$ et $f(\lambda X) = \lambda f(X)$

Conséquences :

1) $f(E)$ (ensemble des images de E par f), noté aussi Imf est un sous-espace vectoriel de F.

2) $\forall X_i \in E$ et $\forall \lambda_i \in \mathbb{R}$, $\quad f\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i (X_i)$

3) Pour montrer qu'une application est linéaire, il suffit de montrer que :

$\forall X$ et Y de E, $\forall \lambda$ et μ de $\mathbb{R}$, $f(\lambda X + \mu Y) = \lambda f(X) + \mu f(Y)$.

($\lambda = \mu = 1$ donne la première égalité de la définition et $\mu = 0$ donne la deuxième).

4) Si f est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$ (poser $\lambda = 0$ dans la définition).

5) L'image d'un système lié est un système lié.

Démonstration : Il reste à montrer 1) et 2) et 5) :

1) On remarque que Imf contient 0_F car $f(0_E) = \mathbf{0}_F$ donc Imf différent de l'ensemble vide.

Soient $f(X)$ et $f(Y)$ deux éléments de Imf et λ, μ, deux réels :

$\lambda f(X) + \mu f(Y) = f(\lambda X + \mu Y)$ car f est linéaire et puisque E est un sous-espace vectoriel, $\lambda X + \mu Y$ est un élément de E et $f(\lambda X + \mu Y)$ est un élément de ImF. Et Imf est un sous-espace vectoriel de F.

2) $f\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i X_i\right) = f\left(\lambda_1 X_1 + \sum_{i=2}^{q} \lambda_i X_i\right) = f(\lambda_1 X_1) + f\left(\sum_{i=2}^{q} \lambda_i X_i\right) = \lambda_1 f(X_1) + f\left(\sum_{i=2}^{q} \lambda_i X_i\right)$

$= \lambda_1 f(X_1) + f\left(\lambda_2 X_2 + \sum_{i=3}^{q} \lambda_i X_i\right) = \lambda_1 f(X_1) + f(\lambda_2 X_2) + f\left(\sum_{i=3}^{q} \lambda_i X_i\right) = \lambda_1 f(X_1) + \lambda_2 f(X_2) + f\left(\sum_{i=3}^{q} \lambda_i X_i\right)$
et ainsi de suite. On obtient alors $f\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i f(X_i)$.

5) Soit $\{X_1, .., X_q\}$ un système lié de E alors il existe des $\lambda_i \in \mathbb{R}$, non tous nuls tels que : $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i X_i = 0$.

D'après 2) et 4) : $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i f(X_i) = f\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i f(X_i) = \mathbf{0}_F$. Et puisque les des λ_i ne sont pas tous nuls, le système des $f(X_i)$ est lié.

Propriété : Une application linéaire est déterminée dès que l'on connaît l'image d'une base de E.

En effet soit $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $f(e_i) = f_i$ pour $i = 1,2, \dots, n$.

Si $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ (décomposition unique), $f(X) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i (e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$.

Et $f(X)$ est déterminé de façon unique.

Les vecteurs f_i de F forment un système générateur de $f(E) = Imf$, ensemble image de E par f : $Imf = f(E) = \langle f(B) \rangle$.

Et le rang de ce système $f(B) = \{f_1, \dots, f_n\}$ est la dimension de $f(E)$. On a la définition suivante :

Définition : Le rang de l'application linéaire f est la dimension de $f(E)$, c'est le rang du système $f(B)$, image d'une base B de E par f. On le note $rang(f)$.

Remarque :

1) $f(E) \subset F$ donc $rang(f) \leq dimF$.

2) Et si f est surjective $rang(f) = dimf(E) = dimF$.

3) $rang(f)$ est le rang des f_i qui forment un système de $n(= dimE)$ vecteurs, donc $rang(f) \leq dimE$.

Noyau d'une application linéaire – théorème des dimensions

Définition : On appelle noyau de l'application linéaire f, $f^{-1}(0_F)$, c'est-à-dire l'image réciproque de 0_F par f. Ce noyau est noté $kerf$.

$$X \in kerf \Leftrightarrow f(X) = 0_F$$

Propriété : $kerf$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration :

On remarque que $kerf$ contient 0_E car $f0_E = 0_F$ donc $kerf$ différent de l'ensemble vide.

Soient X et Y deux éléments de $kerf$ et λ, μ, deux réels

$f(\lambda X + \mu Y) = \lambda f(X) + \mu f(Y)$ car f est linéaire or comme X et Y sont des éléments de $kerf$ on a alors $f(X) = 0_F$ et $f(Y) = 0_F$ d'où $f(\lambda X + \mu Y) = \lambda f(X) + \mu f(Y) = 0_F$ et donc $\lambda X + \mu Y$ est un élément de $kerf$. $kerf$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

Propriété : (f est injective) $\Leftrightarrow$ ($kerf = 0_E$).

Démonstration : Supposons f injective et soit X un élément de $kerf$.

Donc $f(X) = 0_F = f(0_F)$ et puisque f est injective, $X = 0_E$.

Réciproque : Supposons que $kerf = 0_E$. Si $f(X) = f(Y)$ alors $f(X - Y) = 0_F$ et $X - Y = kerf$. Donc $X - Y = 0_E$, et $X = Y$. D'où le résultat.

Théorème : Si f est une application linéaire injective de E dans F, alors l'image par f de tout système libre de E est un système libre de F.

Démonstration : Supposons f injective et soit $S = \{X_1, X_2, \dots, X_r\}$, un système libre de r vecteurs de E. $f(S) = \{f(X_1), f(X_2), \dots, f(X_r)\}$.

Supposons que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(X_i) = 0_F$, puisque f est linéaire, $f(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i) = 0_F$ et puisque f est injective, on a $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(X_i) = 0_E$. Or par hypothèse, S est libre donc $\lambda_i = 0$ pour $i = 1,2, \dots, r$ et $f(S)$ est libre.

Théorème (des dimensions) : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f une application linéaire de E dans un espace vectoriel F. Alors :

$$\dim(kerf) + rang(f) = dimE$$

Démonstration :

$Kerf$ est un sous-espace vectoriel de E, considérons donc une base $S = \{e_1, \dots, e_r\}$ de $kerf$. Complétons S par $n - r$ vecteurs, de façon à obtenir une base de E :

$B = \{e_1; e_2; \dots; e_r; e_{r+1}; \dots; e_n\}$.

$f(E)$ est engendrée par $f(B)$ donc $rang(f) = rang(B)$.

Or $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_r) = 0_F$, donc $rangf(B) = rang\{f(e_r + 1), f(e_r + 2), \dots, f(e_n)\}$.

Pour montrer le théorème, il suffit donc de montrer que le système

$\{f(e_{r+1}), \dots, f(e_n)\}$ est libre. Supposons que $\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F$, alors $f(\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i e_i) = 0_F$ et $(\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i e_i) kerf$. On peut donc écrire : $\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{i=r} x_i e_i$ soit $\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i e_i - \sum_{i=1}^{r} x_i e_i = 0_E$.

Or B est une base de E, les coordonnées de 0_E étant nuls, $\lambda_i = 0$ pour $i = 1, \dots, r$, et $x_i = 0$ pour $i = r + 1, \dots, n$.

Représentation matricielle d'une application linéaire

Soit $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E et $B' = \{f_1, f_2, \dots, f_p\}$ une base de F. Considérons une application linéaire de E dans F. f est déterminée par les images des éléments de B par f. Chaque vecteur $f(e_i)$ est représenté par le vecteur colonne de ses coordonnées dans B'.

On appelle matrice de f dans les bases B et B', et on notera $m(f)$, le tableau de nombres formé par les vecteurs colonnes des coordonnées des $f(e_i)$ dans B'.

$$m(f) = \left(f(e_1) f(e_2) \dots f(e_n)\right)$$

Ce tableau comporte donc p lignes et n colonnes. On dit que $m(f)$ est une matrice de format (p, n). Si $n = p$ la matrice est dite **carrée d'ordre n**.

$m(f)$ dépend bien sûr de f mais aussi des bases choisies dans E et F.

Aussi lorsque ces bases ne sont pas évidentes, il est indispensable de les préciser lorsque l'on donne la matrice d'une application linéaire.

Le rang de f est le rang des $f(e_i)$, système générateur de $f(E)$. C'est donc le rang des vecteurs colonnes de $m(f)$. On montre que c'est aussi le rang des vecteurs lignes de $m(f)$. On dira que c'est aussi le rang de $m(f)$.

$rang(m(f)) = rang(f) = rang$ des vecteurs colonnes de $m(f) = rang$ des vecteurs lignes de $m(f)$

Donc $rang(m(f)) \leq inf(n, p)$ (le rang de $m(f)$ est inférieur ou égal à la plus petite de ses dimensions).

Si $n = p$ et si $rang(m(f)) = n$, on dit que $m(f)$ est régulière d'ordre n.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 2, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).