Espaces vectoriels

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices corrigés

Les exercices avec une * sont intéressants mais plus difficiles et peuvent être sautés.

Attention : ceci est la version corrigée des exercices.

Exercice 1

Consigne

Soit X_1, X_2 et X_3, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$X_1 = (-1,5,2)$, $X_2 = (2,-1,2)$ et $X_3 = (1,1,3)$

1) Calculer les combinaisons linéaires suivantes : $3X_1 - 2X_2 + X_3$; $3(X_1 - X_3) + X_2$

2) Trouver trois réels α, β et γ non nuls, tels que $\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3$ ait ses deux premières composantes nulles.

Correction

1) $$3X1 - 2X2 + X3 = 3(-1,5,2) - 2(2,-1,2) + (1,1,3) = (-3,15,6) - (4,-2,4) + (1,1,3)$$
$$= (-3-4+1, 15+2+1, 6-4+3) = (-6,18,5)$$
$$3(X1 - X3) + X2 = 3[(-1,5,2) - (1,1,3)] + (2,-1,2) = 3(-1-1, 5-1, 2-3) + (2,-1,2)$$
$$= 3(-2,4,-1) + (2,-1,2) = (-6,12,-3) + (2,-1,2) = (-4,11,-1)$$

2) $\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 = \alpha(-1,5,2) + \beta(2,-1,2) + \gamma(1,1,3) = (-\alpha + 2\beta + \gamma, 5\alpha - \beta + \gamma, 2\alpha - \beta + 3\gamma) = (0,0,2\alpha - \beta + 3\gamma)$ donc on a :

$\begin{cases} -\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 5\alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \beta = 2\alpha \\ \gamma = -3\alpha \end{cases}$. Ce système de 2 équations à 3 inconnues a un infinité de solutions en (α, β, γ) de la forme $(\alpha, 2\alpha, -3\alpha)$.

Exercice 2

Consigne

Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 3x - 5y + z = 0\} ; B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 3y + 5z = 1\}$

$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x + 3y + z \geq 0\} ; D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xyz = 0\}$

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, z) = (x + y + z)(2,3,1) + (x - y)(5, -1,2)\}$

Correction

- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 3x - 5y + z = 0\}$

$A \neq \emptyset$ car $(0,0,0) \in A$.

Soient $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux éléments de A et λ et μ sont deux réels quelconques : $\lambda X_1 + \mu X_2 = \lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$ et $3(\lambda x_1 + \mu x_2) - 5(\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda(3x_1 - 5y_1 + z_1) + \mu(3x_2 - 5y_2 + z_2) = 0$ car X_1 et X_2 appartiennent à A (c'est à dire $3x_1 - 5y_1 + z_1 = 0$ et $3x_2 - 5y_2 + z_2 = 0$). $\lambda X_1 + \mu X_2$ appartient donc à A de sorte que A est un sous-espace vectoriel de R^3.

- $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 3y + 5z = 1\}$

$(0,0,0)$ n'est pas un élément de B. B n'est donc pas un sous-espace vectoriel de R^3.

- $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y + z \geq 0\}$

On remarque que $X = (1,1,1)$ est un élément de C car $2 + 3 + 1 = 6 \geq 0$, mais $-X$ n'est pas un élément de C étant donné que $-2 - 3 - 1 = -6 < 0$.

L'ensemble C n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xyz = 0\}$

$X = (1,1,0)$ est un élément de D $(1 \times 1 \times 0 = 0)$ et $Y = (0,0,1)$ est aussi un élément de D $(0 \times 0 \times 1 = 0)$.

Mais $X + Y = (1,1,1)$ n'est pas un élément de D $(1 \times 1 \times 1 = 1 \neq 0)$.

L'ensemble D n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x, y, z) = (x + y + z)(2,3,1) + (x - y)(5, -1,2)\}$

On peut réécrire E : $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x, y, z) = \big(2(x + y + z),\ 3(x + y + z),\ 1(x + y + z)\big) + \big(5(x - y),\ -1(x - y),\ 2(x - y)\big)\}$

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x, y, z) = (7x - 3y + 2z, 2x + 4y + 3z, 3x - y + z)\}$

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (7x - 3y + 2z = x, 2x + 4y + 3z = y, 3x - y + z = z)\}$

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (6x - 3y + 2z = 0, 2x + 3y + 3z = 0, 3x - y = 0)\}$

Or, $\begin{cases} 6x - 3y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$ équivaut à $x = y = z = 0$. Donc $E = (0,0,0)$ et E est un espace vectoriel.

Exercice 3 *

Consigne

Montrer que l'ensemble E des fonctions f de la variable x définies sur $[0,1]$ et vérifiant $f(1) = 2f(0)$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel.

En est-il de même pour l'ensemble F des fonctions g définies sur $[0,1]$ et vérifiant $g(1) = g(0) + 1$?

Correction

Considérons l'ensemble E des fonctions numériques de la variable x définies sur $[0,1]$ et vérifiant $f(1) = 2f(0)$ muni de l'addition comme loi interne et la multiplication comme loi externe.

On remarque que la fonction nulle est un élément de E (c'est la fonction qui à tout x on lui associe 0 et que nous noterons f_0) car : $f_0(1) = f_0(0) = 0$ et donc $f_0(1) = 2f_0(0)$.

Pour toute fonction f de E :

$$f + f_0 = f_0 + f = f$$

La fonction nulle est l'élément neutre de E et E est non vide.

Remarque : soient f et g deux fonctions de E on a :

$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 2f(0) + 2g(0) = 2\big(f(0) + g(0)\big) = 2(f + g)(0)$ donc $f + g$ est un élément de E.

$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ pour tout x élément de $[0,1]$, donc la loi est **commutative**.

Soit f, g et h trois fonctions de $E, f+(g+h)$ et $(f+g)+h$ sont des éléments de E d'après la remarque précédente, d'autre part pour tout x de $[0,1]$:

$f(x)+\big(g(x)+h(x)\big)=\big(f(x)+g(x)\big)+h(x)=f(x)+g(x)+h(x)$ d'où : $f+(g+h)=(f+g)+h=f+g+h$ et la loi est **associative**

Pour toute fonction f de E

$-f$ est aussi un élément de E car :

Comme f est un élément de E on a $f(1)=2f(0)$ d'où $-f(1)=-2f(0)$

$f(x)+\big(-f(x)\big)=f(x)-f(x)=f_0$ pour tout $x\in[0,1]$.

Donc $f-f=f_0$, c'est à dire : $-f$ est l'opposée de f

Remarque : pour tout réel λ, pour tout élément f de E, λf est aussi un élément de E car : $\lambda f(1)=\lambda f(1)=2\lambda f(0)$.

En utilisant la remarque précédente pour tous réels λ et μ, et pour tout f de E, $(\lambda+\mu)f$ appartient à E et pour tout $x\in[0,1]$, $(\lambda+\mu)\cdot f(x)=\lambda f(x)+\mu f(x)$ d'où : $(\lambda+\mu)f=\lambda f+\mu f$.

Pour tous éléments f et g de E, pour tout réel λ :

$\lambda(f+g)$ est aussi un élément $de\ E$ (d'après les deux remarques précédentes).

Et pour tout $x\in[0,1], \lambda(f+g)(x)=\lambda f(x)+\lambda g(x)$.

D'où : $\lambda(f+g)=\lambda f+\lambda g$

Pour tous réels λ et μ, pour tout élément f de E, d'après la dernière remarque $\lambda.(\mu.f)$ est aussi élément de E et pour tout $x\in[0,1]$, $\lambda(\mu f)(x)=(\lambda\mu)f(x)$.

Et $\lambda(\mu f)=(\lambda\mu)f$

Pour tout élément f de E et pour tout x de $[0,1]$; $1f(x)=f(x)$, donc $1f=f$.

D'où finalement $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel.

F n'est pas un espace vectoriel car le seul élément neutre possible pour l'addition des fonctions est f_0 et bien sûr f_0 n'appartient pas à F.

Exercice 4

Consigne

Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$?

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = 0\} \ ; G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y \leq 0\};$$

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y = z + t\} \ ; I = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; xy = 0\};$$

$$J = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y \in Q\} \ ; K = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = x^2\}$$

Correction

- $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = 0\}$

$F \neq \emptyset$ car $(0, 0, 0, 0) \in F$.

Soient $X_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ deux éléments de F et λ et μ sont deux réels quelconques : $\lambda X_1 + \mu X_2 = \lambda(x_1, y_1, z_1, t_1) + \mu(x_2, y_2, z_2, t_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2, \lambda t_1 + \mu t_2)$ et $(\lambda z_1 + \mu z_2) = 0$ car X_1 et X_2 appartiennent à F (c'est-à-dire $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$). $\lambda X_1 + \mu X_2$ appartient donc à Fet F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

- $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y \leq 0\}$

Pour tout $X = (x, y, z, t)$ élément de G on a alors $y \leq 0$ mais $-X = (-x, -y, -z, -t)$ n'est pas un élément de G vu que si $y \neq 0, -y < 0$. G n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

- $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y = z + t\}$

$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y - z - t = 0\}$

$H \neq \emptyset$ car $(0, 0, 0) \in A$.

Soient $X_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ deux éléments de H et λ et μ sont deux réels quelconques : $\lambda X_1 + \mu X_2 = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2, \lambda t_1 + \mu t_2)$. Or puisque X_1 et X_2 appartiennent à H, $y_1 = z_1 + t_1$ et $y_2 = z_2 + t_2$, donc $\lambda y_1 = \lambda(z_1 + t_1)$ et $\mu y_2 = \mu(z_2 + t_2)$, d'où $\lambda y_1 + \mu y_2 = (\lambda z_1 + \lambda t_1) + (\mu z_2 + \mu t_2) = (\lambda z_1 + \mu z_2) + (\lambda t_1 + \mu t_2)$ et $\lambda X_1 + \mu X_2$ appartient donc à H. H est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

- $I = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; xy = 0\}$

$X = (1, 1, 0, 1)$ est un élément de I et $Y = (0, 1, 1, 1)$ est aussi un élément de I. Mais $X + Y = (1, 2, 1, 2)$ n'est pas un élément de I.

- $J = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y \in Q\}$

J n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ car : $X = (1, 1, 1, 1)$ est un élément de J mais λX n'est pas un élément de J si λ est un irrationnel J n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

- $K = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = x^2\}$

$X = (1, 1, 1, 1)$ est un élément de K et $Y = (2, 1, 4, 4)$ est aussi un élément de K mais $X + Y = (3, 2, 5, 5)$ n'est pas un élément de K vu que $3^2 = 9 \neq 5$. K n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5

Consigne

Les vecteurs suivants engendrent-ils $\mathbb{R}^3$:

1) $(2, -1, 4), (3, 1, 2)$ et $(0, 2, -1)$.

2) $(4, -1, 0), (1, 1, 1)$ et $(-7, 3, 1)$.

3) $(1, 1, 2), (-3, 2, 1), (0, 5, 7)$ et $(0, 1, -1)$.

Correction

Pour qu'un système engendre $\mathbb{R}^3$ il faut que son rang soit égal à trois ou qu'il contienne trois vecteurs libres de $\mathbb{R}^3$.

1) Le système $\{(2, -1, 4), (3, 1, 2)$ et $(0, 2, -1)\}$ libre si et seulement si le déterminant D de ses trois vecteurs est non nul (propriété du cours admise).

$$D= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times (-1) + 3 \times 2 \times 4 + 0 \times (-1) \times 2 - [0 \times 1 \times 4 + 3 \times (-1) \times (-1) + 2 \times 2 \times 2]$$

$\mathrm{D} = -2 + 24 - 3 - 8 = 11 \neq 0$. Les trois vecteurs engendrent bien $\mathbb{R}^3$.

2) De même on calcule le déterminant de ces trois vecteurs :

$$D= \begin{vmatrix} 4 & 1 & -7 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 1 \times 1 + 1 \times 3 \times 0 + (-7) \times (-1) \times 1 - [(-7) \times 1 \times 0 + 1 \times (-1) \times 1 + 4 \times 3 \times 1]$$

$\mathrm{D} = 4 + 7 + 1 - 12 = 0$. Les trois vecteurs n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$.

3) $(1, 1, 2), (-3, 2, 1), (0, 5, 7)$ et $(0, 1, -1)$.

Comme les quatre vecteurs appartiennent à $\mathbb{R}^3$. Ici on procède de même, on cherche si parmi ces quatre vecteurs, trois sont indépendants en calculant leur déterminant. Par exemple, si on prend $(1,1,2), (-3,2,1)$ et $(0,1,-1)$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times (-1) + (-3) \times 1 \times 2 + 0 \times 1 \times 1 - [0 \times 2 \times 2 + (-3) \times 1 \times (-1) + 1 \times 1 \times 1]$$

$D = -2 - 6 - 3 - 1 = -12 \neq 0$. Le système $\{(1,1,2), (-3,2,1), (0,1,-1)\}$ est libre et les quatre vecteurs $(1,1,2), (-3,2,1), (0,5,7)$ et $(0,1,-1)$ forment un système de rang 3.

Les quatre vecteurs $(1,1,2), (-3,2,1), (0,5,7)$ et $(0,1,-1)$ engendrent $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6

Consigne

Montrer que dans ces différents cas X_1, X_2 et X_3 sont dépendants et trouver une relation entre X_1, X_2 et X_3.

1) $X_1 = (1,-1,0)$, $X_2 = (2,4,2)$ et $X_3 = (2,7,3)$

2) $X_1 = (2,3,-1)$, $X_2 = (0,-1,3)$ et $X_3 = (-3,-4,0)$

3) $X_1 = (8,2,1)$, $X_2 = (-1,3,5)$ et $X_3 = (10,22,32)$

Correction

1) $X_1 = (1,-1,0), X_2 = (2,4,2)$ et $X_3 = (2,7,3)$

Supposons donc qu'il existe trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que : $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0$

Soit $\lambda_1(1,-1,0) + \lambda_2(2,4,2) + \lambda_3(2,7,3) = (0,0,0)$.

On obtient alors $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$, et en utilisant la méthode de Gauss :

$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 6\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$ Soit $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = -\frac{3}{2}\lambda_3 \end{cases}$

Les vecteurs sont donc dépendants. On peut par exemple poser $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$ et $\lambda_3 = 2$, on obtient : $2X_1 - 3X_2 + 2X_3 = 0$.

2) $X_1 = (2,3,-1), X_2 = (0,-1,3)$ et $X_3 = (-3,-4,0)$

Supposons qu'il existe 3 réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que : $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0$

Soit $\lambda_1(2,3,-1) + \lambda_2(0,-1,3) + \lambda_3(-3,-4,0) = (0,0,0)$

D'où $\begin{cases} 2\lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \lambda_3 = \frac{2}{3}\lambda_1 \\ \lambda_2 = \frac{1}{3}\lambda_1 \end{cases}$

Les vecteurs sont donc dépendants. On peut par exemple poser $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$, on obtient : $3X_1 + X_2 + 2X_3 = 0$.

3) $X_1 = (8,2,1)$, $X_2 = (-1,3,5)$ et $X_3 = (10,22,32)$

Par la même méthode on obtient $2X_1 + 6X_2 = X_3$

Les vecteurs sont dépendants.

Exercice 7

Consigne

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées et donner leur rang

1) $\{(2,1), (-3,2), (4,3), (1,1)\}$

2) $\{(4,1), (2,3)\}$

3) $\{(3,-1,2), (4,1,1), (0,-2,1)\}$

4) $\{(0,3,2,-1), (3,-2,1,1), (1,1,1,1), (4,-3,1,-2)\}$.

Correction

1) $\{(2,1), (-3,2), (4,3), (1,1)\}$

Cette famille est forcément liée et car cette famille est composée de plus de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. D'autre part son rang est au plus 2 puisque ce sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Le rang est 2 car le déterminant du système $\{(2,1), (-3,2)\}$ est $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7 \neq 0$.

2) $\{(4,1), (2,3)\}$

Cette famille est libre de rang 2 puisque le déterminant est égal à $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10 \neq 0$.

3) $\{(3,-1,2),(4,1,1),(0,-2,1)\}$. C'est une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sera donc libre si et seulement si le déterminant de ces trois vecteurs est non nul.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\times 1\times 1 + 4\times(-2)\times 2 - [4\times(-1)\times 1 + 3\times(-2)\times 1] = 3 - 16 - (-4-6) = -3 \neq 0$$

Donc cette famille est libre et son rang = 3.

4) $\{(0,3,2,-1),(3,-2,1,1),(1,1,1,1),(4,-3,1,-2)\}$

Dans $\mathbb{R}^4$ nous n'avons pas le déterminant à notre disposition, il faut donc revenir à la définition. Supposons donc qu'il existe quatre réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 tels que :

$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0.$

Soit $\lambda_1(0,3,2,-1) + \lambda_2(3,-2,1,1) + \lambda_3(1,1,1,1) + \lambda_4(4,-3,1,-2) = (0,0,0,0)$. Cela se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} 3\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 - 3\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

En changeant l'ordre des équations :

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 - 3\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \end{cases} \text{soit} \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 - 9\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_2 + 3\lambda_3 - 3\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \end{cases} \text{soit} \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 - 9\lambda_4 = 0 \\ -9\lambda_3 - 30\lambda_4 = 0 \\ 11\lambda_3 - 31\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 - 9\lambda_4 = 0 \\ -9\lambda_3 - 30\lambda_4 = 0 \\ 67\lambda_4 = 0 \end{cases}$. La solution est donc $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$ d'où quatre vecteurs sont linéairement indépendants et le rang est de 4.

Exercice 8

Consigne

Déterminer le rang des systèmes suivants :

1) $\{(0,1),(1,-2),(4,3)\}$

2) $\{(3,1,2),(4,2,0),(1,3,-2)\}$

3) $\{(0,1,0,2),(1,1,-1,0),(2,0,1,1)\}$

4) $\{(1,-1,0),(2,0,1),(2,6,4)\}$

Correction

1) $\{(0,1),(1,-2),(4,3)\}$

Ce système est de rang ≤ 2 car les vecteurs qui le composent sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Le rang est 2 car les deux premiers vecteurs $(0,1)$ et $(1,-2)$ sont linéairement indépendants (non proportionnels).

2) On calcule le rang du système $\{(3,1,2),(4,2,0)$ et $(1,3,-2)\}$ à l'aide du déterminant D des vecteurs :

$$D=\begin{vmatrix}3 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & -2\end{vmatrix}=3\times 2\times(-2)+4\times 3\times 2+1\times 1\times 0-[1\times 2\times 2+4\times 2\times(-2)+3\times 3\times 0]$$

$D=12+4=16\neq 0$ donc le rang est 3 .

3) $\{(0,1,0,2),(1,1,-1,0),(2,0,1,1)\}$

Supposons donc qu'il existe trois réels λ_1,λ_2 et λ_3 tels que : $\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\lambda_3X_3=0$

Soit $\lambda_1(0,1,0,2)+\lambda_2(1,1,-1,0)+\lambda_3(2,0,1,1)=(0,0,0,0)$

Soit le système suivant : $\begin{cases}\lambda_2+2\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2=0\\ -\lambda_2+\lambda_3=0\\ 2\lambda_1+\lambda_3=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}\lambda_3=-1/2\lambda_2\\ \lambda_1=-\lambda_2\\ \lambda_3=\lambda_2\\ -2\lambda_2+\lambda_2=0\end{cases}$, ce système admet une seule solution $(0,0,0,0)$ et les trois vecteurs sont linéairement indépendants, le système est donc de rang 3.

4) On calcule $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 4\end{vmatrix}=0$ donc les trois vecteurs sont linéairement dépendants et la rang <3 puisque $\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}+2\neq 0$, le rang est 2.

Exercice 9

Consigne

L'ensemble $S = \{(2,1,1), (0,3,5), (2,4,6), (1,6,6)\}$ forme-t-il une base de $\mathbb{R}^3$? Extraire une base de $\mathbb{R}^3$? Combien de bases de $\mathbb{R}^3$ peut-on extraire de S ?

Correction

Ce système est forcément lié car il contient quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$. On cherche si S contient trois vecteurs indépendants en utilisant leur déterminant.

Si on prend $(2,1,1), (0,3,5)$ et $(2,4,6)$:

$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times 6 + 0 \times 4 \times 1 + 2 \times 1 \times 5 - [2 \times 3 \times 1 + 0 \times 1 \times 6 + 2 \times 4 \times 5] = 36 + 10 - 6 - 40 = 0$. Ces trois vecteurs sont liés.

Si on prend $(2,1,1), (0,3,5), (1,6,6)$:

$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times 6 + 0 \times 6 \times 1 + 1 \times 1 \times 5 - [1 \times 3 \times 1 + 0 \times 1 \times 6 + 2 \times 6 \times 5] = 36 + 5 - 3 - 60 \neq 0$. Ces trois vecteurs sont libres et forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Pour répondre à la question suivante, il faut examiner tous les autres systèmes de trois vecteurs de S.

Si on prend $\{(2,1,1), (2,4,6), (1,6,6)\}$:

$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 6 \end{vmatrix} =. 2 \times 4 \times 6 + 2 \times 6 \times 1 + 1 \times 1 \times 6 - [1 \times 4 \times 1 + 2 \times 1 \times 6 + 2 \times 6 \times 6]$, $\quad \mathrm{D} = 48 + 12 + 6 - (4 + 12 + 72) = 66 - 88 = -22 \neq 0$ et ce système forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Si on prend $\{(0,3,5), (2,4,6), (1,6,6)\}$:

$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0 \times 4 \times 6 + 2 \times 6 \times 5 + 1 \times 3 \times 6 - [1 \times 4 \times 5 + 2 \times 3 \times 6 + 0 \times 6 \times 6] = 60 + 18 - (20 + 36)$. $D = 22 \neq 0$. Ce système forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10

Consigne

On considère des ensembles $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = 2x\}$ et $F = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $E \cap F$.

Correction

(0,0) est un élément de E donc $E \neq \emptyset$.

Soit $X_1 = (x_1, y_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2)$ deux éléments de E et α, β deux réels quelconques. $\alpha X + \beta Y = \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$. Puisque X_1 et X_2 appartiennent à E, $y_1 = 2x_1$ et $y_2 = 2x_2$ et donc $\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha(2x_1) + \beta(2x_2) = 2(\alpha x_1 + \beta x_2)$. Donc $\alpha X + \beta Y$ est aussi un élément de E et E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

$(0,0)$ est un élément de F donc $F \neq \emptyset$

Soit $X_1 = (x_1, x_1)$ et $X_2 = (x_2, x_2)$ deux éléments de F et α, β deux réels quelconques.

$\alpha X + \beta Y = \alpha(x_1, x_1) + \beta(x_2, x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha x_1 + \beta x_2)$.

Donc $\alpha X + \beta Y$ est aussi un élément de F et F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

$E \cap F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y) \in E$ et $(x,y) \in F\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = 2x$ et $y = x\}$

$E \cap F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = 2x = y\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = 0$ et $y = 0\}$

$E \cap F = \{(0,0)\}$.

Exercice 11

Consigne

On considère les ensembles suivants :

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = y = z\}$; $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\}$ et

$G = \{(a-b, a+b, 2a-3b); a \in \mathbb{R}\ et\ b \in \mathbb{R}\}$

1) Montrer que E, F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer les sous espaces vectoriels $E \cap F, E \cap G$ et $F \cap G$.

Correction

1) (0,0,0) est un élément de E donc $E \neq \emptyset$

Soit $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux éléments de E et α, β deux réels quelconques. $\alpha X + \beta Y = \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$. Puisque X_1 et X_2 appartiennent à E : $x_1 = y_1 = z_1$ et $x_2 = y_2 = z_2$, donc $\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha z_1 + \beta z_2$ et $\alpha X + \beta Y$ appartient à E. E est bien un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$(0,0,0)$ est un élément de F donc $F \neq \emptyset$

Soit $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux éléments de E et α, β deux réels quelconques. $\alpha X + \beta Y = \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$. Puisque X_1 et X_2 appartiennent à F : $x_1 - 2y_1 + z_1 = 0$ et $x_2 - 2y_2 + z_2 = 0$, donc $\alpha(x_1 - 2y_1 + z_1) = 0$ et $\beta(x_2 - 2y_2 + z_2) = 0$, d'où $\alpha(x_1 - 2y_1 + z_1) + \beta(x_2 - 2y_2 + z_2) = 0$, soit $\alpha x_1 + \beta x_2 - 2(\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2) = 0$. Donc $\alpha X + \beta Y$ appartient à F et F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$G = \{(a - b, a + b, 2a - 3b); a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} = \{(a(1,1,2) + b(-1,1,-3); a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}\}$. Donc G est l'ensemble des combinaisons linéaires de $(1,1,2)$ et $(-1,1,-3)$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) $E \cap F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, z) \in E$ et (x,y,z) $\in F\}$.

On remarque ici que tout élément de E est aussi élément de F (en effet si $x = y = z$, $x - 2y + z = x - 2x + x = 0$) donc E est inclus dans F et $E \cap F = E$.

$E \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, z) \in E$ et $(x, y, z) \in G\}$

$E \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = z$ et $(x, y, z) = (a - b, a + b, 2a - 3b)\}$.

Donc $a - b = a + b = 2a - 3b$ et $a = b = 0$. D'où $E \cap G = \{(0,0,0)\}$.

$F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, z) \in F$ et $(x, y, z) \in G\}$

$F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0$ et $(x, y, z) = (a - b, a + b, 2a - 3b)\}$.

Donc $(a - b) - 2(a + b) + (2a - 3b) = 0$, soit $a = 6\,b$ et $(x, y, z) = (5b, 7b, 9b) = b(5,7,9)$.

Et $F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, z) = (5b, 7b, 9b) = -b(5,7,9), b \in \mathbb{R}\}$

Donc $F \cap G$ est le sous-espace vectoriel engendré par (5,7,9).

Exercice 12

Consigne

Donner une base et la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y + z + t = 0\}$$

En déduire le rang du système suivant :

$\{(0,1,2,-1),(1,0,-2,1),(3,2,0,-1),(1,1,-1,1)\}$.

Correction

Posons $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y + z + t = 0\}$

$X = (x, y, z, t) \in E$ si et seulement si $X = (x, x + z + t, z, t) = x(1,1,0,0) + z(0,1,1,0) + t(0,1,0,1)$. Donc E est engendré par $\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1)\}$. Ce système sera une base de E s'il est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, trois réels tels que $\lambda_1(1,1,0,0) + \lambda_2(0,1,1,0) + \lambda_3(0,1,0,1) = (0,0,0,0)$.

Alors $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$, soit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et les vecteurs sont indépendants ; ils forment bien une base de E et E est de dimension 3.

Notons $S = \{(0,1,2,-1),(1,0,-2,1),(3,2,0,-1),(1,1,-1,1)\}$.

On remarque que tous les vecteurs de S appartiennent à E, le rang de ce système est donc inférieur ou égal à 3. S sera de rang 3 s'il contient trois vecteurs indépendants. Prenons les trois premiers et cherchons s'ils sont indépendants :

Soient λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels tels que $\lambda_1(0,1,2,-1) + \lambda_2(1,0,-2,1) + \lambda_3(3,2,0,-1) = (0,0,0,0)$.

Alors, $\begin{cases} \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 \\ -\lambda_3 = 0 \end{cases}$ soit $\lambda_3 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et les vecteurs sont indépendants.

Le système est bien de rang 3.

Exercice 13

Consigne

Donner une base et la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par : $\{(x, y, z, t) \in R^4; x + y - z = 0$ et $x - y + 2t = 0\}$.

Correction

Posons $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - z = 0$ et $x - y + 2t = 0\}$. $(x, y, z, t) \in F$ si et seulement si $(x, y, z, t) = \left(x,\ y,\ x + y,\ \frac{1}{2}(y - x)\right) = \left(x,\ 0,\ x,\ -\frac{1}{2}x\right) + \left(0,\ y,\ y,\ \frac{1}{2}y\right)$, soit $(x, y, z, t) = x\left(1, 0, 1,\ -\frac{1}{2}\right) + y\left(0, 1, 1,\ \frac{1}{2}\right)$. $\left\{\left(1, 0, 1,\ -\frac{1}{2}\right), \left(0, 1, 1,\ \frac{1}{2}\right)\right\}$ est donc un système générateur de F. Les deux vecteurs $\left(1, 0, 1, -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(0, 1, 1,\ \frac{1}{2}\right)$ étant linéairement indépendants, ils forment une base de F et $dimF = 2$.

Exercice 14

Consigne

Soient trois vecteurs linéairement indépendants e_1, e_2 et e_3 d'un espace vectoriel V. Que peut-on dire de $dimV$?

Correction

$dimV$ est supérieure ou égale à 3.

Exercice 15

Consigne

Donner une base et la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\{(\lambda - \mu, \lambda + \mu, 2\lambda - \mu)$; $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}\}$.

Correction

Posons $G = \{(\lambda - \mu, \lambda + \mu, 2\lambda - \mu); \lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}\}$.

$(x, y, z) \in G$ si et seulement si $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, 2\lambda) + (-\mu, \mu, -\mu) = \lambda(1,1,2) + \mu(-1,1,-1)$. Les deux vecteurs $(1,1,2), (-1,1,-1)$ engendrent donc G. Ces deux vecteurs sont indépendants (car non proportionnels) ils forment une base de G et $dimG = 2$.

Exercice 16

Consigne

1) Montrer que l'ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - 2y + z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Soit F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,1,1)$ et $(3,1,-1)$. Vérifier que $F \subseteq E$. A-t-on $E = F$?

Correction

1) $(x, y, z) \in E$ si et seulement si $(x, y, z) = (x, y, 2y - x) = x(1,0,-1) + y(0,1,2)$. E est donc l'ensemble des combinaisons linéaires des deux vecteurs $(1,0,-1)$ et $(0,1,2)$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On peut rajouter que les vecteurs $(1,0,-1)$ et $(0,1,2)$ engendrent E. Ces deux vecteurs sont indépendants (car non proportionnels) ils forment une base de E et $dimE = 2$.

2) $(1,1,1) \in E$ (en effet $1 - 2 \times 1 + 1 = 0$) et $(3,1,-1) \in E$ (en effet $3 - 2 \times 1 - 1 = 0$). E étant un sous-espace vectoriel, s'il contient $(1,0,-1)$ et $(0,1,2)$, il contient toutes les combinaisons linéaires de ces deux vecteurs et $F \subseteq E$. D'autre part F est engendré par deux vecteurs indépendants (car non proportionnels), ces vecteurs forment donc une base de F et $dimF = 2$. En récapitulant on $F \subseteq E$ et $dimE = dimF$, donc $E = F$.

Exercice 17

Consigne

Montrer que l'ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x - y + 2z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base et la dimension de E.

2) Soit F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1,2,0)$ et $v = (2,1,1)$, déterminer que $E \cap F$.

Correction

1) $(x, y, z) \in E$ si et seulement si $(x, y, z) = (x, 2x + 2z, z) = x(1,2,0) + z(0,2,1)$. E est donc l'ensemble des combinaisons linéaires des deux vecteurs $(1,2,0)$ et $(0,2,1)$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Les vecteurs $(1,2,0)$ et $(0,2,1)$ engendrent E. Ces deux vecteurs sont indépendants (car non proportionnels) ils forment une base de E et $dimE = 2$.

2) $(w=(x,y,z)\in E)\Leftrightarrow(2x-y+2z=0)$

$(w=(x,y,z)\in F)\Leftrightarrow(\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}; w=\lambda u+\mu v)$

$(w=(x,y,z)\in E\cap F)\Leftrightarrow\{w\in E$ et $w\in F\}$.

Donc $(w=(x,y,z)\in E\cap F)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y+2z=0\\ x=\lambda+2\mu\\ y=2\lambda+\mu\\ z=\mu\end{cases}$

Soit $2(\lambda+2\mu)-(2\lambda+2\mu)+\mu=0$ et $\mu=0$. D'où $(x,y,z)=\lambda(1,2,0)=u$.

Réciproquement, on vérifie que si $w=\ \lambda u$ alors $w\in E\cap F$.

Donc $E\cap F=\langle u\rangle$.

Remarque : Ici d'après 1) on a évidemment $u\in E\cap F$ et puisque $E\cap F$ est un sous-espace vectoriel $\langle \mathrm{u}\rangle\subset E\cap F$ et $dimE\cap F\geq 1$. Puisque $dimE=dimF=2$ (u et v étant non proportionnels, ils forment une base de F), $dimE\cap F\leq 2$ (en effet $E\cap F\subset E$ et $E\cap F\subset F$). D'autre part si $dimE\cap F=2, E\cap F=E=F$. Or $v\notin E\cap F$ et $E\cap F\neq F$. Donc $dimE\cap F=1$ et $E\cap F=\langle u\rangle$.

Exercice 18

Consigne

Démontrer que dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $u=(2,3,-1)$ et $v=(1,-1,-2)$ d'une part, et les vecteurs $u'=(3,7,0)$ et $v'=(5,0,-7)$ d'autre part, engendrent le même sous-espace vectoriel.

Correction

Remarquons que $\{u,v\}$ et $\{u',v'\}$ sont deux systèmes de rang 2 (les vecteurs u et v d'une part, u' et v' d'autre part sont non proportionnels). Donc $E=\langle u,v\rangle$ et $F=\langle u',v'\rangle$ sont de dimension 2 et pour montrer que $E=F$ il suffit de montrer que $F\subset E$. Or si on montre que u' et v' appartiennent à E, E étant un sous espace vectoriel, il contiendra alors toutes les combinaisons linéaires de u' et v', c'est à dire F. Il suffit donc de montrer que u' et v' appartiennent à E.

$(u'\in E)\Leftrightarrow(\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}\,; u'=\alpha u+\beta v)$.

La dernière expression se traduit par :

$\begin{cases}3=2\alpha+\beta\\ 7=3\alpha-\beta\\ 0=-\alpha-2\beta\end{cases}$ soit $\begin{cases}10=5\alpha\\ 7=3\alpha-\beta\\ 0=-\alpha-2\beta\end{cases}$, $\alpha=2$ et $\beta=-1$ conviennent, et $u'\in E$.

De même :

$(v' \in E) \Leftrightarrow (\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,; v' = \alpha u + \beta v)$.

La dernière expression se traduit par :

$\begin{cases} 5 = 2\alpha + \beta \\ 0 = 3\alpha - \beta \\ -7 = -\alpha - 2\beta \end{cases}$ soit $\begin{cases} 5 = 5\alpha \\ 0 = 3\alpha - \beta \\ -7 = -\alpha - 2\beta \end{cases}$, $\alpha = 1$ et $\beta = 3$ conviennent, et $v' \in E$. D'où le résultat.

Exercice 19

Consigne

Montrer que les ensembles suivants sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ dont on déterminera la dimension et une base :

$A = \{(\lambda + \mu, 2\lambda, \lambda - 2\mu, \mu); \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$

$B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - z = y - t\}$

Correction

$X \in A$ si et seulement si $X = ((\lambda + \mu, 2\,\lambda, \lambda - 2\,\mu, \mu) = \lambda(1,2,1,0) + \mu(1,0,-2,1)$. A est donc l'ensemble des combinaisons linéaires de $u = (1,2,1,0)$ et $v = (1,0,-2,1)$ et d'après le cours $A = \langle u, v\rangle$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Puisque u et v sont indépendants (non proportionnels) ils forment une base de A (ils sont évidemment générateurs) et $dimA = 2$.

$X = (x, y, z, t) \in B$ si et seulement si $X = (y + z - t, y, z, t)$.

Soit $X = y(1,1,0,0) + z(1,0,1,0) + t(-1,0,0,1)$. B est donc l'ensemble des combinaisons linéaires de $u' = (1,1,0,0)$, $v' = (1,0,1,0)$ et $w' = (-1,0,0,1)$ et d'après le cours $B = \langle u', v', w'\rangle$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Montrons que ces trois vecteurs sont indépendants :

Soit λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels tels que $\lambda_1 u' + \lambda_2 v' + \lambda_3 w' = 0$. Cela se traduit par : $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$ d'où nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Les vecteurs sont bien indépendants et forment une base de B (ils sont évidemment générateurs) et $dimB = 3$.

Exercice 20

Consigne

Soit $S_1 = \{u_1 = (a, 1,1), u_2 = (-1, -a, -1), u_3 = (1,1, a)\}$

et $S_2 = \{v_1 = (a, 1,1), v_2 = (-1, -a, -1), v_3 = (-1, -1, a)\}$

Déterminer suivant les valeurs de a le rang de S_1 ainsi que celui de S_2.

Correction

Calculons le déterminant D_1 des trois vecteurs de S_1 :

$D_1 = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -a^3 + 3a - 2 = (a-1)^2(-a-2)$. Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ $D_1 \neq 0$ et les vecteurs sont indépendants, le rang de S_1 est alors 3.

Si $a = 1, D_1 = 0$ et $rang(S_1) \leq 2$. Or $S_1 = \{(1,1,1), (-1, -1, -1), (1,1,1)\}$. Les trois vecteurs de S_1 sont proportionnels et non nuls, donc $rang(S_1) = 1$.

Si $a = -2, D_1 = 0$ et $rang(S_1) \leq 2$. Or $S_1 = \{(-2,1,1), (-1,2, -1), (1,1, -2)\}$. Les deux premiers vecteurs de S_1 sont indépendants car non proportionnels, le rang de S_1 est donc 2.

Calculons le déterminant D_2 des trois vecteurs de S_2 :

$D_2 = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & -a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -a^3 - a + 2 = (a-1)(-a^2 - a - 2)$. Remarquons que le discriminant de $-a^2 - a - 2$ est négatif et donc que $-a^2 - a - 2$ ne s'annule pas.

Donc si $a \neq 1, D_2 \neq 0$ et les vecteurs sont indépendants, le rang de S_2 est donc 3.

Si $a = 1, D_2 = 0$ et $rang(S_2) \leq 2$. Or $S_2 = \{(1,1,1), (-1, -1, -1), (-1, -1,1)\}$. Les deux derniers vecteurs de S_2 sont indépendants car non proportionnels, donc $rang(S_2) = 2$.

Exercice 21

Consigne

Soit $v_1 = (4,0,-2), v_2 = (-8,1,5)$ et $v_3 = (2,0,0)$. Ces vecteurs sont-ils indépendants ?

On considère le sous espace vectoriel V engendré par v_1 et v_2. Quelle est sa dimension ? Donner une base de V. v_3 appartient-il à V ? $v_4 = (-4,2,4)$ appartient-il à V ? A quelle condition sur a, b et c un vecteur $w = (a, b, c)$ appartient-il à V ?

Correction

On calcule le déterminant du système suivant : $\{(4,0,-2), (-8,1,5), (2,0,0)\}$.

$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Ces vecteurs sont linéairement indépendants.

v_1 et v_2 sont linéairement indépendants (non proportionnels), ils forment donc une base de V et $dimV = 2$.

Si v_3 était un vecteur de V il serait une combinaison linéaire de v_1 et v_2 et les trois vecteurs v_1, v_2 et v_3 seraient dépendants. C'est impossible d'après le résultat précédent. Donc $v_3 \notin V$.

Remarque importante : On va montrer un résultat utile pour les exercices et que vous pourrez utiliser par la suite sans le démontrer :

Si v_1 et v_2 sont indépendants :

$(w \in \langle v_1, v_2 \rangle) \Leftrightarrow (\{v_1, v_2, w\}$ est lié$)$.

Remarque : Si on oublie l'hypothèse "v_1 et v_2 sont indépendants", le résultat est faux !! (c.f. exercice 23).

Si $w \in \langle v_1, v_2 \rangle$, on a évidemment $\{v_1, v_2, w\}$ lié, puisque $w = av_1 + bv_2$. $(av_1 + bv_2 - w = 0$ et tous les coefficients ne sont pas nuls puisque l'un vaut $-1)$.

Réciproque : si $\{v_1, v_2, w\}$ est lié, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 w = 0$ et les coefficients ne sont pas tous nuls. Si $\lambda_3 \neq 0,\ w = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} v_2$ et $w \in \langle v_1, v_2 \rangle$. CQFD

D'après le résultat précédent : $(v_4 \in V) \Leftrightarrow (D = dét(v_1, v_2, v_4) = 0)$.

Or $D = \begin{vmatrix} 4 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 32 - (8 + 40) = 0$. Donc $v_4 \in V$.

De même : $(w = (a, b, c) \in V) \Leftrightarrow (D_w = d\acute{e}t(v_1, v_2, w) = 0)$.

Or $D_w = \begin{vmatrix} 4 & -8 & a \\ 0 & 1 & b \\ -2 & 5 & c \end{vmatrix} = 4c + 16b - (-2a + 20b) = 2a - 4b + 4c$.

Donc : $(w = (a, b, c) \in V) \Leftrightarrow (a - 2b + 2c = 0)$

Exercice 22

Consigne

1) Soit $v_1 = (-1,1,0), v_2 = (1,0,2)$ et F, le sous-espace vectoriel engendré par v_1 et v_2.

a) A quelle condition sur x, y et $z, v = (x, y, z)$ appartient-il à F ?

b) Soit $v_3 = (1,1,-1)$, $v_4 = (1,1,2)$ et $v_5 = (0,1,2)$. Déterminer les rangs des systèmes suivants : $\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_2, v_5\}$ et $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

2)* On se place dans un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Dire si la proposition suivante est vraie :

$$(S = \{e_1, e_2, e_3\} \text{ lié }) \Rightarrow (e_3 \in < e_1, e_2 >)$$

Si la réponse est affirmative, la prouver. Si la réponse est négative, donner un contre-exemple.

Correction

1) a) En utilisant la remarque de l'exercice précédent, puisque v_1 et v_2 sont indépendants :

$V = (x, y, z)$ appartient à F si et seulement si $\begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & z \end{vmatrix} = 0$.

Or $\begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & z \end{vmatrix} = 2\,x + 2\,y - z$. La condition demandée est donc : $2\,x + 2\,y - z = 0$

b) $\{v_1, v_2, v_3\}$: le déterminant de ce système est $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 1 = 5 \neq 0$ le rang de ce système est donc trois.

$\{v_1, v_2, v_4\}$: le déterminant de ce système est $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 2 = 2 \neq 0$. Ces trois vecteurs forment donc un système de rang 3.

$\{v_1, v_2, v_5\}$ le déterminant de ce système est $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$, les trois vecteurs sont donc liés.

Mais les vecteurs v_1, v_2 sont indépendants (non proportionnels), le rang de ce système est donc 2.

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$: les vecteurs de ce système sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, donc le rang de ce système est inférieur ou égal à 3. Le rang du système $\{v_1, v_2, v_3\}$ est 3. Ces quatre vecteurs forment donc un système de rang 3.

2) A-t-on ($S = \{e_1, e_2, e_3\}$ lié) $\Rightarrow e_3 \in \langle e_1, e_2 \rangle$) ?

Contre-exemple : si on choisit $e_1 = (1,1,1), e_2 = (2,2,2)$ et $e_3 = (1,0,0)$, ce système est lié et pourtant e_3 n'appartient pas à $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1 \rangle$.

L'affirmation est donc fausse. Néanmoins elle est vraie si on rajoute l'hypothèse " $e_1$et $\boldsymbol{e_2}$ **sont indépendants".**

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 2, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).