Espaces vectoriels

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices

Les exercices avec une * sont intéressants mais plus difficiles et peuvent être sautés.

Exercice 1

Consigne

Soit X_1, X_2 et X_3, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$X_1 = (-1,5,2)$, $X_2 = (2,-1,2)$ et $X_3 = (1,1,3)$

1) Calculer les combinaisons linéaires suivantes : $3X_1 - 2X_2 + X_3$; $3(X_1 - X_3) + X_2$

2) Trouver trois réels α, β et γ non nuls, tels que $\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3$ ait ses deux premières composantes nulles.

Exercice 2

Consigne

Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\, ; 3x - 5y + z = 0\}\, ; B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x - 3y + 5z = 1\}$

$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\, ; 2x + 3y + z \geq 0\}\, ; D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; xyz = 0\}$

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; (x,y,z) = (x+y+z)(2,3,1) + (x-y)(5,-1,2)\}$

Exercice 3*

Consigne

Montrer que l'ensemble E des fonctions f de la variable x définies sur $[0,1]$ et vérifiant $f(1) = 2f(0)$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel.

En est-il de même pour l'ensemble F des fonctions g définies sur $[0,1]$ et vérifiant $g(1) = g(0) + 1$?

Exercice 4

Consigne

Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$?

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = 0\} \ ; G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y \leq 0\};$$

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y = z + t\} \ ; I = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; xy = 0\};$$

$$J = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y \in Q\} \ ; K = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = x^2\}$$

Exercice 5

Consigne

Les vecteurs suivants engendrent-ils $\mathbb{R}^3$:

1) $(2,-1,4), (3,1,2)$ et $(0,2,-1)$.

2) $(4,-1,0), (1,1,1)$ et $(-7,3,1)$.

3) $(1,1,2), (-3,2,1), (0,5,7)$ et $(0,1,-1)$.

Exercice 6

Consigne

Montrer que dans ces différents cas X_1, X_2 et X_3 sont dépendants et trouver une relation entre X_1, X_2 et X_3.

1) $X_1 = (1,-1,0)$, $X_2 = (2,4,2)$ et $X_3 = (2,7,3)$

2) $X_1 = (2,3,-1)$, $X_2 = (0,-1,3)$ et $X_3 = (-3,-4,0)$

3) $X_1 = (8,2,1)$, $X_2 = (-1,3,5)$ et $X_3 = (10,22,32)$

Exercice 7

Consigne

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées et donner leur rang

1) $\{(2,1),(-3,2),(4,3),(1,1)\}$

2) $\{(4,1),(2,3)\}$

3) $\{(3,-1,2),(4,1,1),(0,-2,1)\}$

4) $\{(0,3,2,-1),(3,-2,1,1),(1,1,1,1),(4,-3,1,-2)\}$.

Exercice 8

Consigne

Déterminer le rang des systèmes suivants :

1) $\{(0,1),(1,-2),(4,3)\}$

2) $\{(3,1,2),(4,2,0),(1,3,-2)\}$

3) $\{(0,1,0,2),(1,1,-1,0),(2,0,1,1)\}$

4) $\{(1,-1,0),(2,0,1),(2,6,4)\}$

Exercice 9

Consigne

L'ensemble $S = \{(2,1,1),(0,3,5),(2,4,6),(1,6,6)\}$ forme-t-il une base de $\mathbb{R}^3$? Extraire une base de $\mathbb{R}^3$? Combien de bases de $\mathbb{R}^3$ peut-on extraire de S ?

Exercice 10

Consigne

On considère des ensembles $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = 2x\}$ et $F = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $E \cap F$.

Exercice 11

Consigne

On considère les ensembles suivants :

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = y = z\}$; $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\}$ et

$G = \{(a-b, a+b, 2a-3b); a \in \mathbb{R} \text{ } et \text{ } b \in \mathbb{R}\}$

1) Montrer que E, F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer les sous espaces vectoriels $E \cap F, E \cap G$ et $F \cap G$.

Exercice 12

Consigne

Donner une base et la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x - y + z + t = 0\}$$

En déduire le rang du système suivant : $\{(0,1,2,-1),(1,0,-2,1),(3,2,0,-1),(1,1,-1,1)\}$.

Exercice 13

Consigne

Donner une base et la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par : $\{(x, y, z, t) \in R^4; x + y - z = 0$ et $x - y + 2t = 0\}$.

Exercice 14

Consigne

Soient trois vecteurs linéairement indépendants e_1, e_2 et e_3 d'un espace vectoriel V. Que peut-on dire de $dimV$?

Exercice 15

Consigne

Donner une base et la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\{(\lambda - \mu, \lambda + \mu, 2\lambda - \mu)$; $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 16

Consigne

1) Montrer que l'ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Soit F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,1,1)$ et $(3,1,-1)$. Vérifier que $F \subseteq E$. A-t-on $E = F$?

Exercice 17

Consigne

Montrer que l'ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x - y + 2z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base et la dimension de E.

2) Soit F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1,2,0)$ et $v = (2,1,1)$, déterminer que $E \cap F$.

Exercice 18

Consigne

Démontrer que dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $u = (2,3,-1)$ et $v = (1,-1,-2)$ d'une part, et les vecteurs $u' = (3,7,0)$ et $v' = (5,0,-7)$ d'autre part, engendrent le même sous-espace vectoriel.

Exercice 19

Consigne

Montrer que les ensembles suivants sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ dont on déterminera la dimension et une base :

$A = \{(\lambda + \mu, 2\lambda, \lambda - 2\mu, \mu) ; \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$

$B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x - z = y - t\}$

Exercice 20

Consigne

Soit $S_1 = \{u_1 = (a, 1,1), u_2 = (-1, -a, -1), u_3 = (1,1, a)\}$

et $S_2 = \{v_1 = (a, 1,1), v_2 = (-1, -a, -1), v_3 = (-1, -1, a)\}$

Déterminer suivant les valeurs de a le rang de S_1 ainsi que celui de S_2.

Exercice 21

Consigne

Soit $v_1 = (4,0,-2), v_2 = (-8,1,5)$ et $v_3 = (2,0,0)$. Ces vecteurs sont-ils indépendants ?

On considère le sous espace vectoriel V engendré par v_1 et v_2. Quelle est sa dimension ? Donner une base de V. v_3 appartient-il à V ? $v_4 = (-4,2,4)$ appartient-il à V ? A quelle condition sur a, b et c un vecteur $w = (a, b, c)$ appartient-il à V ?

Exercice 22

Consigne

1) Soit $v_1 = (-1,1,0), v_2 = (1,0,2)$ et F, le sous-espace vectoriel engendré par v_1 et v_2.

a) A quelle condition sur x, y et z, $v = (x, y, z)$ appartient-il à F ?

b) Soit $v_3 = (1,1,-1)$, $v_4 = (1,1,2)$ et $v_5 = (0,1,2)$. Déterminer les rangs des systèmes suivants : $\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_2, v_5\}$ et $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

2)* On se place dans un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Dire si la proposition suivante est vraie :

$$(S = \{e_1, e_2, e_3\} \text{ lié }) \Rightarrow (e_3 \in < e_1, e_2 >)$$

Si la réponse est affirmative, la prouver. Si la réponse est négative, donner un contre-exemple.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 2, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).