

# Espaces vectoriels

---

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

---

## Table des matières

<b>Introduction</b> .....	<b>2</b>
<b>Cas d'application</b> .....	<b>3</b>
<b>Définitions – exemples</b> .....	<b>4</b>
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ .....	<b>4</b>
<b>Combinaisons linéaires – Sous-espaces vectoriels</b> .....	<b>5</b>
<b>Systèmes générateurs – libres – liés – bases</b> .....	<b>6</b>
Méthode de Gauss .....	<b>6</b>
Systèmes générateurs .....	<b>7</b>
Systèmes libres (ou indépendants), systèmes liés (ou dépendants).....	<b>7</b>
Un outil utile : le déterminant .....	<b>8</b>
Bases et dimension d'un espace vectoriel.....	<b>8</b>
<b>Références</b> .....	<b>11</b>

## Introduction

**Objectif de la leçon** : Cette leçon est la première d'une série de deux. Elle aborde l'algèbre linéaire, outil très utile pour les Statistiques et pour la résolution de nombreux problèmes mathématiques qui peuvent s'écrire sous forme matricielle. La notion de matrice sera introduite dans la leçon 10 et sera développée en L2.

L'objectif de cette leçon est d'acquérir les différentes notions liées aux espaces vectoriels et à leurs éléments qui sont des vecteurs. On se placera dans le cadre de  $\mathbb{R}^n$ .

## Cas d'application

Voici une situation concrète où les notions théoriques que nous introduisons dans les paragraphes suivants interviennent.

Considérons une banque qui propose à ses clients un portefeuille en plusieurs monnaies permettant par exemple l'achat d'actions étrangères sans frais de change.

Chaque portefeuille contient une valeur de  $x$  euros,  $y$  dollars,  $z$  yens et  $t$  francs suisses. On notera un tel portefeuille par  $(x, y, z, t)$ .

Ainsi  $(500, 800, 3000, 1000)$  désigne un portefeuille (noté  $A$  plus loin) de 500 euros, 800 dollars, 3000 yens et 1000 francs suisses.

On doit pouvoir faire la somme de deux portefeuilles  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$ . On ne peut bien-sûr qu'ajouter les valeurs d'une même monnaie et naturellement, on posera :

$$(x_1, y_1, z_1, t_1) + (x_2, y_2, z_2, t_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$$

Si on considère un portefeuille  $B$ ,  $(50, 10, 200, 100)$ , la somme des deux portefeuilles  $A$  et  $B$  est donc  $(550, 810, 3200, 1100)$ , soit de 550 euros, 810 dollars, 3200 yens et 1100 francs suisses.

D'autre part, chaque année, chaque portefeuille est soumis à une taxe de 0,2% (frais de garde). On définira alors l'opération produit suivante

$$0,002(x, y, z, t) = (0,002x, 0,002y, 0,002z, 0,002t)$$

Donc les taxes relatives au portefeuille  $A$  seront  $(1, 1,6, 6, 2)$ , c'est à dire 1 euros, 1,6 dollars, 6 yens et 2 francs suisses.

Sur cet ensemble de portefeuilles (que nous noterons  $\wp$ ), on a ainsi défini deux opérations (somme de deux portefeuilles et produit d'un portefeuille par un nombre réel).

Dans la suite de ce cours, nous allons généraliser cette situation, attribuer des propriétés naturelles aux opérations et munir ainsi les ensembles sur lesquels elles sont définies (ici  $\wp$ ) d'une structure algébrique simple (**d'espace vectoriel**) permettant des « manipulations » intéressantes. Les portefeuilles seront appelés **vecteurs**.

## Définitions – exemples

### L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Les éléments de  $\mathbb{R}^n$  sont des suites finies de  $n$  termes réels :  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ).

On peut définir sur  $\mathbb{R}^n$  une loi de composition interne, l'addition, notée  $+$  par : pour tous  $X$  et  $Y$  de  $\mathbb{R}^n$ .

$$X + Y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

#### Propriétés de l'addition dans $\mathbb{R}^n$ :

- Elle est associative : (pour tout  $X, Y, Z$ ) :  $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z = X + Y + Z$
- Elle est commutative : pour tout  $X$  et  $Y$ ,  $X + Y = Y + X$ .
- Elle a un élément neutre  $0 = (0, 0, \dots, 0)$  : pour tout  $X$ ,  $X + 0 = 0 + X = X$ .
- Tout élément  $X$  a un opposé noté  $-X = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$  :  $X + (-X) = (-X) + X = 0$ .

On peut aussi définir sur  $\mathbb{R}^n$  une loi de composition externe, produit par un réel, noté  $\cdot$ . Ou parfois sans signe, par : **pour tout réel  $\lambda$  et pour  $X$  de  $\mathbb{R}^n$**   $\lambda \cdot X = \lambda X = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ .

#### Propriétés du produit par un réel :

- Pour tous réels  $\lambda$  et  $\mu$ , pour tout élément  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  :  $(\lambda + \mu) \cdot X = \lambda \cdot X + \mu \cdot X$
- Pour tous éléments  $X$  et  $Y$  de  $\mathbb{R}^n$ , pour tout réel  $\lambda$  :  $\lambda \cdot (X + Y) = \lambda \cdot X + \lambda \cdot Y$
- Pour tous réels  $\lambda$  et  $\mu$ , pour tout élément  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  :  $\lambda \cdot (\mu \cdot X) = (\lambda\mu) \cdot X$
- Pour tout élément  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  :  $1 \cdot X = X$ .

L'ensemble  $\mathbb{R}^n$ , muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . On note parfois  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

Un ensemble  $V$ , muni d'une loi de composition interne (qui à deux éléments de  $V$  fait correspondre un élément de  $V$ ) et d'une loi de composition externe (qui à un élément de  $\mathbb{R}$  et à un élément de  $V$  fait correspondre un élément de  $V$ ) ayant les huit propriétés énoncées précédemment est appelé espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Ses éléments sont appelés vecteurs.

**Remarque :** On peut aussi définir des espaces vectoriels sur des ensembles  $K$ , qui ont la même structure algébrique que  $\mathbb{R}$ , appelée corps (par exemple  $\mathbb{Q}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Mais nous utiliserons essentiellement des espaces vectoriels réels dans ce cours.

## Combinaisons linéaires – Sous-espaces vectoriels

Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

On appelle combinaison linéaire de  $p$  vecteurs  $X_1, X_2, \dots, X_p$  de  $V$ , un vecteur de la forme  $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_p X_p = \sum_{i=1}^p \lambda_i X_i$  avec  $\lambda_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, p)$ .

**Définition** : Si  $V$  est un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{R}$ , on appelle sous-espace vectoriel de  $V$ , toute partie de  $V$  qui est elle-même un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

Une partie  $W$  de  $V$  sera donc un sous espace vectoriel de  $V$ , si elle est stable par rapport aux deux lois. C'est-à-dire si la somme de deux éléments de  $W$  est encore un élément de  $W$  et si le produit d'un élément de  $W$  par un réel reste dans  $W$ . En effet les propriétés qui sont valables dans  $V$  le resteront alors dans  $W$ .

**Propriété** :  $W$  est un sous espace vectoriel de  $V$  si et seulement si :

- $W$  est non vide,
- Pour tous  $X$  et  $Y$  de  $W, X + Y \in W$ ,
- Pour tout  $X$  de  $W$  et pour tout réel  $\lambda : \lambda \cdot X \in W$ .

Cette propriété peut être remplacée par :  $W$  est non vide et pour tous  $X$  et  $Y$  de  $W$  et pour tous réels  $\lambda$  et  $\mu : \lambda \cdot X + \mu \cdot Y \in W$ .

**Remarque** : Pour que  $W$  soit un sous-espace vectoriel de  $V$ , il est nécessaire que  $W$  contienne  $0$  (élément neutre de  $V$ ). Si on donne la valeur  $0$  à  $\lambda$  dans la deuxième condition, on retrouve ce résultat.

**Propriété** : L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .

**Démonstration** : Soient  $E$  et  $F$  deux sous-espaces vectoriels de  $V$ , on note  $E \cap F$  leur intersection et  $\emptyset$  l'ensemble vide. On a alors :

i)  $E \cap F \neq \emptyset$  car  $0 \in E \cap F$  étant donné que  $E$  et  $F$  sont des sous-espaces vectoriels de  $V$  et contiennent  $0$ .

ii) pour tous  $X$  et  $Y$  éléments de  $E \cap F$ ,  $X + Y \in E$  car  $X$  et  $Y$  sont des éléments de  $E$  qui est un sous-espace vectoriel de  $V$ . De même, puisque  $X$  et  $Y$  appartiennent au sous-espace vectoriel  $F$ ,  $X + Y \in F$ . On a donc :  $X + Y \in E$  et  $X + Y \in F$  alors  $X + Y \in E \cap F$ .

iii) pour tout  $X \in E \cap F$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $X \in E \cap F$ , donc  $X \in E$  et comme  $E$  est un sous-espace vectoriel alors :  $\lambda X \in E$ .  $X \in E \cap F$ , donc  $X \in F$  et comme  $F$  est un sous-espace vectoriel alors :  $\lambda X \in F$ . D'où finalement :  $\lambda X \in E \cap F$ .

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est donc bien un sous-espace vectoriel de  $V$ .

**Attention**, on montre par contre que la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel.

**Notation** : On note  $\langle X_1, \dots, X_p \rangle$  ou  $\text{vect}(X_1, \dots, X_p)$  l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs  $X_1, \dots, X_p$  de  $V$ .

**Propriété** :  $\langle X_1, \dots, X_p \rangle$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .

**Démonstration** : Soit  $X \in F$ ,  $Y \in F$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Donc  $X = \sum_{i=1}^p x_i X_i$  et  $Y = \sum_{i=1}^p y_i X_i$  et  $\lambda X + \mu Y = \lambda \sum_{i=1}^p x_i X_i + \mu \sum_{i=1}^p y_i X_i = \sum_{i=1}^p (\lambda x_i + \mu y_i) X_i$ .

Et  $\lambda X + \mu Y \in F$ .  $F$  est donc bien un sous-espace vectoriel de  $V$ .

## Systèmes générateurs – libres – liés – bases

### Méthode de Gauss

La méthode de Gauss permet de résoudre des systèmes de  $n$  équations à  $n$  inconnues.

Utilisons-la sur un exemple où  $n = 3$

Soit résoudre le système ( $S$ ) :

$$(S) \begin{cases} x - 2y + 3z = 1(1) \\ 2x - y - z = 0(2) \\ x + y - z = -4(3) \end{cases} \text{ On remplace (2) par } (-2)(1)+(2) \text{ pour annuler le coefficient de } x \text{ dans (2)}$$

On remplace (3) par  $-(1) + (3)$  pour annuler le coefficient de  $x$  dans (3) d'où ( $S_1$ ) :

$$(S_1) \begin{cases} x - 2y + 3z = 1(1) \\ 3y - 7z = -2(2) \\ 3y - 4z = -5(3) \end{cases} \text{ On remplace (3) par } -(2) + (3) \text{ pour annuler le coefficient de } y \text{ dans (3)}$$

d'où ( $S_2$ )

$$(S_2) \begin{cases} x - 2y + 3z = 1(1) \\ 3y - 7z = -2(2) \\ 3z = -3(3) \end{cases} \text{ On obtient alors une résolution en cascade (3) donne } z = -1 \text{ (2) donne}$$

alors  $y = -3$  et (1) donne enfin  $x = -2$ .

### Remarques :

- Il est parfois intéressant de changer l'ordre des équations au départ pour simplifier les calculs. On a intérêt à ce que le coefficient de  $x$  soit le plus simple possible dans la première équation.
- Cette méthode se généralise de façon naturelle à 4, 5 ... ,  $n$  équations linéaires à 4, 5 ... ,  $n$  inconnues. Cette méthode permet de remplacer le système de départ par un système triangulaire équivalent et simple à résoudre.

## Systèmes générateurs

Soit  $V$ , un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition :** Soit  $X_1, X_2, \dots, X_p, p$  vecteurs d'un espace vectoriel  $V$ . On dit que ces vecteurs forment un système générateur de  $V$  si et seulement si tout vecteur  $X$  de  $V$  peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des  $X_i (i = 1, 2 \dots p)$ .

$$(S = \{X_1, X_2, \dots, X_p\} \text{ est générateur}) \Leftrightarrow \left( \forall X \in V, \exists \lambda_i \in \mathbb{R} (i = 1 \dots p); X = \sum_{i=1}^p \lambda_i X_i \right)$$

On dit aussi que les  $X_i$  engendrent  $V$ .

## Systèmes libres (ou indépendants), systèmes liés (ou dépendants)

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes intéressés aux systèmes de vecteurs générateurs, mais on peut se poser la question de savoir si ces systèmes ne comportent pas trop de vecteurs, si certains ne sont pas liés aux autres par combinaisons linéaires. D'où la définition suivante :

**Définition :** On dit que  $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$  est un système lié si et seulement si il existe des réels  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  non tous nuls tels que  $\sum_{i=1}^m \lambda_i X_i = 0$ .

Dans ce cas on dit aussi que les vecteurs  $X_i$  sont linéairement dépendants.

**Remarques :** 1) Cela équivaut à dire qu'au moins un des vecteurs (correspondant à  $\lambda_i$  non nul) s'exprime en fonction des autres. Car si  $\lambda_i \neq 0$  :

$$X_i = -\frac{1}{\lambda_i} (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_{i-1} X_{i-1} + \lambda_{i+1} X_{i+1} + \dots + \lambda_m X_m)$$

2) Deux vecteurs liés sont proportionnels.

Par contre s'il n'existe pas de  $\lambda_i, i = \{1, 2, \dots, m\}$  non tous nuls tels que  $\sum_{i=1}^m \lambda_i X_i = 0$ , on dit que le système est un système libre ou que les vecteurs  $X_i$  sont linéairement indépendants.

**Définition :**  $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$  est un système libre si et seulement si :

$$(\sum_{i=1}^m \lambda_i X_i = 0) \Leftrightarrow (\lambda_i = 0 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, m).$$

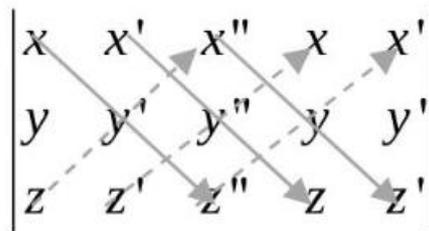
**Définition :** On appelle rang d'un ensemble (ou d'une famille) de vecteurs, le nombre le plus grand de vecteurs indépendants de l'ensemble.

## Un outil utile : le déterminant

Pour exprimer que deux vecteurs  $u(x, y)$  et  $v(x', y')$  de  $\mathbb{R}^2$  sont liés, on peut écrire que leurs coordonnées sont proportionnelles, soit  $xy' - yx' = 0$  et cela se note  $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0$ . Cette notation est le déterminant des vecteurs  $u$  et  $v$ .

De même pour exprimer que 3 vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  sont liés, on pourra écrire que leur déterminant est

nul : si  $u(x, y, z)$ ,  $v(x', y', z')$  et  $w(x'', y'', z'')$ , le déterminant de  $u, v$  et  $w$  sera :  $D = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + x'y''z + xz'' - (x''y'z + x'yz'' + xy''z')$ . Ce calcul se fait suivant la règle de Sarrus, dont on observera la symétrie pour bien la retenir. On a le schéma suivant :



Les produits le long des flèches descendantes de gauche à droite étant attribués du signe + et les autres (pointillées montantes de gauche à droite) du signe -.

Ainsi (résultat **admis** mais très **utile**) :

$$\{u(x, y, z), v(x', y', z'), w(x'', y'', z'')\} \text{ est lié si et seulement si } D = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

## Bases et dimension d'un espace vectoriel

Nous considérerons à partir de ce paragraphe des espaces vectoriels engendrés par un nombre fini de vecteurs. La notion de base d'un espace vectoriel correspond à celle d'un système générateur minimal, c'est à dire comportant le moins de vecteurs possible.

**Définition :** Soit  $V$ , un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , on appelle base de  $V$ , tout système générateur libre.

**Propriété** : Un système de vecteurs  $B$  est une base de  $V$ , si et seulement si tout vecteur de  $V$  peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de  $B$ .

Soit, si  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  tout  $X$  de  $V$  s'écrit  $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et les  $x_i$  sont uniques.

C'est l'intérêt des bases par rapport aux systèmes générateurs quelconques, ici la décomposition est unique.

**Démonstration** : Supposons que  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  soit générateur et libre. Soit  $X \in V$ , puisque  $B$  est générateur, il existe des réels  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tels que  $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . Supposons que cette décomposition ne soit pas unique et montrons que c'est absurde (raisonnement par l'absurde) ; soit donc  $\sum_{i=1}^n x'_i e_i$  une autre décomposition de  $X$ . On a donc  $\sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e_i$  et  $\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i) e_i = 0$  et l'un au moins des  $x_i$  est différent de  $x'_i$  ce qui contredit le fait que  $B$  soit libre, puisque l'un au moins des coefficients est non nul. D'où le résultat.

**Réciproque** : Supposons que tout vecteur de  $V$  se décompose de façon unique à l'aide des vecteurs de  $B$  et montrons que  $B$  est générateur et libre.  $B$  est évidemment générateur. D'autre part si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$  la décomposition de  $0$  étant unique et de la forme  $\sum_{i=1}^n 0 \cdot e_i$ , on en déduit que  $\lambda_i = 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .  $B$  est donc bien libre.

Les coefficients  $x_i$  intervenant dans la décomposition de  $X$  suivant la base  $B$  sont appelés coordonnées de  $X$  dans la base  $B$ . Ces coordonnées dépendent évidemment de la base choisie. On représente souvent les coordonnées d'un vecteur  $X$  par rapport à une base, sous la

forme d'une matrice colonne :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

$B = \{(1,0); (0,1)\}$  apparaît comme étant la base naturelle de  $\mathbb{R}^2$ , aussi on l'appelle base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Dans  $B$ ,  $(x,y)$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

De même  $B = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Et dans  $B$ ,  $(x,y,z)$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

Ceci peut se généraliser à  $\mathbb{R}^n$ .

$B = \{(1,0,0, \dots, 0), (0,1,0,0, \dots, 0); \dots; (0,0, \dots, 0,1)\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et si  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  
 $X = x_1(1,0,0, \dots, 0) + x_2(0,1,0, \dots, 0) + \dots + x_n(0,0, \dots, 1)$ .

Et les coordonnées de  $X$  dans  $B$  sont données par :  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

On admettra que :

**Théorème et définition** : Les bases d'un espace vectoriel  $V$  engendré par un nombre fini de vecteurs ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appelle la dimension de l'espace vectoriel et est notée  $\dim V$ .

**Propriété** : Pour tout système  $\Sigma$  de  $p$  vecteurs d'un espace vectoriel  $V$  de dimension  $n$ , on a les propriétés suivantes :

- Rang  $\Sigma \leq n$
- (Rang  $\Sigma = n$ )  $\Leftrightarrow$  ( $\Sigma$  est un système générateur de  $V$ )
- (Rang  $\Sigma = n$  et  $p = n$ )  $\Leftrightarrow$  ( $\Sigma$  est une base de  $V$ )
- (Rang  $\Sigma = n$  et  $p \geq n$ )  $\Leftrightarrow$  (on peut extraire de  $\Sigma$  une base de  $V$ )

On admet que :

**Théorème de la base incomplète** : Si  $\Sigma$  est un système de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension  $n$  et si rang  $\Sigma = r$  avec  $r < n$ , on peut construire une base de  $V$  contenant  $r$  vecteurs de  $\Sigma$ .

Autrement dit, puisque  $\Sigma$  est de rang  $r$ , contient  $r$  vecteurs  $X_1, X_2, \dots, X_r$  indépendants. Ces  $r$  vecteurs forment un système libre qui peut être complété par  $n - r$  vecteurs pour former une base de  $V$  :

$$\{X_1, X_2, \dots, X_r, e_1, e_2, \dots, e_{n-r}\}$$

Tout système libre est inclus dans une base et tout système générateur contient une base.

La propriété suivante est à retenir, elle peut être très utile pour les exercices et pour les années suivantes.

**Propriété** : Si  $A$  et  $B$  sont deux sous espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  tels que :  $A \subset B$  et  $\dim A = \dim B$ . Alors  $A = B$ .

En effet si  $\dim A = \dim B = p$ , une base de  $A$  est formée de  $p$  vecteurs  $V_1, \dots, V_p$  indépendants qui engendrent  $A$ , ces  $p$  vecteurs indépendants appartiennent aussi à  $B$  puisque  $A \subset B$  et forment une base de  $B$  étant donné qu'ils sont au nombre de  $p = \dim B$ .  $A$  et  $B$  sont deux sous espaces vectoriels engendrés par les mêmes vecteurs, ils sont donc égaux.

**Conséquence** : Si  $A$  est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n$ ,  $A = \mathbb{R}^n$ .

## Références

### Comment citer ce cours ?

Mathématiques 2, Odile Brandière, AUNEGe (<http://auneg.fr>), CC – BY NC ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).



Cette œuvre est mise à disposition dans le respect de la législation française protégeant le droit d'auteur, selon les termes du contrat de licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>). En cas de conflit entre la législation française et les termes de ce contrat de licence, la clause non conforme à la législation française est réputée non écrite. Si la clause constitue un élément déterminant de l'engagement des parties ou de l'une d'elles, sa nullité emporte celle du contrat de licence tout entier.