
Résistance Des Matériaux



Pierre STEPHAN
pierre.stephan@univ-tlse2.fr

Vincent BLANCHOT
vincent.blanchot@insa-toulouse.fr

Hypothèses de la résistance des matériaux

1. Sensibilisation



Où se situe t'on ?

La Résistance des Matériaux (que nous désignerons maintenant par RdM) est la science du dimensionnement. Elle est issue d'une théorie plus générale, la Mécanique des Milieux Continus, qui permet de concevoir une pièce mécanique, un ouvrage d'art ou tout objet utilitaire, c'est à dire d'abord imaginer les formes et le squelette géométrique qui remplissent les fonctions demandées ; et ensuite déterminer les quantités de matière nécessaires et suffisantes pour réaliser ces formes en assurant une résistance sans dommage de l'objet à tous les efforts auxquels il sera soumis pendant son service. Ce dimensionnement fait appel à des calculs qui prévoient le comportement de l'objet dont la conception doit réunir les meilleures conditions de sécurité, d'économie et d'esthétique.

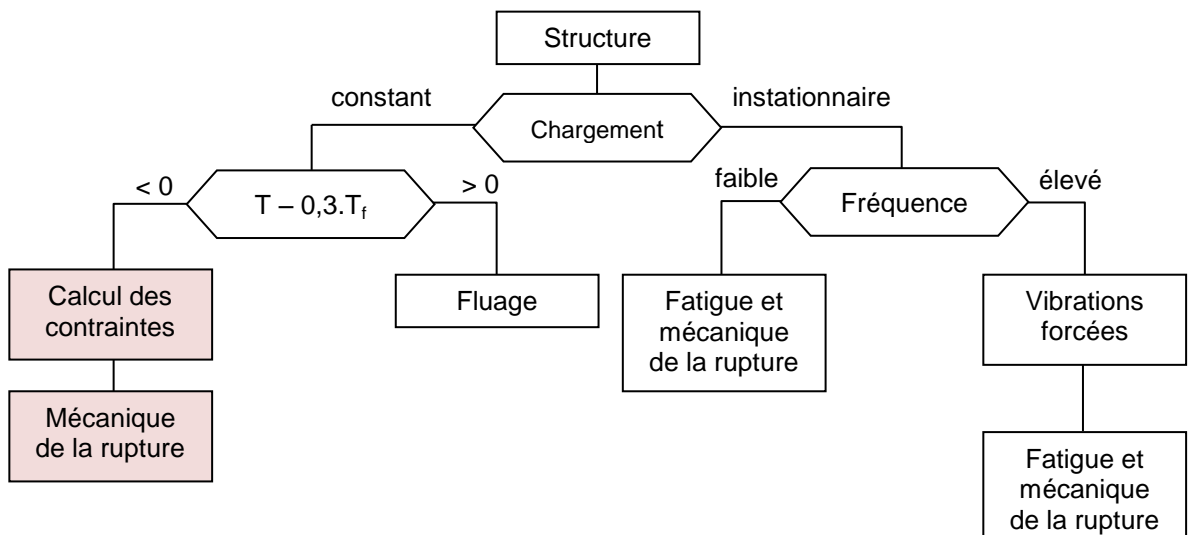
Le dimensionnement des structures s'appuie sur un grand nombre de principes physiques, l'endommagement pouvant résulter de problèmes de résistance "statique", de résistance à la fatigue, de corrosion, de gradients thermiques, de vibrations, etc ...

La première étape d'un calcul de dimensionnement est d'identifier le type de problème rencontré pour pouvoir s'appuyer sur les modèles correspondants et appropriés.

Le tableau ci-dessous peut constituer une aide à cette identification. On distingue de façon très schématique les problèmes liés au dimensionnement des pièces (calcul d'arbres par exemple) et les problèmes liés aux contacts (matage de surface, grippage par exemple). Parallèlement, on retrouve trois types de sollicitations (statiques, dynamiques, thermiques) qui conduisent à des modèles différents.

Sollicitations statiques	Sollicitations dynamiques	Sollicitations thermiques	
Résistance des matériaux - Critère résistance - Critère rigidité	Calcul à la fatigue Chocs Analyse vibratoire	Calculs thermiques Fluage	pièces-structure
Modèles Eléments - Finis			
Contacts étroits (modèle de Hertz) Critère statique (τ_{max})	critère dynamique (roulement)		Liaisons-contacts
Contacts larges (modèles simplifiés) Critère statique (matage)	critère dynamique et/ou thermique (p.V.)		

Pour aider au choix du type de dimensionnement, il est possible de s'appuyer sur le tableau ci-dessous extrait des "techniques de l'ingénieur".



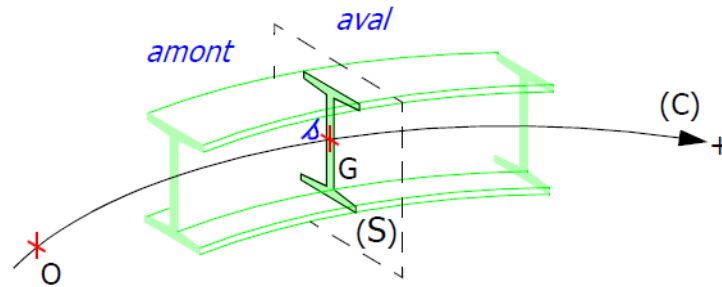
La RdM est une théorie simplifiée qui nécessite de ne s'intéresser qu'à des solides particuliers. Ainsi un certain nombre de restrictions sont nécessaires pour pouvoir utiliser la RdM. Ces restrictions portent sur la géométrie du solide étudié, le matériau dont il est constitué, et dans une moindre mesure les liaisons et les efforts extérieurs. Les chapitres suivants détaillent chacun de ces points.

2. Hypothèses sur la géométrie

Une poutre est définie par une courbe (C) appelé ligne moyenne et par une section droite (S) perpendiculaire à (C) un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre géométrique G décrit la ligne moyenne.



Définitions et hypothèses à connaître



Hypothèse 1 : La dimension de la ligne moyenne est grande devant les autres dimensions de la section droite (notion de corps élancés)

Hypothèse 2 : Les dimensions de la section droite ne peuvent varier que continûment.

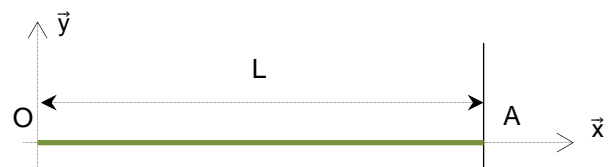
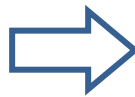
Exemple en Génie civil



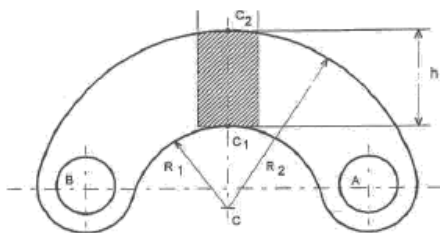
Exemples d'illustration



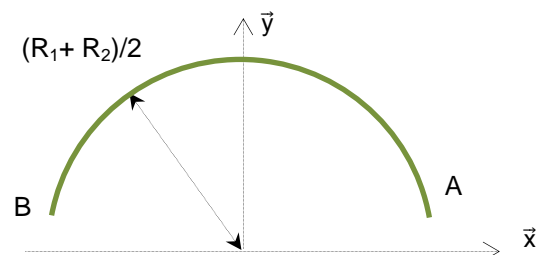
Modélisation géométrique



Exemple en Génie mécanique



Modélisation géométrique



Exemple d'une bielle de renvoi

Une origine O, un sens de parcours et une abscisse curviligne s sont mis en place.

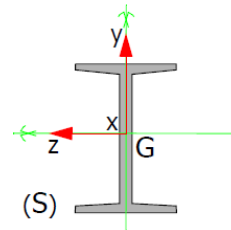
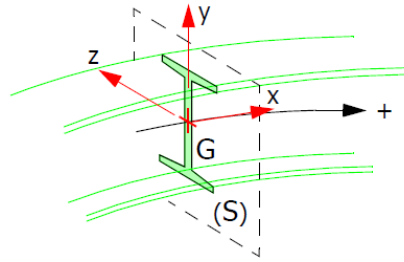
La section droite de centre G et d'abscisse s sépare la partie amont (tronçon de poutre situé avant G) et la partie aval (tronçon de poutre situé après G), conformément au sens de parcours.

On définit un système de coordonnées local (G,x,y,z). Ce repère local est défini de la manière suivante :

- G est le centre géométrique de la section.
- \vec{x} est tangent en G à la ligne moyenne dirigé dans le sens positif,
- \vec{y} et \vec{z} sont les directions principales de la section droite (S). Dans les cas traités dans ce cours les directions principales correspondent aux axes de symétrie de la section droite.



Pour aller plus loin ...



3. Hypothèses sur le matériau

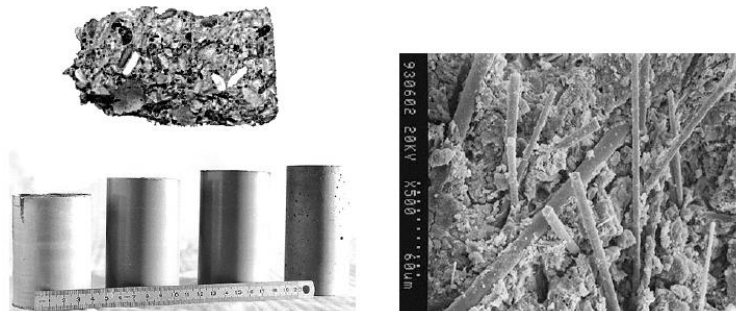
Pour toutes les études que nous mènerons en RdM, nous allons considérer que le matériau dont est constituée la poutre est un matériau homogène, isotrope et dont le comportement est linéaire.

3-1. Matériau homogène

L'homogénéité se dit d'un matériau qui présente des propriétés identiques en tout point.

Remarque : un milieu, quel qu'il soit, ne peut être considéré comme homogène qu'au dessus d'une certaine échelle dimensionnelle qui lui est propre.

Par exemple pour le béton, lorsqu'on regarde un pilier d'un pont suffisamment loin, on voit le béton comme homogène. Pourtant le béton est un matériau composite de granulats, de ciment, d'eau et d'adjuvants.



La remarque est identique dans le cas d'un acier par exemple.

3-2. Matériau isotrope

Un matériau est dit isotrope s'il présente les mêmes propriétés dans toutes les directions de l'espace.

Si l'on considère un matériau qui possède des fibres ayant une direction privilégiée (comme le bois) du fait de l'orientation particulière de ces fibres, ce matériau n'est pas isotrope.

Remarque : De même que l'homogénéité, l'isotropie n'apparaît qu'au-dessus d'une certaine échelle dimensionnelle.

S'agissant des caractéristiques mécaniques des matériaux, il est parfois assez intuitif de dire si un matériau est isotrope ou non.

3-3. Matériau élastique linéaire

Un matériau est dit élastique s'il retrouve entièrement sa forme ou son volume après avoir subi un cycle de charge/décharge quelconque. Son comportement est linéaire si la loi donnant la charge en fonction du déplacement est sur une droite passant par l'origine.

On peut aussi dire que lors du chargement, le chemin suivi sera le même que lors de la décharge. L'état actuel du matériau ne dépend donc que des charges appliquées à l'instant considéré et non du chemin suivi.

Sur la figure ci-dessous, on trouve des figures représentant la charge appliquée en fonction du déplacement pour un cycle de chargement/déchargement.

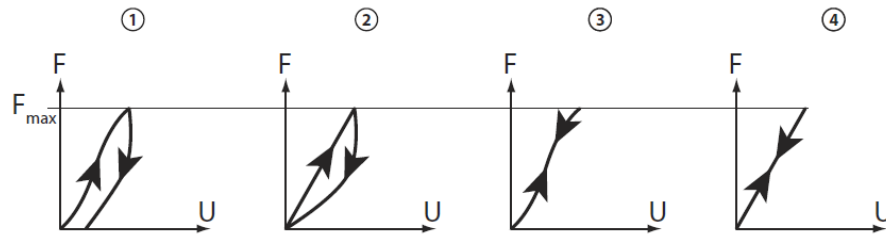
Sur la courbe 1, on observe un phénomène d'hystérésis (le solide ne reprend pas sa forme initiale)

Sur la courbe 2, le comportement n'est pas élastique car les deux chemins de charge et de décharge ne coïncident pas.



Définitions et hypothèses à connaître

Sur la courbe 3, le comportement n'est pas linéaire.
Seule la courbe 4 représente un comportement élastique linéaire.



Remarque : un matériau n'a pas un comportement mais des comportements qui dépendent d'un certain nombre de facteurs (chocs, température, chargements, ...)

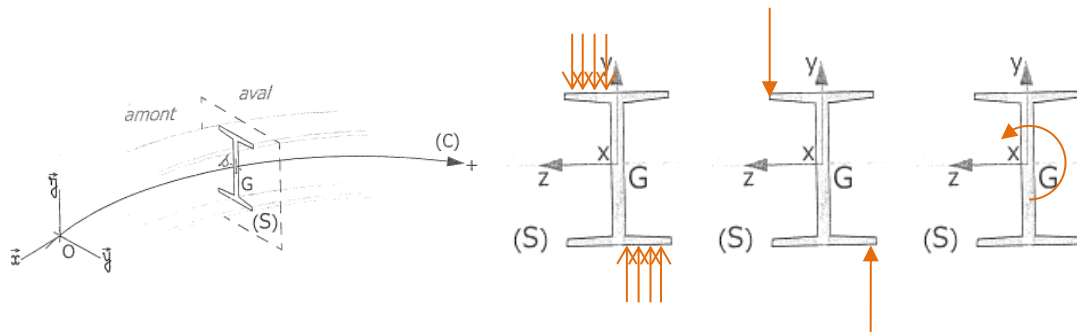
4. Principe de Saint-Venant



Principe à connaître

Etant donné un solide déformable, si sur une partie de sa frontière (D) on remplace une distribution de forces appliquées par une autre distribution, constituant un torseur équivalent, les sollicitations restent inchangées dans toute région du solide suffisamment éloignée de (D).

La conséquence directe de ce principe est que les résultats obtenus par un calcul de RDM sur une poutre ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des actions mécaniques extérieures concentrées et des liaisons.



Sur l'exemple, les trois chargements proposés sont équivalents et conduisent aux mêmes résultats en RDM.

5. Conditions aux limites

Les conditions aux limites qui s'appliquent sur une poutre sont de deux natures. Celles constituées par les liaisons avec l'extérieur, et celles liées à la présence du chargement.

5-1 Les liaisons avec le milieu extérieur

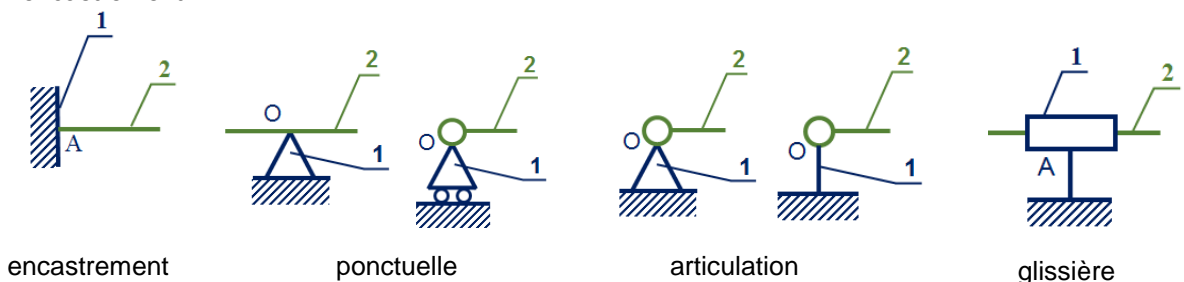


Principe à connaître

Les liaisons que l'on rencontre sont les liaisons classiques déjà connues.

Si on se borne aux poutres chargées dans leur plan, les différents types de liaisons imposées aux poutres sont

- L'appui simple,
- L'articulation,
- l'encastrement



encastrement

ponctuelle

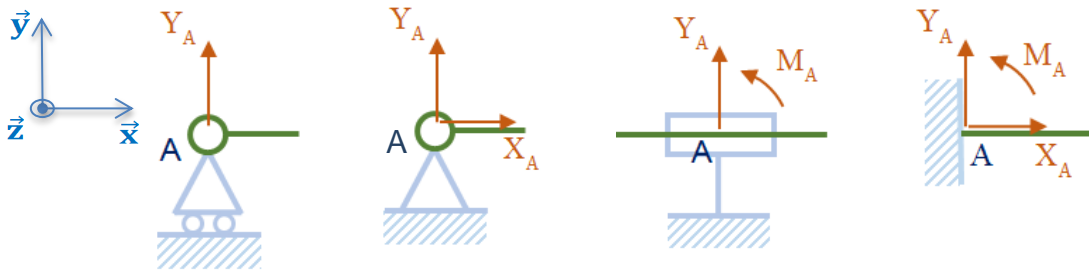
articulation

glissière

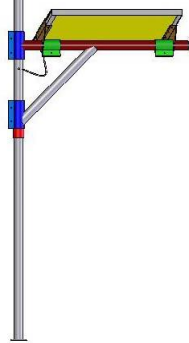
Les actions mécaniques associées s'appuient sur un modèle de liaison parfaite.
Rappel sur les actions transmissibles



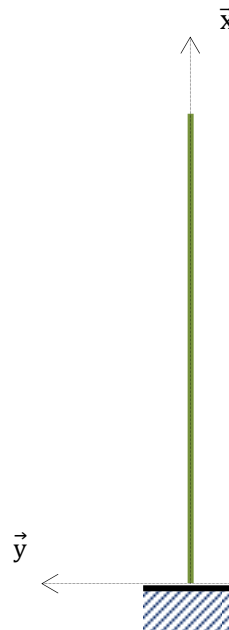
Actions transmissibles à connaître



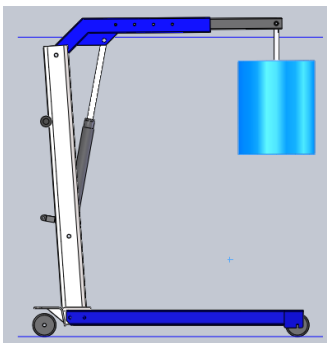
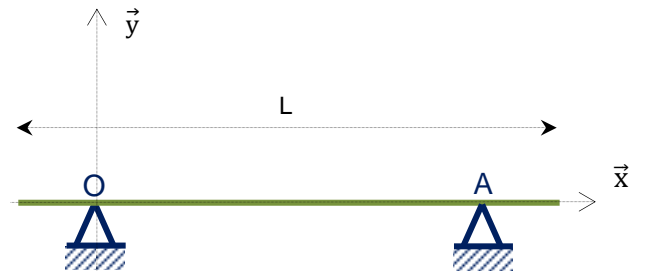
Exemples d'illustration



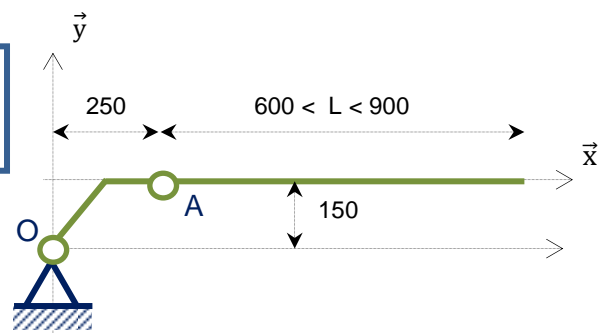
Modélisation géométrique et des liaisons



Modélisation géométrique et des liaisons



Modélisation géométrique et des liaisons



5-2 Le chargement

Les efforts extérieurs qui s'appliquent au modèle poutre sont principalement de deux types. Les forces extérieures peuvent être :

- concentrées,
- réparties de façon continue.

Les forces concentrées sont donc classiquement modélisées par des torseurs d'actions mécaniques exprimés au centre géométrique G d'une section (S).

Les forces linéiques sont réparties le long de la direction privilégiée x et sont exprimées en N/m.

Exemple d'une poutre posée sur deux appuis et soumise à son propre poids. La charge est alors répartie uniformément sur toute la longueur et vaut $q = \rho \cdot S \cdot g$ (charge par unité de longueur correspondant ici au poids par unité de longueur d'un élément de poutre)



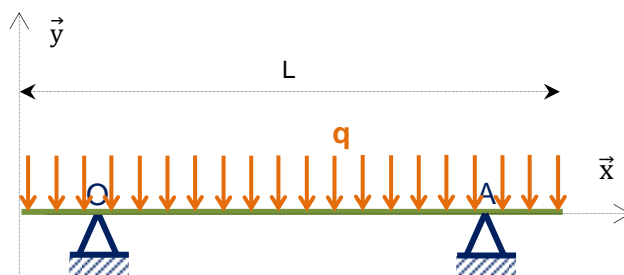
Principe à connaître



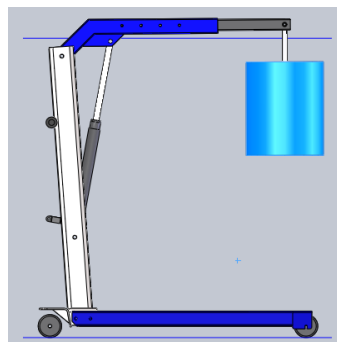
Exemples d'illustration



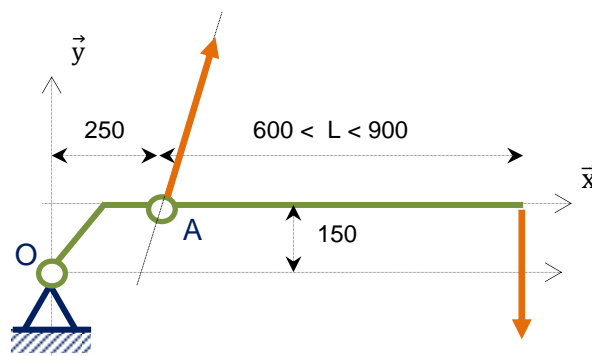
Modélisation du chargement



Exemple de la poutre de la potence soumise à une charge ponctuelle F appliquée en B et correspondant au poids de la charge à soulever. La force du vérin F_A en A est également modélisée. Sur cet exemple, on néglige l'action de la pesanteur sur le bras par rapport aux autres actions mécaniques.



Modélisation du chargement



Activités sur la modélisation en RDM

✓ MODÈLE GEOMETRIQUE

- Être capable d'identifier le modèle géométrique à partir du réel
- Connaître les hypothèses relatives au modèle poutre

Difficulté ★★★★★

✓ MODÈLE DE COMPORTEMENT

- Être capable d'identifier un modèle de comportement linéaire élastique sur une courbe
- Connaître les définitions d'un matériau homogène ou isotrope

Difficulté ★★★★★

✓ MODÈLE DE CHARGEMENT

- Savoir calculer la valeur d'une charge répartie due à l'action de la pesanteur
- Reconnaître la force équivalente à une charge répartie (dans un cas simple)
- Valider un modèle de chargement dans un cas simple

Difficulté ★★★★★

📄 Document d'accompagnement - charges réparties

✓ MODÈLE DE LIAISONS

- Connaître les symboles de liaison (degrés de liberté supprimés)
- Associer aux symboles de liaison la représentation des actions mécaniques transmissibles

Difficulté ★★★★★



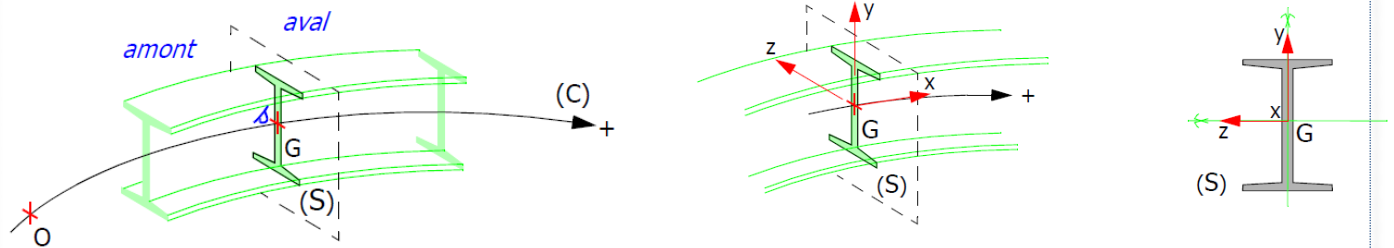
Sur MOODLE



La Résistance des Matériaux est la science du dimensionnement. Elle s'appuie sur une théorie simplifiée basée sur un certain nombre d'hypothèses.

✓ Hypothèse sur la géométrie

Les solides considérés sont des **poutres** possédant **une dimension grande devant les deux autres**. Elles sont **modélisées par leur ligne moyenne**, lieu des centres géométriques G des sections droites. Les dimensions de la section droite ne peuvent varier que **continûment**.



On définit un **système de coordonnées local (G,x,y,z)**:

- **G est le centre géométrique** de la section.
- \vec{x} est tangent en G à la ligne moyenne **dirigé dans le sens positif**,
- \vec{y} et \vec{z} sont les **directions principales** de la section droite (S).

✓ Hypothèse sur les matériaux

Le matériau dont est constituée la poutre est un matériau **homogène** (même propriété en tout point), **isotrope** (même propriété dans toutes les directions) et dont le comportement est **linéaire élastique**.

✓ Hypothèse sur les actions mécaniques appliquées

Les actions mécaniques agissant sur la poutre sont modélisées par leur **torseur équivalent défini au centre de la section droite** où ils sont appliqués.

On déduit que les résultats obtenus par un calcul de RdM **ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des actions mécaniques** extérieures concentrées et des liaisons (Principe de Saint-Venant).

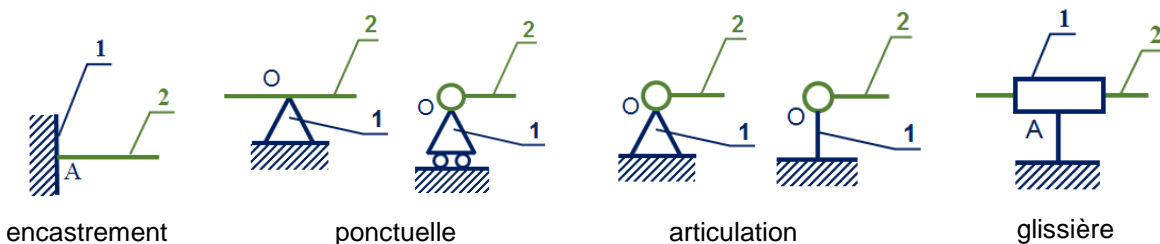
La modélisation d'un problème de RDM s'appuie sur trois étapes:

1. Une modélisation géométrique

La poutre est représentée par le lieu des centres de section G. Dans le cas des poutres droites, elle correspond à une portion de droite.

2. Une modélisation des liaisons

La représentation des liaisons est normalisée. Elles sont supposées parfaites.



3. Une modélisation du chargement

Les efforts extérieurs appliqués exprimés au centre de section droite sont modélisés

- Soit par des charges ponctuelles (en N)
- Soit par des charges réparties (charges linéiques en N/m)

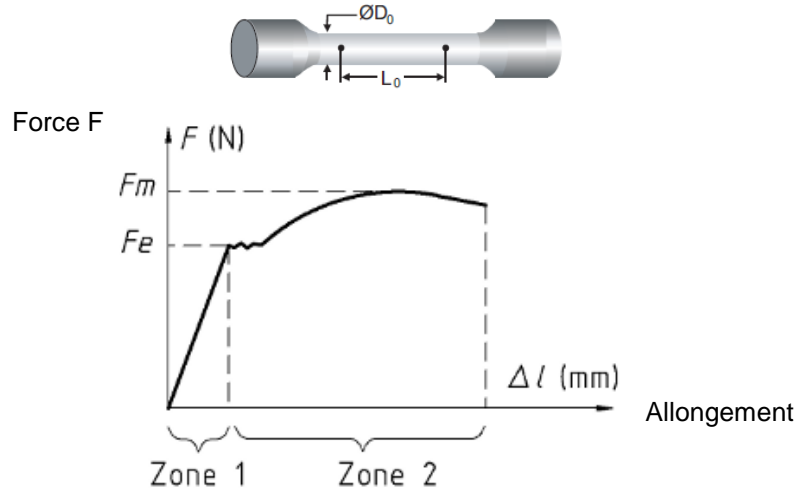
La notion de contrainte

1. L'essai de référence



Activité
faite en TP
sur le banc
DELTALAB

Les caractéristiques principales des matériaux sont définies à partir de l'essai de traction. Une machine d'essai permet de tirer avec un effort progressif F sur une éprouvette de forme normalisée. Un enregistrement de l'effort F et de l'allongement correspondant est effectué.



En répétant l'opération pour plusieurs éprouvettes, on constate que les courbes ne se juxtaposent pas. Par contre, si on définit en ordonnée l'effort divisé par l'aire de la surface de la section droite de l'éprouvette et en abscisse l'allongement divisé par la longueur utile L_0 de l'éprouvette, on obtient une seule et même courbe, quelle que soit l'éprouvette pour un même matériau.

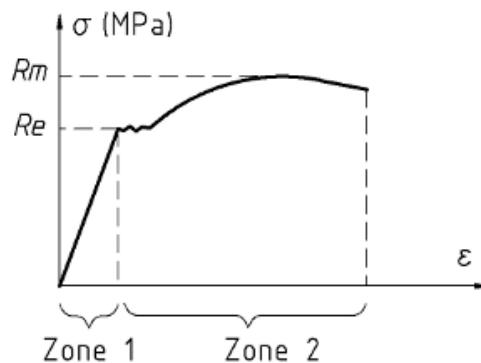
Il est donc nécessaire de définir deux nouvelles grandeurs:

- La contrainte σ_x correspondant à la force de traction divisée par la surface (exprimée en MPa)

$$\sigma_x = \frac{F}{S}$$

- La déformation ε_x correspondant à l'allongement par unité de longueur (exprimée en mm/mm)

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L}$$



Cette courbe comporte deux zones :

- la première zone où l'évolution de l'effort en fonction de l'allongement est linéaire est appelée la zone élastique (zone 1)
- La deuxième partie de la courbe est appelée la zone plastique (zone 2)

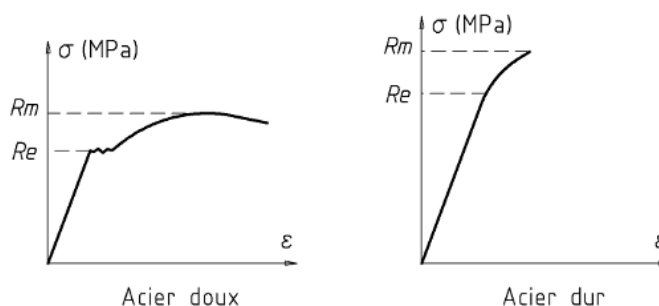
On ne s'intéressera ici qu'à la partie élastique linéaire de la courbe.

Pour délimiter la zone élastique, on définit une grandeur appelée limite élastique Re : tant que la contrainte est inférieure à cette limite, le matériau a un comportement élastique linéaire.



Grandeurs,
unités et
définitions à
connaître

Remarque: Pour certains matériaux, on peut avoir du mal à définir la zone de transition entre la partie élastique et la partie plastique (c'est le cas sur la figure ci-dessous des aciers durs). On définit alors une limite élastique à 0,2 % et notée R_p ou $R_{0,2}$. Cette valeur est obtenue en traçant une droite parallèle à la droite de comportement élastique et coupant l'axe des abscisses à 0,2 %.



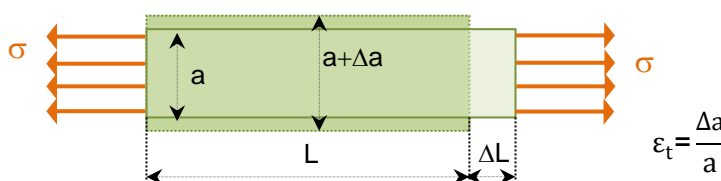
Grandeurs, unités et définitions à connaître

Dans la zone élastique, on peut écrire une relation linéaire entre la contrainte et la déformation. La pente de cette droite est appelée **module d'élasticité du matériau ou module d'Young**. Il est noté E et caractérise le matériau. Dans le domaine d'élasticité, on a :

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x$$

Remarque: Plus un matériau est dur et plus le module d'Young est important. En général, la zone plastique est alors plus réduite.

On constate également qu'en plus de la déformation longitudinale ϵ_x dans le sens de la traction, le matériau subit aussi une déformation ϵ_t dans la direction transversale (direction perpendiculaire à la déformation longitudinale).



Expérimentalement, on constate que le rapport est constant pour un matériau donné. Ce rapport est appelé **coefficient de Poisson** et est noté ν . On a donc :

$$\nu = \frac{\epsilon_t}{\epsilon_x}$$

Remarque: Le coefficient ν est borné : il est positif et inférieur à 0,5. La limite supérieure de 0,5 correspond à un matériau incompressible.

Caractéristiques de quelques matériaux :

- E [N/mm²] : module d'élasticité ou de Young.
- G [N/mm²] : module d'élasticité transversale.
- ν : nombre de Poisson.
- σ_l [N/mm²] : limite élastique en traction.
- $\rho \cdot 10^3$ kg/m³ : masse volumique.

Matériau	E	G	ν	σ_l	ρ	
Fer	200000	80000	0,24	200	7,80	
Acier XC10	216000	86400	0,29		7,80	
Acier C32	200000	80000	0,24	370	7,80	
Acier C45	200000	80000	0,24	400	7,80	
Acier 35NCD4	200000	80000	0,24	900	7,80	
Acier 45SCD6	220000	88000	0,28	1450	7,80	
Acier inox. 18.10	203000	81200	0,29	200	7,90	
Fonte grise courante	90000	36000	0,29	190	7,20	
Titane TA6V	105500	42200	0,34	300	4,50	
Alliage titane Ti 4 Al 4	115000	46000	0,34	900	4,42	
Aluminium	70500	28200	0,34	150	2,70	
Alliage Al 4 G	72000	28800	0,32	200	2,80	
Alliage Al 2 GN	75000	30000	0,34	370	2,80	
Zircal AZ 8 GU	72000	28800	0,34	550	2,80	
Cuivre	100000	40000	0,33	180	8,90	
Laiton Cu Zn 5	125000	50000	0,38	200	8,30	
Laiton Cu Zn 40	105000	42000	0,34	220	8,30	
Bronze ordinaire	106000	42400	0,31	240	8,40	
Bronze au beryllium	130000	52000	0,34	800	8,25	
Beryllium	300000	120000	0,05	300	1,85	
Magnésium	46000	18400	0,34	180	1,74	
Zinc	130000	52000	0,21	120	7,15	
Nickel	205000	82000	0,31	300	8,30	
Béton	27000		0,20	1,2tract/8 comp	2,20	
Granit	60000		0,27	65-150	2,70	
Bois Chêne	10000	500			12	0,80
Bois pin Sylvestre	17000	1000	0,45		11	0,60
Plexiglas	2900	1160	0,40		80	1,80
Verre	60000	24000	0,20		60	2,50
Araldite	3000	1200	0,40		70	1,15
Caoutchouc	2	0,8	0,50		0,98	

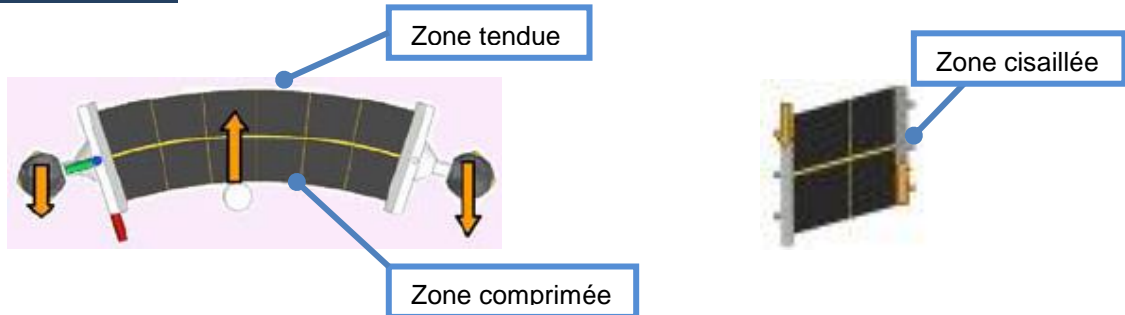


Connaître les ordres de grandeurs

2. Le vecteur contrainte

La grandeur contrainte qui vient d'être définie pour l'essai de référence correspond à une force par unité de surface. Dans une section droite de la poutre, ces forces par unité de surface ne sont pas forcément uniformément réparties comme dans le cas de l'essai de référence.

En manipulant des pains en mousse, on observe que certaines zones sont tendues, d'autres sont comprimées comme dans le cas de la flexion. Ainsi, on peut en déduire que la contrainte est une grandeur locale.

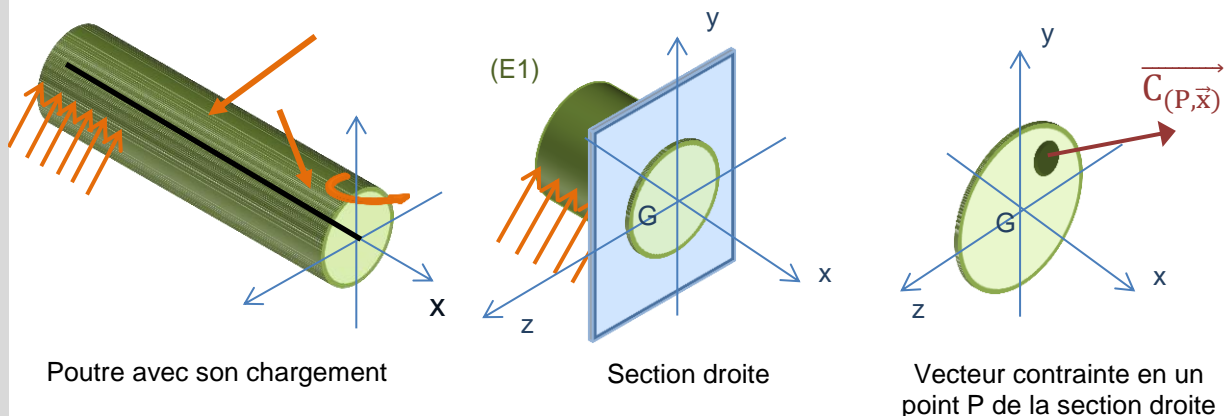


Définitions et hypothèses à connaître

D'autre part, les forces par unité de surface définies localement ont également un sens et une direction (zone tendue/comprimée ou zone cisailée). La contrainte est donc une grandeur vectorielle.

Pour représenter les vecteurs contraintes dans une section droite, il faut considérer un point P de la surface S et un petit élément de surface dS de normale \vec{x} . Ce petit élément de surface est soumis à une force élémentaire \vec{df}_P .

Le vecteur contrainte au point P est noté : $\vec{C}_{(P,\vec{x})}$.



Le vecteur contrainte est une force par unité de surface en un point (ici le point P)

$$\vec{C}_{(P,\vec{x})} = \frac{\vec{df}_P}{dS}$$



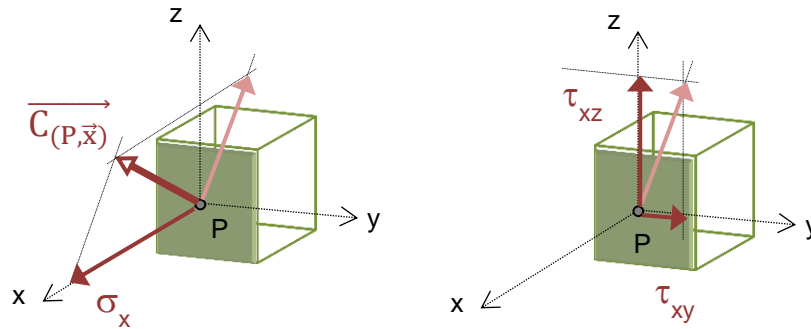
Définitions et hypothèses à connaître

Pour une surface élémentaire orientée suivant x , le vecteur contrainte se décompose en une composante normale σ_x et deux composantes tangentielles τ_{xy} et τ_{xz} . On peut écrire:

$$\vec{C}_{(P,\vec{x})} = \sigma_x \cdot \vec{x} + \tau_{xy} \cdot \vec{y} + \tau_{xz} \cdot \vec{z}$$

σ_x est appelée contrainte normale. Elle traduit les forces surfaciques locales de tension et de compression au sein de la matière.

τ_{xy} et τ_{xz} sont appelées contraintes tangentielles. Elles traduisent les forces surfaciques locales de cisaillement au sein de la matière.



Remarque: nous verrons par la suite que la connaissance du vecteur contrainte suite la direction \vec{x} en un point de la section droite permet dans le cas des poutres de connaître l'état de contrainte en ce point.

Le calcul du vecteur contrainte en tout point de la section droite est essentiel pour vérifier la résistance de la poutre. Il s'agit alors de relier le chargement extérieur appliqué à la poutre à l'ensemble des vecteurs contraintes en tout point de la poutre.

Ce passage en résistance des matériaux est facilité grâce à la notion de direction privilégiée et de section droite.

Il consiste à définir dans chaque section droite au centre géométrique G de la section un torseur d'action mécanique représentant la somme des contributions des forces élémentaires agissant d'une portion de poutre sur l'autre portion: ce torseur s'appelle torseur des efforts intérieurs.



Pour aller plus loin ...



Pas de session correspondante

Sur MOODLE



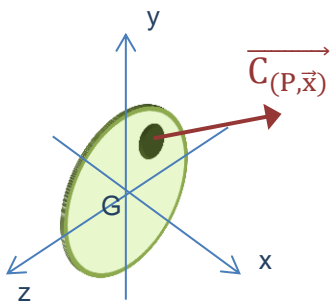
Les caractéristiques principales des matériaux sont définies à partir de **l'essai de traction**.

Les deux principales sont:

- **Le module d'élasticité longitudinal** (module d'Young) **E**
- **La limite élastique** délimitant la zone élastique linéaire (limite d'étude), **Re**

L'essai permet de mettre en évidence la nécessité de définir deux nouvelles grandeurs,

- **la contrainte** exprimée en **N/mm²** : $\sigma_x = \frac{F}{S}$
- **la déformation** exprimée en **mm/mm**. $\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L}$



C'est la contrainte qui constitue la grandeur de comparaison pour traduire le critère de résistance de la poutre.

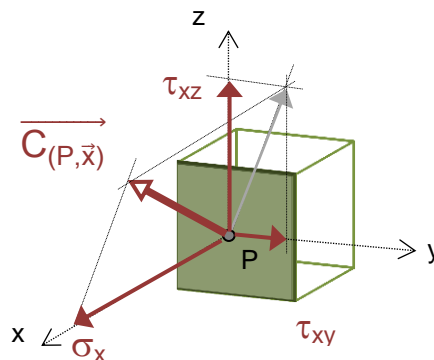
- ✓ La contrainte est une **grandeur locale**. Elle est exprimée en un point P de la section droite.
- ✓ La contrainte a un sens, une direction, une intensité. Elle est **modélisable par un vecteur**.

Elle correspond à la force élémentaire appliquée sur l'élément de surface par unité de surface.

$$\vec{C}_{(P, \vec{x})} = \frac{d\vec{f}_P}{dS}$$

Pour une surface élémentaire orientée suivant x, le vecteur contrainte se décompose en une **composante normale** σ_x et deux **composantes tangentielles** τ_{xy} et τ_{xz} . On peut écrire:

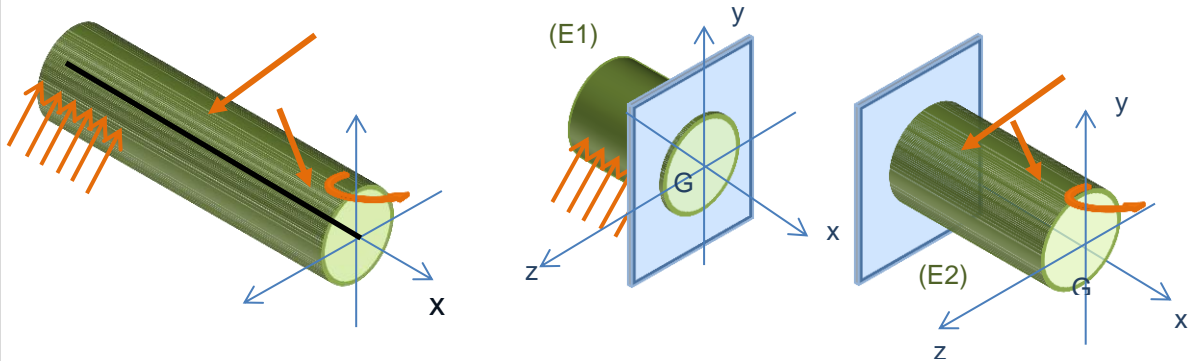
$$\vec{C}_{(P, \vec{x})} = \sigma_x \cdot \vec{x} + \tau_{xy} \cdot \vec{y} + \tau_{xz} \cdot \vec{z}$$



Le torseur des efforts intérieurs

1. Définition

Considérons une poutre E que nous séparons artificiellement en deux parties nommées E1 et E2, de telle sorte que $E = E1 \cup E2$. La séparation artificielle introduite est une coupure au point G par une section droite (S). Compte tenu de l'orientation de l'axe Gx , on note E1 la partie gauche et E2 la partie droite. On suppose que cette poutre est en équilibre sous l'action des actions de l'extérieur.



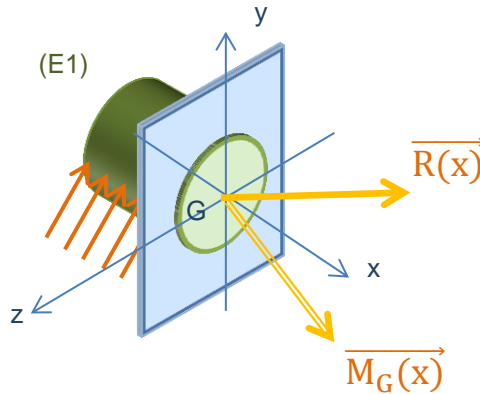
Définition



définitions à connaître

Par convention, le torseur des efforts intérieurs représente les actions mécaniques exercées à travers une coupure par la partie située à droite (E2) de la coupure sur la partie située à gauche (E1) de la coupure (l'axe étant supposé orienté de gauche à droite).

$$\{T_{int}\} = \{T_{(E2) \rightarrow (E1)}\} = \{T_{(II) \rightarrow (I)}\}$$



Détermination



Méthode de détermination à connaître

Le torseur s'exprime au point G et peut se calculer indifféremment à partir des actions mécaniques de l'extérieur sur E2 ou à partir des actions mécaniques de l'extérieur sur E1.

En effet, en isolant la partie de poutre E1 (ou (I)), le principe fondamental de la statique s'écrit:

$$\{T_{(E2) \rightarrow (E1)}\} + \{T_{ext \rightarrow (E1)}\} = 0 \quad \text{d'où} \quad \{T_{int}\} = -\{T_{ext \rightarrow (E1)}\}$$

En isolant la partie de poutre E2 (ou (II)), le principe fondamental de la statique s'écrit:

$$\{T_{(E1) \rightarrow (E2)}\} + \{T_{ext \rightarrow (E2)}\} = 0 \quad \text{d'où} \quad \{T_{int}\} = +\{T_{ext \rightarrow (E1)}\}$$

Remarque: la liaison entre E1 et E2 peut transmettre toutes les composantes des actions mécaniques de E2 sur E1, elle peut donc être modélisée par une liaison encastrement. C'est en effet cette liaison (les efforts et moments qu'elle transmet) qui assure la cohésion des deux éléments E1 et E2 de la poutre E.

Le torseur de cohésion est modifié lorsque l'on déplace la coupure le long de la poutre. On peut être amené à distinguer plusieurs coupures en particulier lorsqu'on rencontre :

- une discontinuité d'ordre géométrique (changement de direction de la ligne moyenne), cas d'une poutre en équerre par exemple,
- une discontinuité liée à des efforts concentrés ou à une liaison.

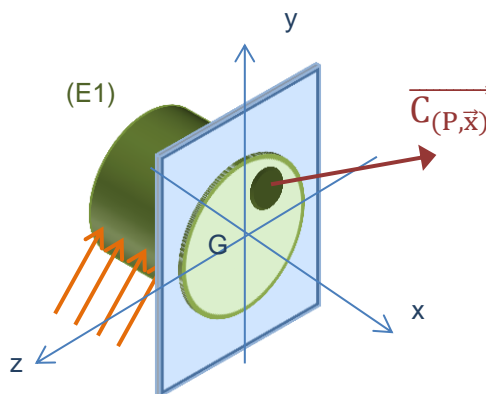
Intérêt

- ✓ Le premier intérêt de la détermination du torseur des efforts intérieurs est la mise en place d'une étape intermédiaire facilitant la détermination des contraintes dans chaque section droite de la poutre.

Ainsi, si le torseur s'écrit: $\{T_{int}\} =$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{R(x)} \\ \overline{M_G(x)} \end{array} \right\}_G, \text{ on a}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{R(x)} = \int_{(S)} \overline{C_{(P,\vec{x})}} \cdot dS \\ \overline{M_G(x)} = \int_{(S)} \overline{GP} \wedge \overline{C_{(P,\vec{x})}} \cdot dS \end{array} \right.$$



La connaissance de $\overline{R(x)}$ et de $\overline{M_G(x)}$ permet d'accéder plus facilement à la répartition des vecteurs contraintes $\overline{C_{(P,\vec{x})}}$ dans la section droite.



définitions à connaître

- ✓ Le deuxième intérêt est d'identifier à l'aide du torseur des efforts intérieurs la nature des sollicitations dans chaque section droite de la poutre.

Dans un repère local, le torseur des efforts intérieurs se met sous la forme :

$$\{T_{int}\} = \left\{ \begin{array}{ll} N & Mt \\ T_y & Mf_y \\ T_z & Mf_z \end{array} \right\}_{G,base}$$

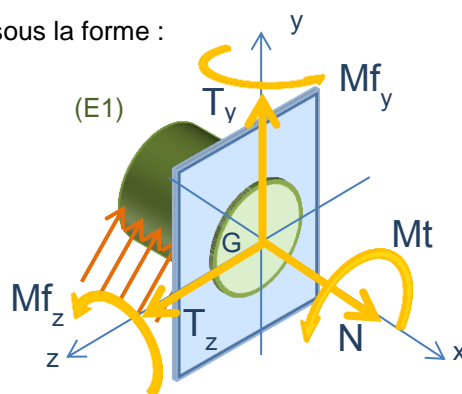
N effort normal

T_y et T_z efforts tranchants

M_x moment de torsion

Mf_y et Mf_z moments de flexion

Le repère local est principal d'inertie.



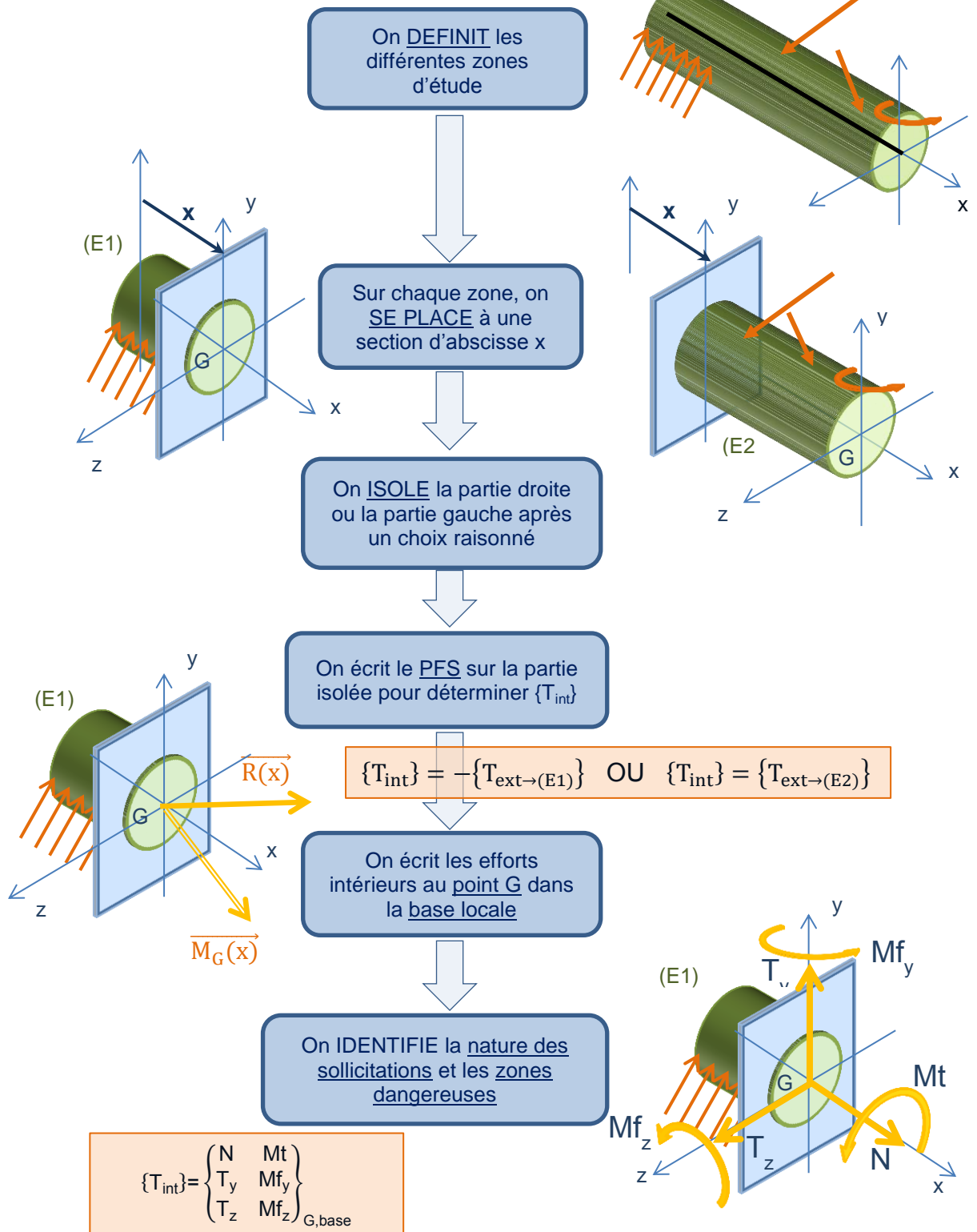
Enfin, le torseur des efforts intérieurs permet d'identifier la section de la poutre la plus sollicitée. Lorsque cette section est évidente, on peut calculer directement le torseur des efforts intérieurs dans la section "dangereuse". Sinon, la détermination du torseur des efforts intérieurs sur toutes les zones de la poutre permet de tracer les diagrammes des éléments de réduction du torseur N, T_y, T_z, M_x, Mf_y et Mf_z.

Remarque: Dans le cas d'un problème plan, les seules composantes non nulles du torseur des efforts intérieurs sont N, T_y et Mf_z.

2. Démarche de détermination

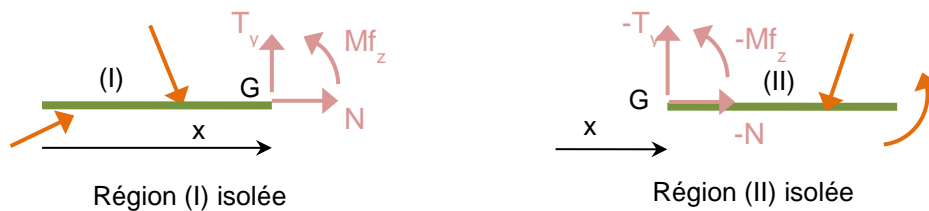


Démarche à connaître



Remarque : Dans le cadre de ce cours, nous ne traitons que des poutres droites possédant un plan de symétrie (x,y) et chargées dans ce plan. Ainsi, les seules composantes du tenseur des efforts intérieurs non nulles sont N , T_y et Mf_z .

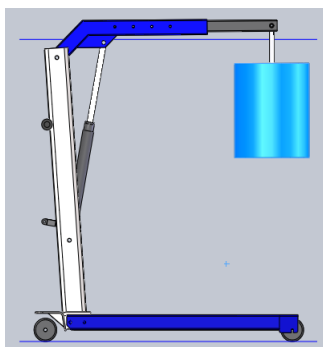
Pour calculer les éléments de réduction du tenseur des efforts intérieurs, l'isolement de l'élément de poutre pourra s'appuyer sur la représentation de la partie gauche ou de la partie droite.



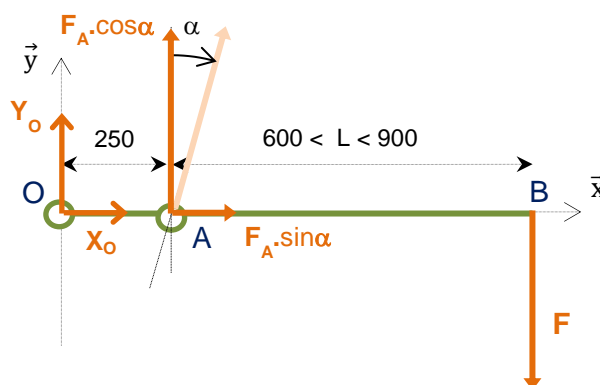
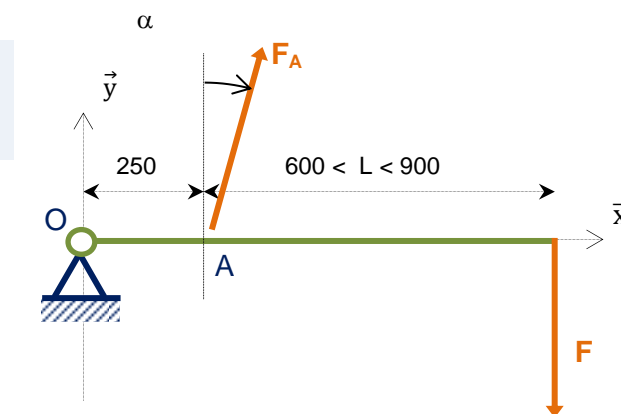
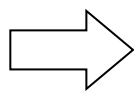
Exemple du bras de potence



Exemple d'application



Modélisation simplifiée du bras



Etape 1 – Calcul des actions de liaison

On isole la poutre (S) modélisée (voir figure)

Le problème est plan non symétrique.

On effectue le bilan des actions mécaniques extérieures (actions de liaison et chargement)
Voir figure

On vérifie que le système est isostatique
3 équations dans le plan et 3 inconnues : X_0 , Y_0 et F_A

On applique le PFS

$$\begin{cases} \sum \overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow (S)}} = \vec{0} \\ \sum M_{O \text{ ext} \rightarrow (S)} = 0 \end{cases}$$

On projette les relations

$$\begin{cases} X_0 + F_A \sin \alpha = 0 \\ Y_0 + F_A \cos \alpha - F = 0 \\ 0,25 F_A \cos \alpha - 0,9 F = 0 \end{cases}$$

On déduit les valeurs

$$F_A = \frac{0,9}{0,25 \cos \alpha} \cdot F \quad X_0 = -\frac{0,9}{0,25} \cdot F \tan \alpha \quad Y_0 = -\frac{0,65}{0,25} \cdot F$$

Etape 2 – Calcul du torseur des efforts intérieurs



Exemple d'application

On définit les différentes zones d'études.

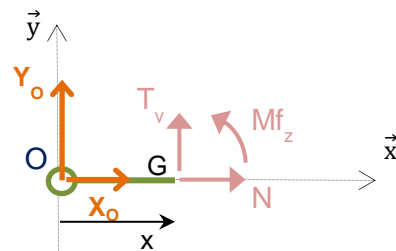
Ici, nous avons une discontinuité d'effort en A d'où 2 zones d'études (OA) et (AB)

Pour la zone (OA),

- ✓ on se place à l'abscisse x (le centre de section G est alors situé entre le point O et le point A à une distance x de O)
- ✓ On choisit d'isoler la partie gauche

- ✓ L'application du PFS nous donne

$$\begin{cases} X_O + N = 0 \\ Y_O + T_y = 0 \\ Mf_z - x \cdot Y_O = 0 \text{ (au point G)} \end{cases}$$



- ✓ On déduit les éléments de réduction du torseur des efforts intérieurs entre O et A ($0 < x < 0,25$)

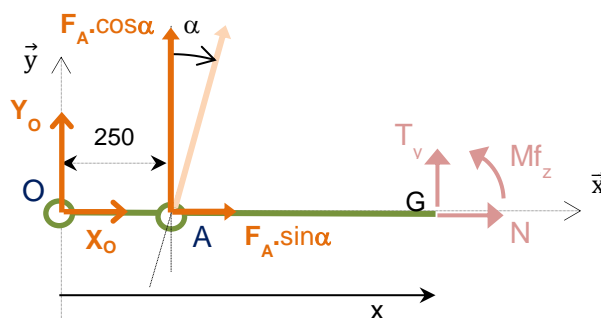
$$N = -X_O ; T_y = -Y_O ; Mf_z = x \cdot Y_O$$

Pour la zone (AB),

- ✓ on se place à l'abscisse x (le centre de section G est alors situé entre le point A et le point B à une distance x de O)
- ✓ On choisit d'isoler la partie gauche

- ✓ L'application du PFS nous donne

$$\begin{cases} X_O + F_A \sin \alpha + N = 0 \\ Y_O + F_A \cos \alpha + T_y = 0 \\ Mf_z - x \cdot Y_O - (x - 0,25) \cdot F_A \cos \alpha = 0 \text{ (au point G)} \end{cases}$$



- ✓ On déduit les éléments de réduction du torseur des efforts intérieurs entre A et B ($0,25 < x < 0,9$)

$$N = 0 ; T_y = -Y_O - F_A \cos \alpha ; Mf_z = x \cdot Y_O + (x - 0,25) F_A \cos \alpha$$

Remarque1: La détermination des efforts intérieurs résulte de l'application du PFS et exige donc la rigueur d'isolement correspondante.

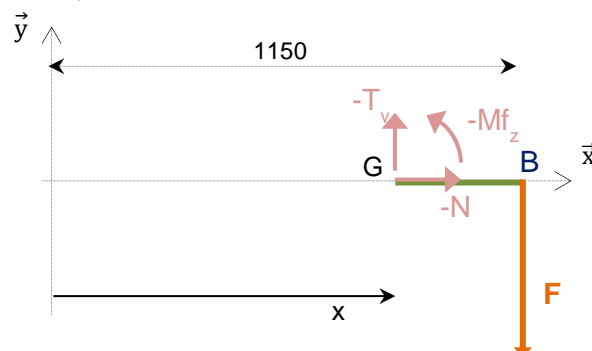
Remarque2: Il était plus simple ici de passer par l'isolement de la partie droite pour déterminer les éléments de réduction du torseur des efforts intérieurs entre A et B.

Les composantes du torseur des efforts intérieurs sont alors précédées du signe (-) sur la figure car il s'agit alors des actions de la partie (I) sur la partie (II) soit $\{-T_{int}\}$.

On retrouve alors

$$\begin{cases} -N = 0 \\ -T_y - F = 0 \\ -Mf_z - (1,15 - x) \cdot F = 0 \text{ (au point G)} \end{cases}$$

Les valeurs de N , T_y et Mf_z sont les mêmes que celles trouvées précédemment après avoir remplacé les valeurs de Y_O et F_A trouvées à l'étape 1.



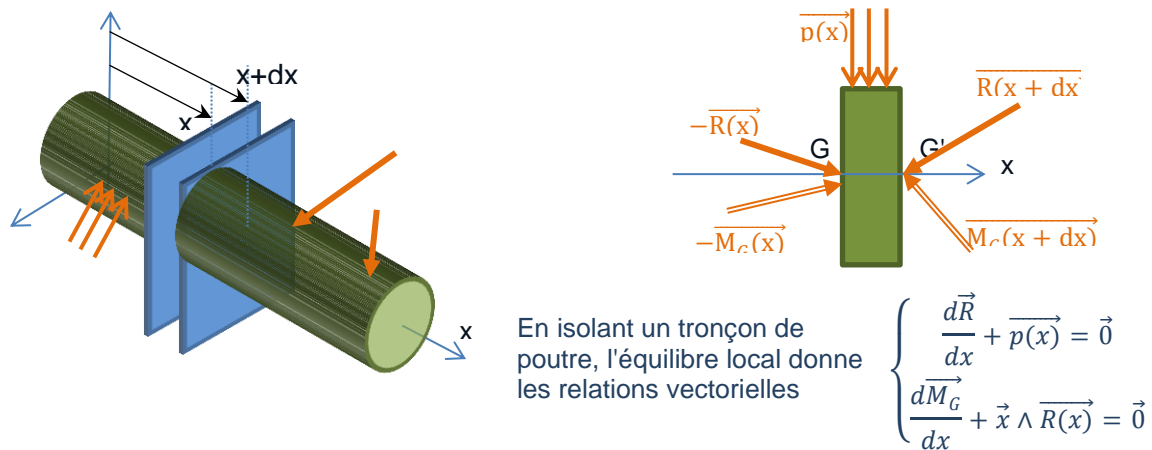
3. Diagramme des efforts intérieurs

Les éléments de réduction du torseur des efforts intérieurs le long de la poutre étudiée peuvent être représentés par des diagrammes permettant ainsi d'identifier facilement les parties de poutre les plus sollicitées.

Ces diagrammes sont utiles principalement lorsque la région la plus sollicitée n'est pas facilement identifiable ou pour des poutres de sections variables.

Les relations entre les composantes du torseur des efforts intérieurs s'écrivent à partir de l'équilibre local d'un tronçon de poutre.

Elles constituent une aide pour le tracé des diagrammes des efforts intérieurs.



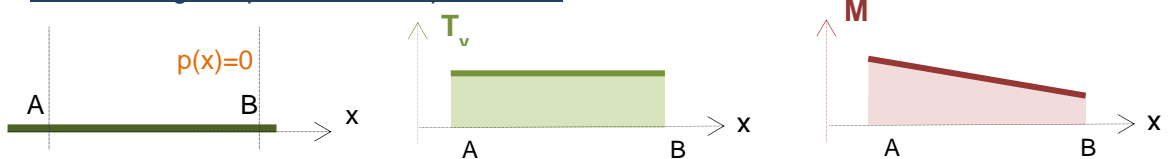
Méthode de détermination à connaître

Dans le cas d'une poutre droite chargée dans le plan xy

$$\begin{cases} \frac{dN}{dx} + p_x(x) = 0 \\ \frac{dT_y}{dx} + p_y(x) = 0 \end{cases} \quad \frac{dM_z}{dx} + T_y(x) = 0$$

Conséquences sur l'allure des diagrammes

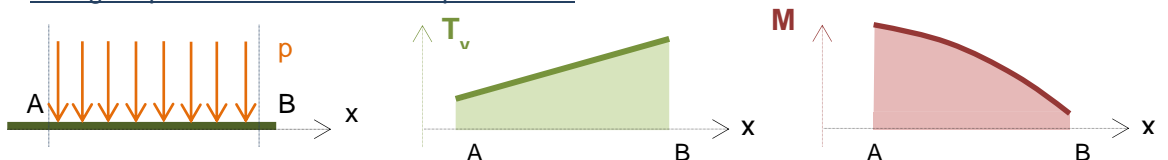
Pas de charges réparties sur une portion AB



L'évolution de T_y est constante sur AB

L'évolution de M_z est linéaire sur AB Sa pente est égale à $-T_y$

Charge répartie constante sur une portion AB



L'évolution de T_y est linéaire sur AB Sa pente est égale à $-p$ (ici, p est dirigé vers le bas, $-p > 0$)

L'évolution de M_z est parabolique sur AB Sa pente est égale à $-T_y$ (ici, la pente en A est moins négative que la pente en B)



Sur MOODLE

Activités sur le calcul des efforts intérieurs

VIDEO - DÉMARCHE CALCUL EFFORTS INTÉRIEURS

EFFORTS INTÉRIEURS - DEFINITIONS

- Connaître la définition du torseur des efforts intérieurs

Difficulté ★★★★★

Synthèse sur les efforts intérieurs

IDENTIFICATION DES COMPOSANTES

- Connaître les différents types de sollicitation
- Associer dans un cas simple le chargement extérieur au type de sollicitation

Difficulté ★★★★★

Synthèse sur la nature des sollicitations

CALCUL DES EFFORTS INTERIEURS EN UN POINT

- Savoir calculer dans un cas simple les éléments du torseur des efforts intérieurs en un point.

Difficulté ★★★★★

Synthèse sur la démarche de détermination des efforts intérieurs

DIAGRAMMES DES EFFORTS INTERIEURS

- Connaître les relations entre les différents éléments du torseur des efforts intérieurs
- Savoir associer un diagramme d'efforts intérieurs à un chargement extérieur

Difficulté ★★★★★

Synthèse sur les diagrammes des efforts intérieurs



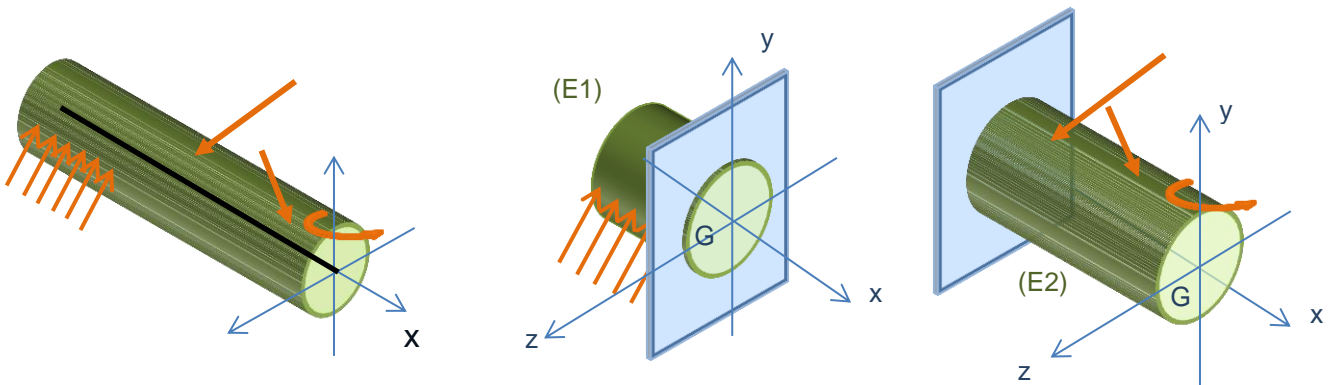


Le calcul du vecteur contrainte en tout point de la section droite à partir du chargement extérieur appliqué à la poutre passe par le calcul du **torseur des efforts intérieurs**.

$$\{T_{int}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overline{R(x)} \\ \overline{M_G(x)} \end{array} \right\}_G$$

Par convention, le torseur des efforts intérieurs représente **les actions mécaniques exercées à travers une coupure par la partie située à droite (E2) de la coupure sur la partie située à gauche (E1) de la coupure**

$$\{T_{int}\} = \{T_{(E2) \rightarrow (E1)}\} = \{T_{(II) \rightarrow (I)}\}$$



Le torseur **s'exprime au point G** et peut se calculer indifféremment à partir des actions mécaniques de l'extérieur sur E2 ou à partir des actions mécaniques de l'extérieur sur E1 **en appliquant un PFS**.

La **démarche de détermination** est explicitée page 16.

Dans un repère local, le torseur des efforts intérieurs se met sous la forme :

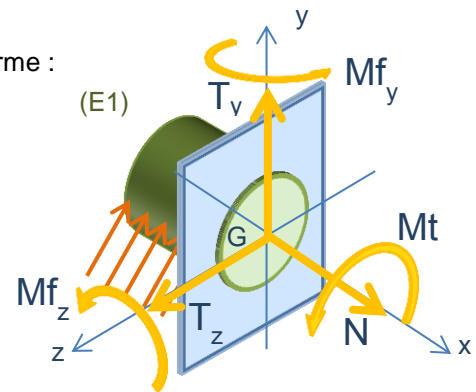
$$\{T_{int}\} = \left\{ \begin{array}{cc} N & Mt \\ T_y & Mf_y \\ T_z & Mf_z \end{array} \right\}_{G,base}$$

N effort normal
T_y et T_z efforts tranchants
M_x moment de torsion
Mf_y et Mf_z moments de flexion

Le repère local est **principal d'inertie**.

Le torseur des efforts intérieurs permet

- ✓ d'identifier **la section de la poutre la plus sollicitée**,
- ✓ de déterminer **la nature des sollicitations**.



Les sollicitations simples

1. Introduction - Démarche

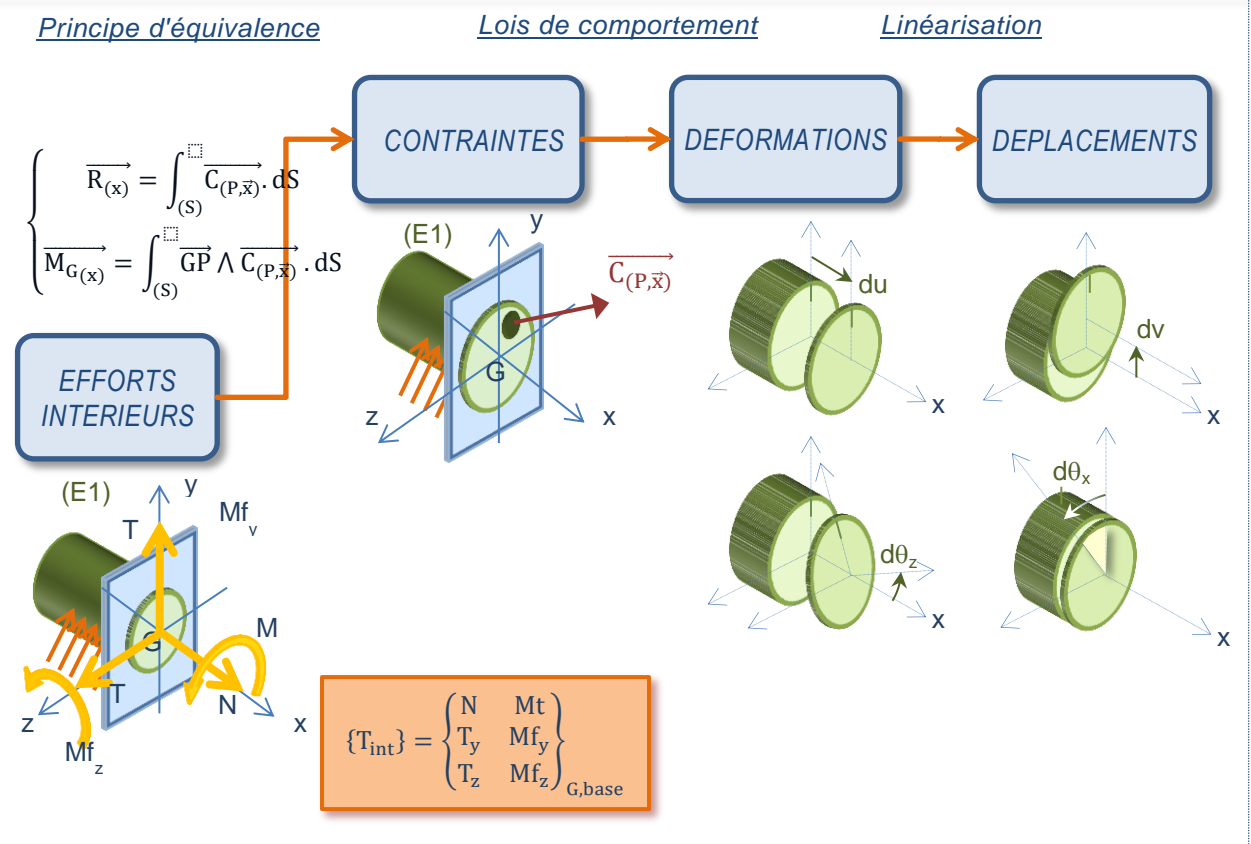
La détermination du torseur des efforts intérieurs permet de globaliser les actions mécaniques agissant d'une partie de la poutre (partie droite) sur l'autre partie (partie gauche) dans une section droite au point G. Il s'agit à présent de dissocier chaque élément de réduction du torseur (chaque sollicitation élémentaire) et pour chaque sollicitation, de déterminer

- La distribution des vecteurs contrainte dans la section droite
- La déformation des éléments de la section droite
- Le déplacement global de la section droite

Cette démarche peut être schématisée comme suit.



Comprendre le schéma de principe



Remarque : comme nous l'avons vu, nous ne traitons dans ce cours que des poutres droites possédant un plan de symétrie (x,y) et chargées dans ce plan. Ainsi, les seules composantes du torseur des efforts intérieurs non nulles sont N, Ty et Mfz.

Nous abordons donc deux sollicitations simples: la traction (seul N≠0) et la flexion pure (seul Mfz≠0).

Le principe de superposition pose que pour des sollicitations composées de plusieurs sollicitations simples, les effets s'additionnent aussi bien pour ce qui concerne les contraintes que pour ce qui concerne les déplacements.

Dans ce cours, nous aborderons uniquement la sollicitation composée de traction flexion (seuls N, Ty et Mfz sont non nuls)

2. La traction - compression

2-1 Définition et hypothèses



Connaître la définition

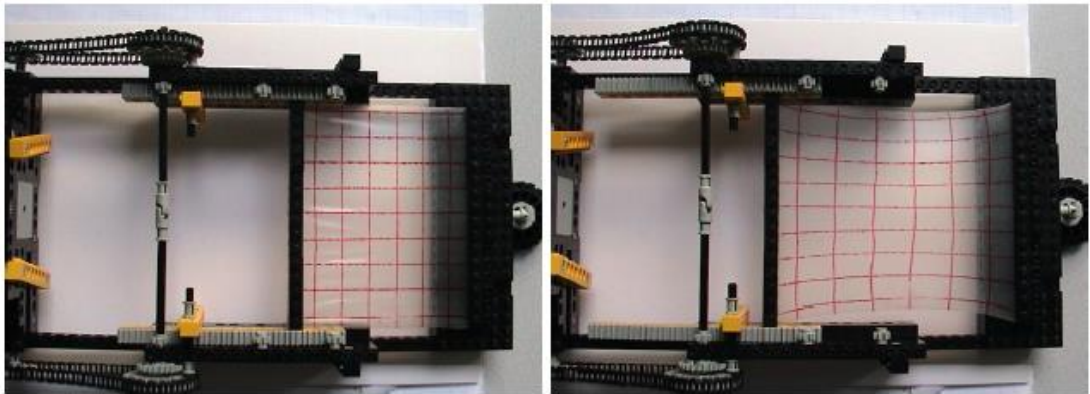
Une poutre, ou un tronçon de poutre cylindrique, est en traction/compression dès que le torseur des efforts intérieurs se présente sous la forme suivante :

$$\{T_{int}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

- ✓ Si N est positif, on dira que la poutre, ou le tronçon de la poutre, est soumis à de la traction.
- ✓ Si N est négatif, on dira que la poutre ou le tronçon est soumis à de la compression.

2-2 Constatations expérimentales et conséquences

On considère une poutre sur laquelle est dessinée une grille. On sollicite la poutre en traction et on représente la grille avant et après déformation.



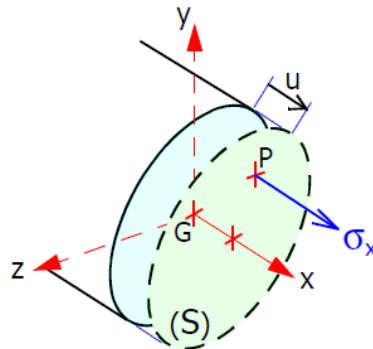
Conformément au principe de Saint-Venant, on constate que sur les bords de la grille, une zone particulière est très déformée. On ne s'intéressera pas à cette zone.

Dans la zone d'études :

- ✓ Chaque carreau de la grille a subi la même transformation. On a donc un état de déformation homogène et constant.
- ✓ Une section droite représentée par une ligne verticale de la grille s'est déplacée pour donner une ligne verticale. On a donc à la fois un mouvement global de la section ce qui correspond à l'hypothèse de Bernoulli.

On peut faire les constats suivants :

- Les contraintes tangentielles sont nulles. En effet, si elles ne l'étaient pas, On aurait des glissements des sections droites les unes par rapport aux autres,
- Les déformations sont identiques pour chaque élément de poutre. L'état de contrainte est donc homogène et constant dans toute la zone d'étude.



On a donc $\overrightarrow{C}_{(P,\vec{x})} = \sigma_x \cdot \vec{x}$

2-3 Relations contraintes – effort normal

Les relations d'équivalence permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \vec{R}_{(x)} = \int_{(S)} \vec{C}_{(P,\vec{x})} \cdot dS = N \cdot \vec{x} \\ \vec{M}_{G(x)} = \int_{(S)} \vec{GP} \wedge \vec{C}_{(P,\vec{x})} \cdot dS = \vec{0} \end{cases}$$

La distribution uniforme des vecteurs contrainte permet de vérifier la deuxième relation. La première relation s'écrit

$$N \cdot \vec{x} = \int_{(S)} \vec{C}_{(P,\vec{x})} \cdot dS = \int_{(S)} \sigma_x \cdot \vec{x} \cdot dS = \sigma_x \cdot \int_{(S)} dS \cdot \vec{x} = \sigma_x \cdot S \cdot \vec{x}$$

On déduit :

$$\sigma_x = \frac{N}{S}$$

S est l'aire de la section droite.



Connaître la formule

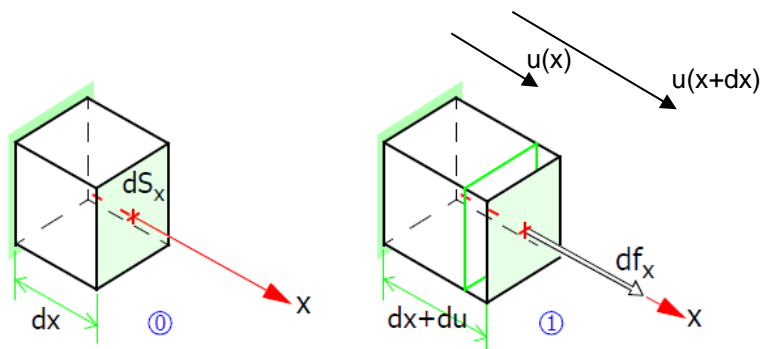
2-4 Relation contrainte-déformation et déformation-déplacement

Comme nous l'avons vu précédemment, la relation entre la contrainte et la déformation est donnée par la loi de comportement :

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

On déduit

$$\varepsilon_x = \frac{N}{E \cdot S}$$



La déformation du petit élément de longueur dx s'écrit:

$$\varepsilon_x = \frac{u(x+dx) - u(x)}{dx} = \frac{du}{dx}$$

Le déplacement d'une section droite de la poutre s'obtient alors en intégrant l'ensemble des déplacements élémentaires du:

$$u_2 - u_1 = \int_1^2 \varepsilon(x) \cdot dx = \int_1^2 \frac{N(x)}{E \cdot S} \cdot dx$$



Connaître la formule

Dans le cas d'un effort normal constant et d'une section constante sur la longueur L de la poutre

$$\Delta u = \varepsilon \cdot L = \frac{N \cdot L}{E \cdot S}$$

Remarque: on retrouve $\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L}$ défini lors de l'essai de traction.

2-5 Critère de dimensionnement

Pour dimensionner la poutre on peut s'appuyer sur les résultats de l'essai de traction avec :

- un critère de résistance
- un critère de rigidité

Le critère de résistance va traduire le fait que le matériau doit rester dans la zone élastique, moyennant un coefficient de sécurité C_s .

$$\sigma_{\max i} \leq \frac{R_e}{C_s}$$

Le critère de rigidité traduit, moyennant un coefficient de sécurité C_s , que le déplacement relatif entre deux sections droites doit rester inférieure à une valeur donnée dépendante des conditions d'utilisation

$$\Delta u_{\max i} \leq \frac{\Delta u_{\text{adm}}}{C_s}$$

Remarque: Dans des zones de singularité (accident de forme), on constate un phénomène d'augmentation local des contraintes.



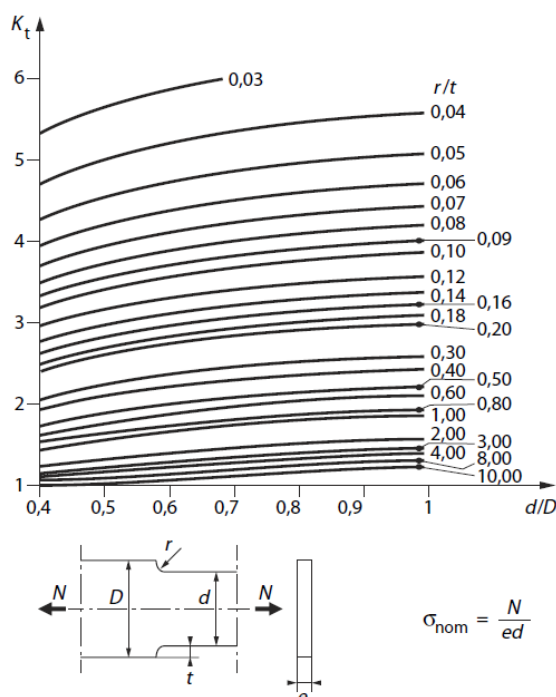
La définition du coefficient de concentration de contraintes repose sur une constatation fondamentale. Pour un type de chargement donné, le rapport entre la contrainte réelle (dans le cas où elle est inférieure à la limite d'élasticité) et la contrainte nominale en un point ne dépend pas de la valeur de la charge appliquée.

On appelle contrainte nominale la contrainte maximale calculée à partir d'une étude de RdM,

Le coefficient de concentrations de contraintes K_t est alors défini par le rapport entre la contrainte réelle et la contrainte nominale :

$$K_t = \frac{\sigma_{\max i}}{\sigma_{\text{nom}}}$$

Les valeurs de K_t sont données sous forme d'abaques, de formules ou encore utilisation de logiciels dédiés.





Sur MOODLE

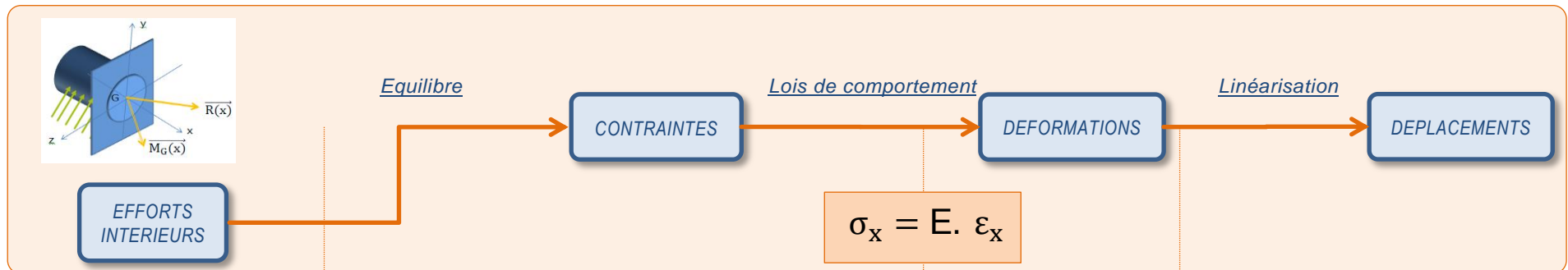
Activités sur les sollicitations simples

SOLLICITATION DE TRACTION / COMPRESSION

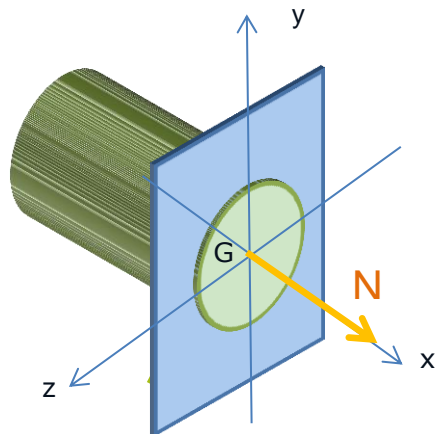
- Être capable de dimensionner une poutre en traction dans un cas simple
- Être capable de définir la raideur de poutres en traction montées en // ou en série
- Être capable de rechercher un coefficient de concentration de contraintes

Synthèse pour la sollicitation de TRACTION

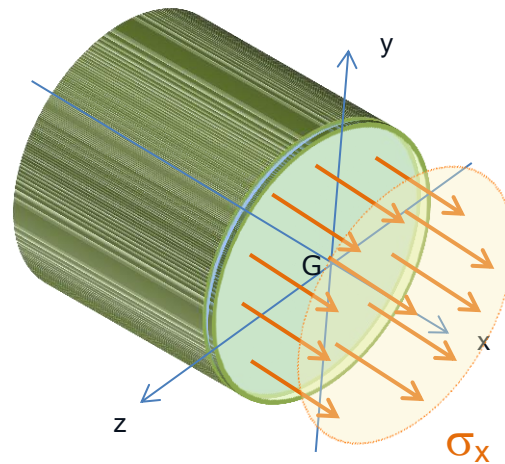




$$\{T_{int}\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$



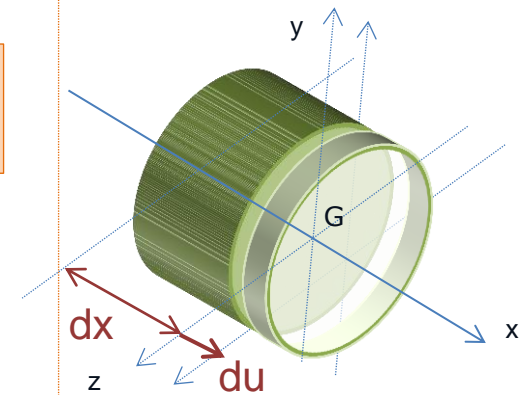
$N > 0$ Traction
 $N < 0$ Compression



$$\sigma_x = \frac{N}{S}$$

Répartition uniforme des contraintes

$$\epsilon_x = \frac{N}{E \cdot S}$$



$$du = \epsilon_x \cdot dx = \frac{N}{E \cdot S} \cdot dx$$

Si l'effort normal et la section sont constants sur la longueur L

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot S}$$

3. La flexion pure

3-1. Définition et hypothèses



Connaître la définition

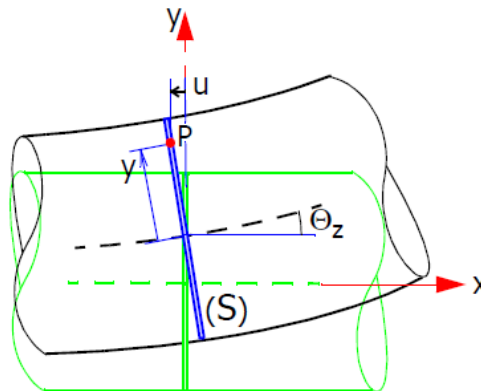
Une poutre, ou un tronçon de poutre cylindrique, est en flexion pure dès que le torseur des efforts intérieurs se présente sous la forme suivante :

$$\{T_{int}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}_G$$

3-2. Constatations expérimentales et conséquences

De la même façon que pour la sollicitation de traction, l'hypothèse de Bernoulli est vérifiée. Les sections droites de la poutre lorsqu'elles se déforment restent dans un plan perpendiculaire à la ligne moyenne.

La figure ci-dessous illustre cette constatation.



On constate expérimentalement que les fibres situées au dessus de la fibre moyenne se raccourcissent, tandis que les fibres situées sous la fibre moyenne s'allongent. La fibre moyenne ne change pas de longueur : on l'appelle aussi fibre neutre.

Les constats précédents impliquent que les fibres s'allongent ou se raccourcissent et sont donc soumises à des contraintes normales.

On a donc $\overline{C}_{(P,\vec{x})} = \sigma_x \cdot \vec{x}$

Chaque point P subit un déplacement élémentaire du proportionnel à la distance entre P et la fibre neutre.

$$du = -y \cdot d\theta_z$$

La déformation d'une fibre de direction \vec{x} et de cote y est donc égale à :

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -y \cdot \frac{d\theta_z}{dx}$$

La contrainte normale est alors proportionnel à y :

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = -Ey \cdot \frac{d\theta_z}{dx}$$

3-3. Relation contrainte-moment fléchissant

Les relations d'équivalence permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \overline{R}_{(x)} = \int_{(S)} \overline{C}_{(P,\vec{x})} \cdot dS = \vec{0} \\ \overline{M}_{G(x)} = \int_{(S)} \overline{GP} \wedge \overline{C}_{(P,\vec{x})} \cdot dS = Mf_z \cdot \vec{z} \end{cases}$$

La première relation est vérifiée dans la mesure où la fibre neutre est suivant $G\vec{z}$, G centre géométrique de la section droite.

La deuxième relation donne:

$$Mf_z \cdot \vec{z} = \int_{(S)} \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{C_{(P,\vec{x})}} \cdot dS = \int_{(S)} -y \cdot \sigma_x \cdot dS \vec{z} = E \cdot \frac{d\theta_z}{dx} \cdot \int_{(S)} y^2 \cdot dS \vec{z}$$

On introduit alors une nouvelle grandeur qui correspond au moment quadratique de la section droite autour de $G\vec{z}$.

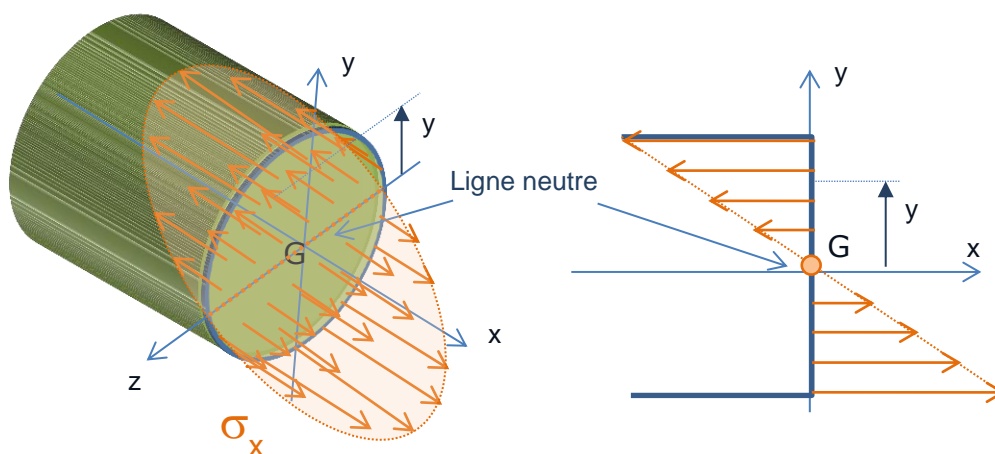
$$I_z = \int_{(S)} y^2 \cdot dS$$



Connaître la formule et la représentation

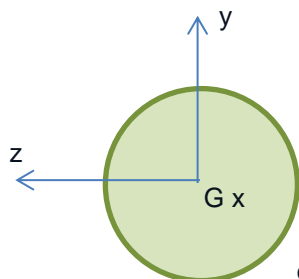
On déduit alors:

$$\sigma_{x(y)} = \frac{-Mf_z}{I_z} \cdot y$$



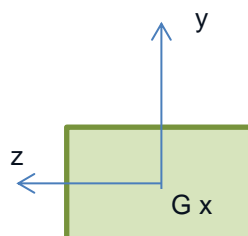
Calcul d'un moment quadratique d'une section droite

Dans le cas de section circulaire ou rectangulaire, le moment quadratique I_z vaut:



$$I_z = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$$

diamètre $d=2r$
rayon r



$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Dans des cas plus complexes de sections quelconques, les moments quadratiques sont donnés par les logiciels de calcul.

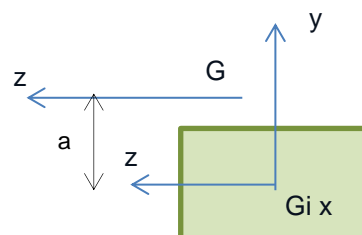
L'ingénieur peut être amené à vérifier la cohérence d'un résultat ou à effectuer un calcul rapide à partir des deux formules précédentes.

Dans le cas d'une section mince, on décompose la section en portions élémentaires et on utilise le théorème de Huyghens:

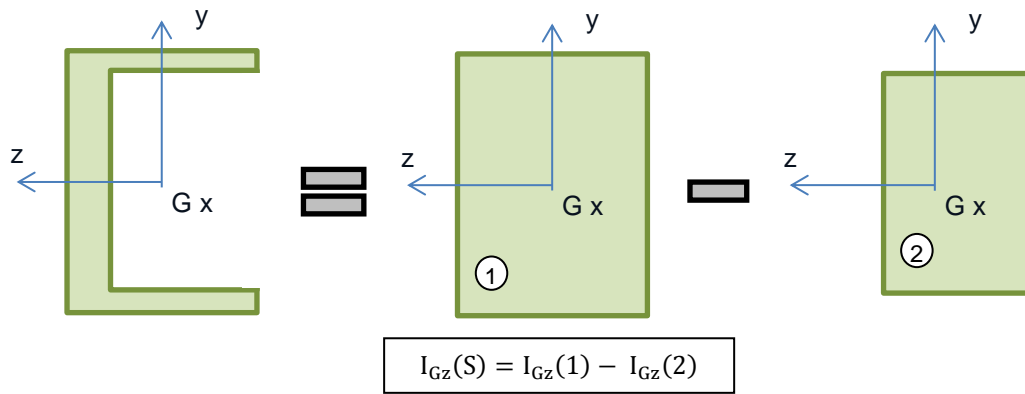
$$I_{Gz}(S_i) = I_{G_i z}(S_i) + S_i \cdot a^2$$

$$\frac{b \cdot h^3}{12}$$

aire de la section droite

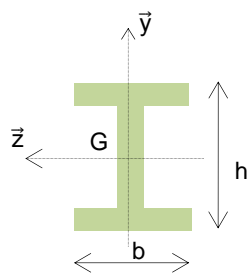


On peut également additionner et/ou soustraire des moments quadratiques de sections élémentaires

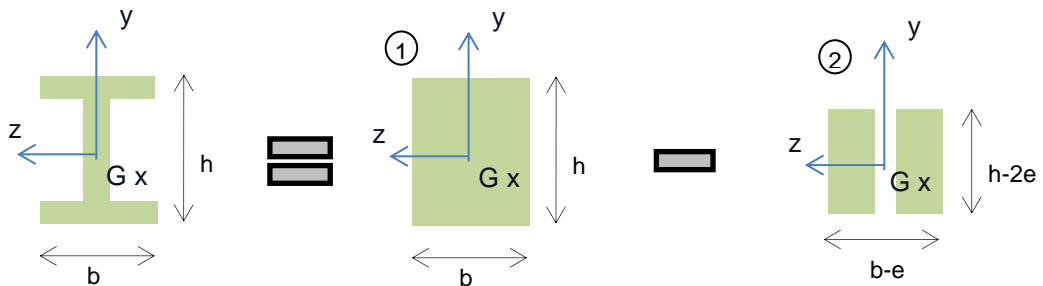


Exemple d'application

Exemple d'une poutre en I d'épaisseur $e \ll h$ et $e \ll b$

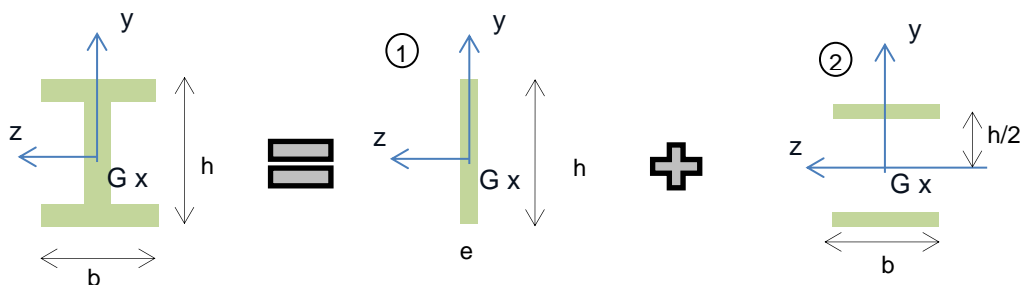


METHODE 1



$$I_{Gz}(S) = I_{Gz}(1) - I_{Gz}(2) = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{(b-e) \cdot (h-2e)^3}{12}$$

METHODE 2



$$I_{Gz}(S) = I_{Gz}(1) + I_{Gz}(2) = \frac{e \cdot h^3}{12} + 2 \cdot \left[\frac{b \cdot e^3}{12} + e b \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right]$$

Remarque : étant donnée la linéarisation au premier ordre des termes en e , la deuxième expression donne un résultat approché.

3-4. Relation contrainte-déformation et déformation-déplacement

Comme nous l'avons vu précédemment:

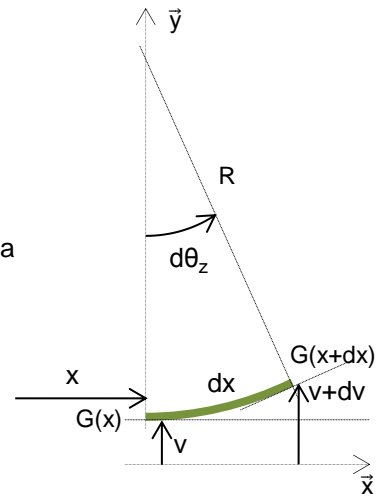
$$Mf_z = E \cdot \frac{d\theta_z}{dx} \cdot I_z$$

$\frac{d\theta_z}{dx}$ correspond au rayon de courbure R de la poutre

Par ailleurs, $\theta_z = \frac{dv}{dx}$

On déduit l'expression permettant le calcul des déplacements de la poutre suivant y (équation de la déformée).

$$Mf_z = E \cdot I_z \cdot v''$$



3-5. Critère de dimensionnement

Comme pour le cas de la traction, le dimensionnement s'appuie sur un critère de résistance ou un critère de rigidité.

Les contraintes en chaque point de la section sont des contraintes normales. Elles peuvent donc être comparées à la limite élastique du matériau R_e donnée par l'essai de traction qui traduit le fait que le matériau doit rester dans la zone élastique, moyennant un coefficient de sécurité s .

$$\sigma_{\max} \leq \frac{R_e}{s}$$

Le critère de rigidité traduit, moyennant un coefficient de sécurité s , soit un déplacement maximal admissible, soit une rotation de section maximale admissible (comme dans le cas des roulements à billes par exemple) :

$$v_{\max} \leq \frac{v_{\text{adm}}}{s} \quad \text{ou} \quad \theta_{z\max} \leq \frac{\theta_{z\text{adm}}}{s}$$

Remarque: Comme dans le cas de la traction, proche de zones de singularité (accident de forme), il faut affecter à la contrainte calculée un coefficient de concentration de contraintes..



Sur MOODLE

Activités sur les sollicitations simples

- ✓ SOLLICITATION DE FLEXION - CALCUL DES CONTRAINTES
 - Être capable de dimensionner une poutre sollicitée en flexion dans un cas simple

📄 Synthèse pour la sollicitation de FLEXION-PURE

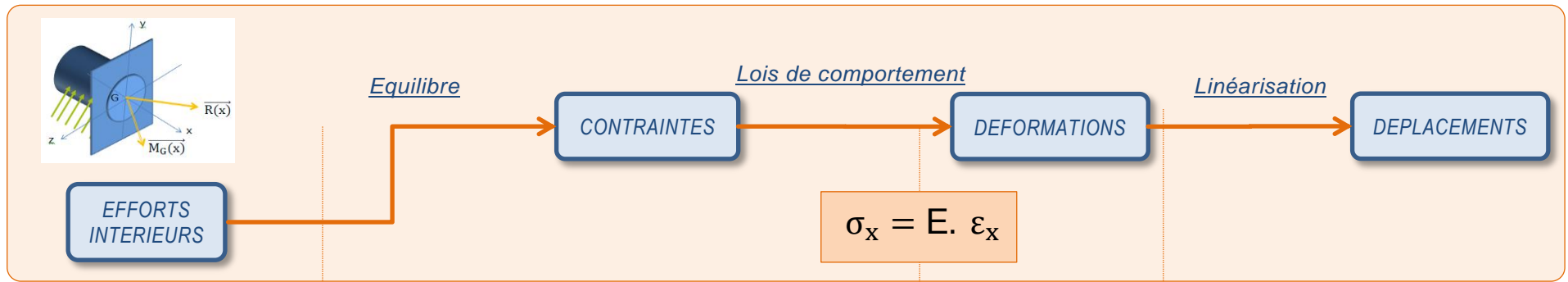
- ✓ SOLLICITATION DE FLEXION - MOMENTS QUADRATIQUES
 - Être capable de déterminer un moment quadratique dans un cas simple
 - Connaître le sens physique du moment quadratique d'une section

📄 Synthèse sur les MOMENTS QUADRATIQUES

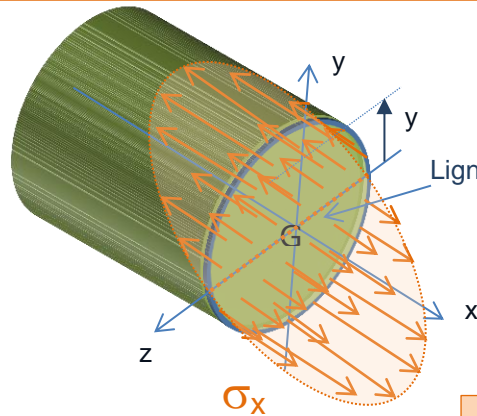
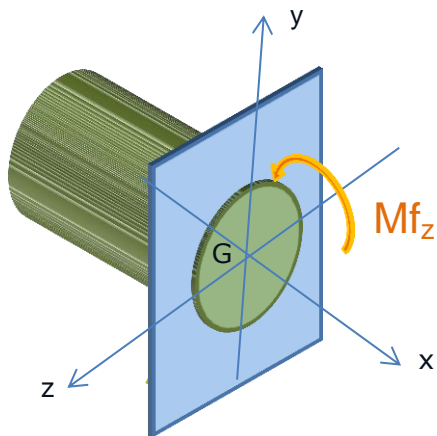
- ✓ SOLLICITATION DE FLEXION - EQUATION DE LA DEFORMEE
 - Être capable de définir les conditions aux limites en terme de déplacements
 - Être capable de déterminer la valeur d'une flèche à partir d'un document ressource

📄 Formulaire des flèches pour des poutres sollicitées en flexion



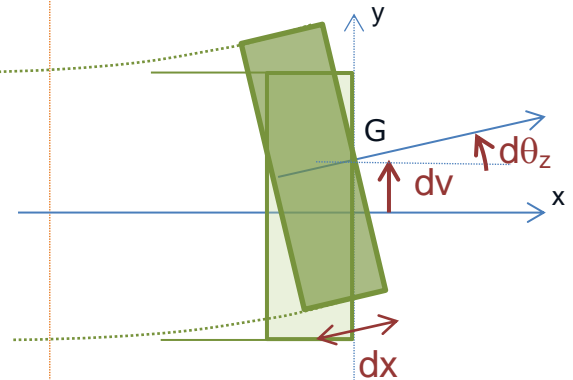
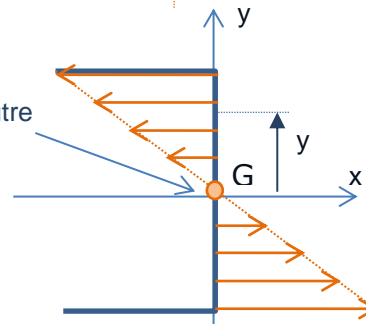
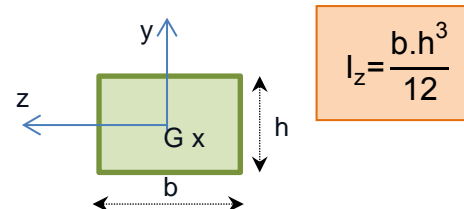
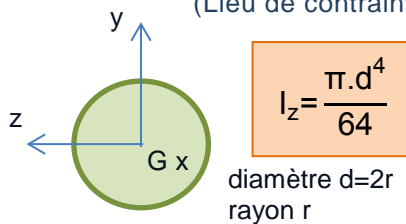


$$\{T_{int}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}_G$$



$$\sigma_x = \frac{-Mf_z}{I_{Gz}} \cdot y$$

Répartition linéaire des contraintes suivant Gy
(Lieu de contraintes nulles : axe neutre Gz)



$$Mf_z = E \cdot I_{Gz} \cdot \frac{d\theta_z}{dx} = E \cdot I_{Gz} \cdot \frac{d^2v}{dx^2}$$

Pour simplifier, on note :

$$Mf_z = E \cdot I_{Gz} \cdot v''$$

L'équation de la déformée s'obtient en intégrant deux fois l'équation et en traduisant les conditions aux limites

4. La flexion simple

4-1 Définition et hypothèses



Connaître la définition

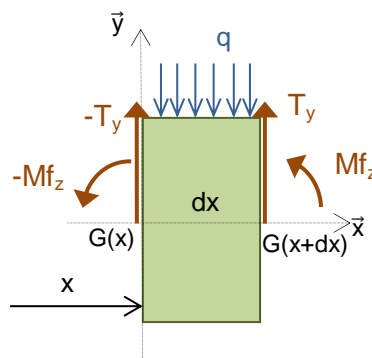
Une poutre, ou un tronçon de poutre cylindrique, est en flexion simple dès que le torseur des efforts intérieurs se présente sous la forme suivante :

$$\{T_{int}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_z & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}_G$$

Ce qui distingue la flexion simple de la flexion pure est la présence de l'effort tranchant T_y .

4-2 Relation entre effort tranchant et moment fléchissant

Isolons un tronçon de poutre dx soumis à un effort tranchant T_y et un moment fléchissant Mf_z et appliquons le PFS.



Les équations donnent:

$$T_y(x+dx) - T_y(x) + q(x).dx = 0$$

$$Mf_z(x+dx) - Mf_z(x) + T_y(x+dx).dx + q(x).dx \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

En conservant les termes du même ordre, on obtient:



Relations utiles pour les diagrammes

$$\frac{dT_y}{dx} = -q(x)$$

$$\frac{Mf_z}{dx} = -T_y$$

Ces deux équations sont les équations d'équilibre d'un petit élément de poutre travaillant en flexion simple.

Remarque: Les résultats obtenus permettent de vérifier l'allure des diagrammes donnant T_y et Mf_z le long de la poutre.

En absence de charge répartie, l'effort tranchant est constant sur chaque zone d'étude et le moment fléchissant a alors une évolution linéaire sur chaque zone d'étude.

Dans le cas d'une charge répartie uniforme sur une zone, l'effort tranchant est linéaire sur cette zone et le moment fléchissant a une évolution parabolique.

4-3 Contraintes et déplacements dus à l'effort tranchant



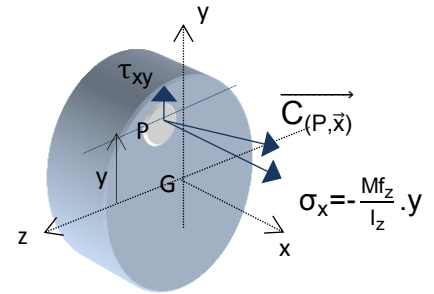
Connaître la formule et la représentation

L'effort tranchant T_y occasionne dans la section droite des contraintes tangentielles suivant y τ_{xy} d'où l'expression du vecteur contrainte:

$$\overrightarrow{C(M, \vec{x})} = \sigma_x \cdot \vec{x} + \tau_{xy} \cdot \vec{y}$$

Ces contraintes tangentielles sont souvent négligeables par rapport aux contraintes normales dues au moment fléchissant. La théorie élémentaire permet néanmoins de calculer une contrainte tangentielle moyenne dans la section de la poutre considérée.

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{S}$$



Remarque: Ce calcul s'appuie sur l'hypothèse d'une répartition uniforme de la contrainte tangentielle dans la section droite qui est très éloignée de la réalité.

Les déplacements dus à l'effort tranchant sont toujours négligeables par rapport aux déplacements dus au moment fléchissant dans le cas des poutres.

Dans le cadre de ce cours, on négligera donc les effets de l'effort tranchant par rapport à ceux du moment fléchissant.

Relation contrainte-efforts tranchant



Pour aller plus loin ...

Les relations d'équivalence permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{R(x)} = \int_{(S)} \overrightarrow{C(P, \vec{x})} \cdot dS = T_y \cdot \vec{y} \\ \overrightarrow{M_{G(x)}} = \int_{(S)} \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{C(P, \vec{x})} \cdot dS = Mf_z \cdot \vec{z} \end{cases}$$

On déduit pour l'effet de l'effort tranchant

$$\int_{(S)} \tau_{xy} \cdot dS = T_y$$

Dans le cas d'une sollicitation de flexion simple, le vecteur contrainte s'écrit

$$\overrightarrow{C(P, \vec{u})} = \sigma_x \cdot \vec{x} + \tau_{xy} \cdot \vec{y}$$

Il s'agit ici de définir la contrainte tangentielle

Théorie élémentaire

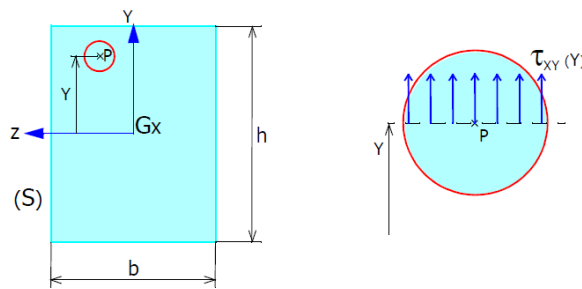
Hypothèse simplificatrice : la répartition des contraintes tangentielles est uniforme dans la section droite.

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{S}$$

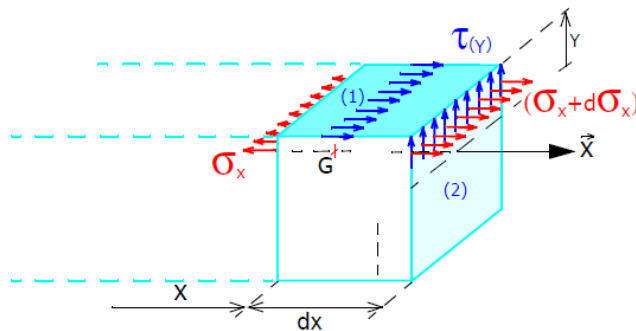
On a donc avec cette première expression un moyen de calculer les contraintes tangentielles sous l'hypothèse qu'elles sont uniformes sur la section. Cette expression est souvent utilisée, car elle donne un majorant de la valeur de la contrainte tangentielle. Elle n'est cependant pas exacte car les contraintes tangentielles ne sont pas uniforme sur la section : elles dépendent de y .

Théorie simplifiée

Hypothèse: la répartition des contraintes tangentielles est uniforme le long d'une ligne parallèle à z (elle est fonction uniquement de la cote y)



L'isolement d'une tranche élémentaire de poutre sous le plan de cote y permet alors de déterminer τ_{xy} .



Le moment de flexion Mf_z produit un champ de contraintes normales sur la face (0) $\sigma_x = \frac{Mf_z}{I_z} \cdot v$

Le moment de flexion $Mf_z + dMf_z$ produit un champ de contraintes normales sur la face (2) $\sigma_x + d\sigma_x = \frac{Mf_z + dMf_z}{I_z} \cdot v$

Les contraintes tangentielles sur la face (1) sont τ_{xy}

L'équilibre de l'élément suivant l'axe x donne

$$\int_{(0)} \frac{Mf_z}{I_z} \cdot v \cdot dS - \int_{(2)} \frac{Mf_z + dMf_z}{I_z} \cdot v \cdot dS + \tau_{xy} \cdot b \cdot dx = 0$$

Les surfaces (0) et (2) étant identiques, on obtient

$$\int_{(2)} \frac{-dMf_z}{I_z} \cdot v \cdot dS + \tau_{xy} \cdot b \cdot dx = 0$$

$$-\frac{dMf_z}{I_z} \int_{(2)} v \cdot dS + \tau_{xy} \cdot b \cdot dx = 0$$

D'où l'expression de τ_{xy} en fonction de T_y

$$\tau_{xy} = -\frac{T_y}{b \cdot I_z} \cdot \int_{(2)} v \cdot dS$$

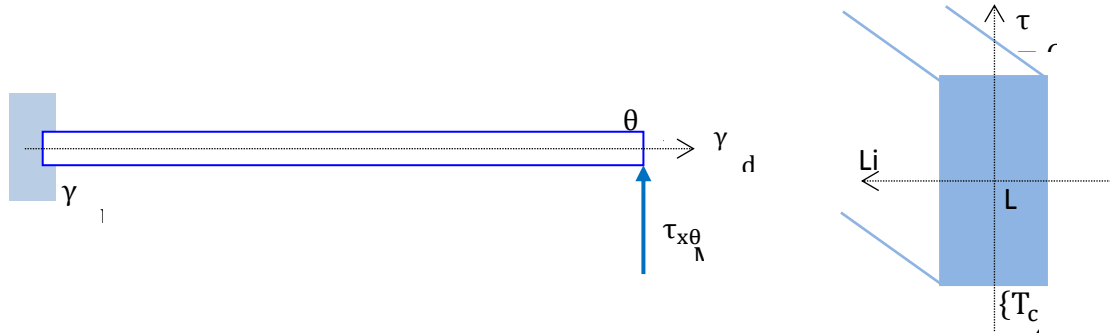
Cette expression appelée formule de Bredt permet d'avoir une meilleure approximation de la contrainte tangentielle dans la section droite. Elle fait intervenir le moment statique de la section S par rapport à l'axe z

Remarque : dans le cas de la section rectangulaire représentée ci-dessus, le calcul donne :

$$\tau_{xy} = \frac{3T_y}{2 \cdot b \cdot h} \left\{ 1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right\}$$

Ordre de grandeur des contraintes

Prenons le cas d'une poutre de section rectangulaire.



La section la plus dangereuse se situe au point O (si elle ne varie pas sur OA)

Au point O, $T_y = F$ et $M_f = F \cdot L$

Dans la section, la contrainte tangentielle est maximale sur Gz (pour $y=0$) et prend la valeur

$$\tau_{xy\text{MAXI}} = \frac{3T_y}{2 \cdot b \cdot h} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right\} = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{b \cdot h}$$

Remarque: dans le cas de la théorie élémentaire, la contrainte tangentielle moyenne vaut:

$$\tau_{xy\text{MOY}} = \frac{F}{b \cdot h}$$

On constate que: $\tau_{xy\text{MAXI}} = \frac{3}{2} \cdot \tau_{xy\text{MOY}}$

Dans cette même section, la contrainte normale est maximale sur Pz (pour $y=h/2$) et vaut

$$\sigma_x = -\frac{M_f}{I_z} \cdot y = 6 \cdot \frac{FL}{b \cdot h^2}$$

On peut alors estimer l'ordre de grandeur du rapport des contraintes normales et tangentielles maximales dans la section 0

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x} \approx \frac{h}{4L}$$



Sur MOODLE

Pas d'activité correspondante

5. La torsion

5-1 Définition et hypothèses



Connaître la définition et l'hypothèse

Pour pouvoir étudier la sollicitation élémentaire de torsion, il faut restreindre le cadre d'application. En effet, l'étude de la torsion présentée ici se limitera au cadre des poutres droites à sections circulaires. Ainsi, les poutres étudiées sont des cylindres de révolution à base circulaire.

Cette restriction est liée au fait que pour toute section qui n'est pas circulaire, les résultats qui seront présentés sont faux car :

- les sections ne restent pas planes et se gauchissent,
- la contrainte de cisaillement qui est perpendiculaire au rayon vecteur (comme nous le verrons par la suite) ne peut pas être tangente au contour non circulaire de la section.

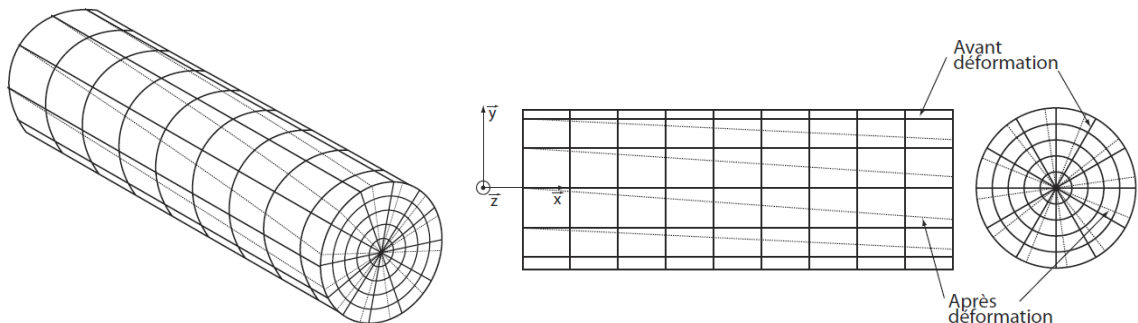
Une poutre, ou un tronçon de poutre cylindrique, est en torsion dès que le torseur des efforts intérieurs se présente sous la forme suivante :

$$\{T_{\text{coh}}\} = \begin{Bmatrix} 0 & M_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

Il nous faut maintenant connaître la répartition des contraintes et des déformations dans la section. Pour déterminer cette répartition, nous allons nous baser sur des résultats expérimentaux.

5-2 Constatations expérimentales et conséquences

On considère un barreau cylindrique soumis à une de ces deux extrémités à un moment porté par l'axe du barreau, et bloqué en rotation à son autre extrémité.



On peut faire les constats suivants :

- Toute section plane et normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe, ce qui vérifie bien l'hypothèse de Navier-Bernoulli présentée précédemment,
- La distance entre deux sections droites données reste sensiblement constante,
- Le mouvement d'une section droite est uniquement une rotation autour de son axe et cette rotation est proportionnelle à sa distance à la section encastrée.

Ainsi, une génératrice du cylindre (une droite avant déformation) se transforme en une hélice sur le cylindre.

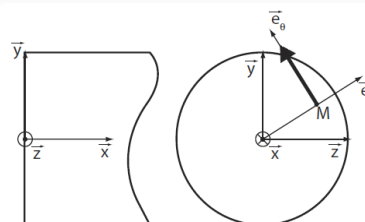
Des remarques précédentes on peut donc déduire que :

- dans une section droite, il n'y a pas de déformation longitudinale donc de contrainte normale, les sections ont seulement un mouvement de rotation sans aucune translation,
- les seules contraintes sont donc des contraintes tangentielles.



Connaître la répartition des contraintes

On a donc $\vec{C}_{(P,\vec{x})} = \tau_{x\theta} \cdot \vec{e}_\theta$





Pour aller plus loin ...

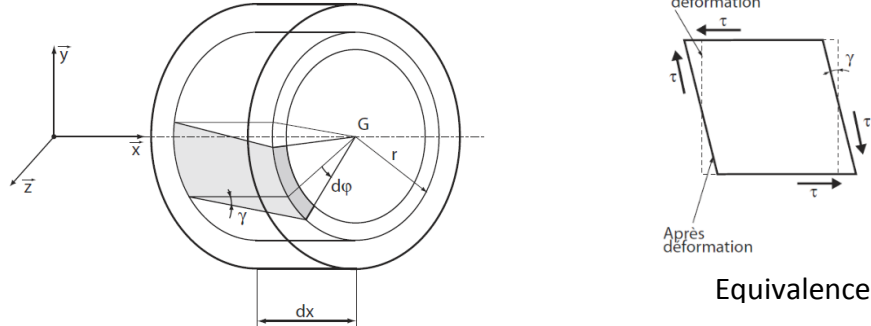
Chaque point P d'une section droite est donc soumis uniquement à une contrainte tangentielle qui tend à cisailer la matière.

Si $d\varphi$ est l'angle de rotation entre les deux sections droites, la distorsion γ s'écrit alors :

$$\gamma = r \cdot \frac{d\varphi}{dx}$$

Les lois de Hooke généralisées donnent la relation linéaire :

$$\tau_{x\theta} = G \cdot \gamma$$



Rappel : G est appelé module de cisaillement. Il dépend des caractéristiques du matériaux E (module d'élasticité du matériau) et ν (coefficient de poisson du matériau).

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

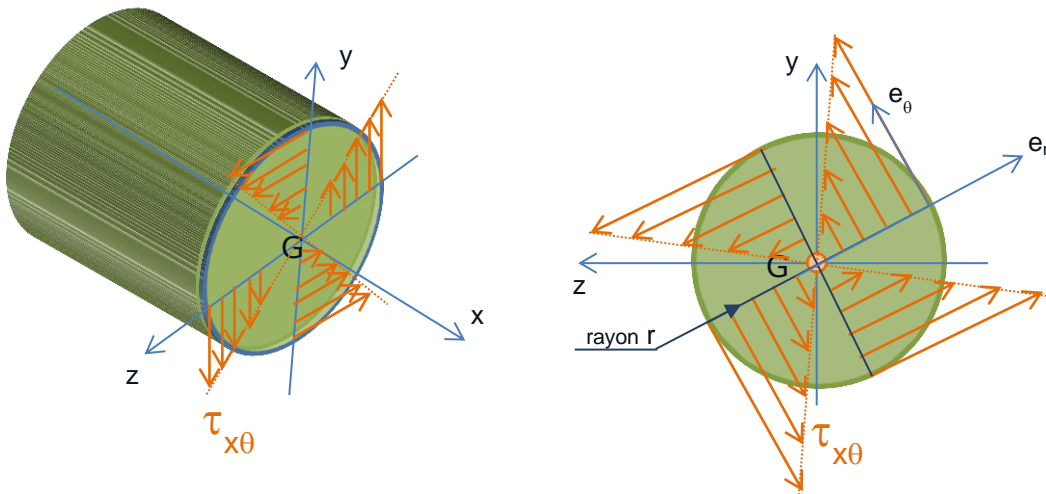
Matériau	Module de cisaillement G en 10^6 MPa	Limite pratique de glissement R_{pg} en MPa
Acier	80 000	250
Aluminium	26 000	200
Verre	24 000	—
Polystyrène	10 500	—

On introduit une nouvelle grandeur globale, l'angle unitaire de torsion θ :

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx}$$

On déduit la relation de proportionnalité :

$$\tau_{x\theta} = G \cdot r \cdot \theta$$



5-3 Relation contrainte-moment de torsion

Les relations d'équivalence permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \vec{R}_{(x)} = \int_{(S)} \vec{C}_{(P,\vec{x})} \cdot dS = \vec{0} \\ \vec{M}_{G(x)} = \int_{(S)} \vec{GP} \wedge \vec{C}_{(P,\vec{x})} \cdot dS = M_x \cdot \vec{x} \end{cases}$$

La distribution des vecteurs contrainte permet de vérifier la première relation.
La deuxième relation s'écrit

$$M_x \cdot \vec{x} = \int_{(S)} \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{C_{(P,\vec{x})}} \cdot dS = \int_{(S)} r \cdot \vec{e}_r \wedge G \cdot r \cdot \theta \cdot \vec{e}_\theta \cdot dS = G \cdot \theta \cdot \int_{(S)} r^2 \cdot dS \cdot \vec{x}$$



Connaître la formule de la contrainte

On déduit :

$$M_x = G \theta I_x$$

I_x correspond au moment quadratique polaire de la section.
Des relations précédentes, on obtient la contrainte tangentielle

$$\tau_{x\theta} = \frac{M_x}{I_x} \cdot r$$

5-4 Relation contrainte-déformation et déformation-rotation



Pour aller plus loin ...

Comme nous l'avons vu précédemment, la relation entre la contrainte et la déformation est donnée par la loi de Hooke :

$$\tau_{x\theta} = G \cdot \gamma$$

On déduit

$$\gamma = \frac{M_x}{G \cdot I_x} \cdot r$$

L'angle unitaire de torsion s'exprime alors en fonction du moment de torsion.

$$\theta = \frac{M_x}{G \cdot I_x}$$

La rotation relative entre deux sections s'obtient alors par intégration $\frac{d\varphi}{dx} = \theta$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 \theta(x) \cdot dx$$

Dans le cas d'un angle unitaire de torsion constant

$$\Delta\varphi = \theta \cdot \Delta l = \frac{M_x}{G \cdot I_x} \cdot \Delta l$$

5-5 Critère de dimensionnement

Pour dimensionner la poutre on peut utiliser deux types de critères :

- un critère de résistance
- un critère de rigidité

Le critère de résistance va traduire le fait que le matériau doit rester dans la zone élastique, moyennant un coefficient de sécurité s .

$$\tau_{\max} \leq \frac{R_{pg}}{s}$$

Le critère de rigidité traduit, moyennant un coefficient de sécurité s , que la rotation en un point N doit rester inférieure à une valeur donnée dépendante des conditions d'utilisation :

$$\Delta\varphi_{\max} \leq \frac{\varphi_{\text{adm}}}{s}$$

Activités sur les sollicitations simples

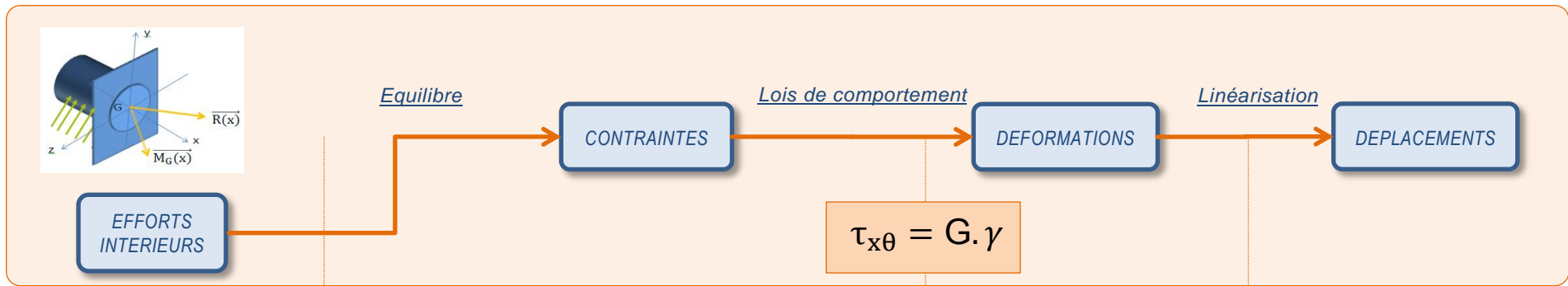
SOLLICITATION DE TORSION

- Être capable de dimensionner une poutre sollicitée en torsion dans un cas simple

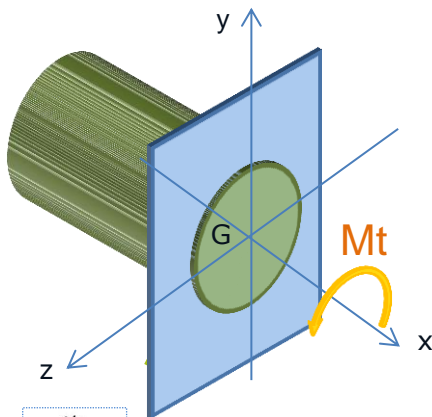
 Synthèse pour la sollicitation de TORSION



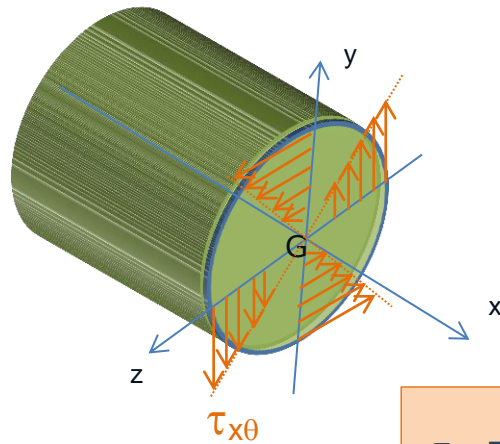
Sur MOODLE



$$\{T_{int}\} = \begin{Bmatrix} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

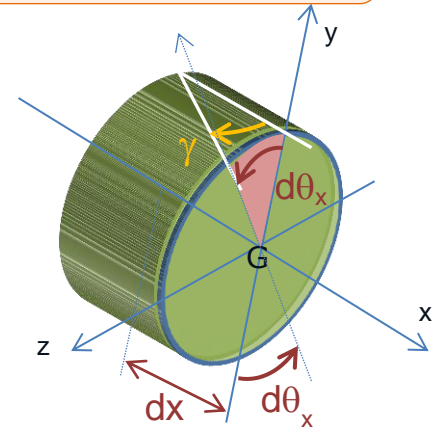
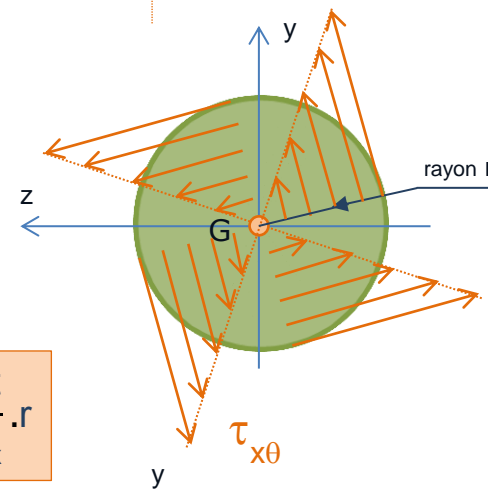


Uniquement pour les sections circulaires



$$\tau_{x\theta} = \frac{Mt}{I_{Gx}} \cdot r$$

(Lieu de contraintes nulle pour une section circulaire : point G)



$$Mt = G \cdot I_{Gx} \cdot \frac{d\theta_x}{dx}$$

Si le moment de torsion est uniforme sur la longueur de la poutre L

$$Mt = G \cdot I_{Gx} \cdot \frac{\Delta\theta_x}{L}$$

Les sollicitations composées

1. Nécessité d'un critère de limite d'étude

1-1 Mise en évidence

L'essai de traction uniaxial a permis de traduire mettre en évidence la limite élastique R_e qui délimite la zone élastique. Au-delà, le matériau a un comportement plastique.

Ainsi, pour traduire la non plastification de la pièce dans le cas où la contrainte est uniquement normale, on peut écrire : $\sigma_x < R_e$

Comment peut-on prédire la détérioration d'une pièce soumise à un chargement quelconque?

En effet, nous avons vu que chaque point d'une pièce chargée subit un état de contraintes caractérisé par une matrice des contraintes.

Cet état de contraintes est très variable suivant l'endroit où on se situe sur la pièce, suivant la géométrie et suivant le chargement extérieur.

Il peut être également complexe.

- On peut observer des contraintes dans toutes les directions autour du point.
- Ces contraintes provoquent autour du point soit de l'extension ou de la compression, soit du cisaillement.

Le critère de résistance doit répondre à la difficulté de passer d'un état de contraintes quelconque (dans une pièce chargée) à l'état de contraintes de l'essai de référence dont la limite R_e est connue. Le critère le plus utilisé pour traduire la non plastification de la pièce est le critère de Von-Mises.

1-2 Critère de Von-Mises



Connaître la répartition des contraintes

Deux états de contraintes présentent le même danger s'il y a égalité des énergies de variation de forme.

On démontre alors qu'il existe une contrainte équivalente qui permet de se ramener à l'essai de référence et que l'on peut alors comparer à R_e .

En RDM, la contrainte équivalente de VON-MISES s'écrit : $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$

La connaissance de la contrainte équivalence permet alors d'écrire le critère de non plastification Critère de non plastification :

$$\sigma_{VM} < \sigma_{adm} = \frac{R_e}{s}$$

s : coefficient de sécurité ou d'incertitude (dépend de la validité du modèle d'étude, de la qualité des matériaux, de sa mise en forme, de la sécurité des personnes et des biens mis en jeu, ...

s=1,5 à 2 en aéronautique

s=2 à 5 pour la construction mécanique classique

s=8 à 10 pour les matériaux non homogènes, les chocs, ...



Pour aller plus loin ...

Sur un logiciel de dimensionnement (logiciel Eléments Finis), les cartes donnant la variation des composantes de contrainte ne donnent qu'une image partielle et ne permettent aucune interprétation sur les risques de dépassement de la limite élastique R_e . De plus, elles dépendent du repère dans lequel elles sont exprimées.

Seule l'image de la carte des contraintes équivalentes de Von Misès permet de visualiser clairement la(les) zone(s) soumise(s) au risque de plastification.

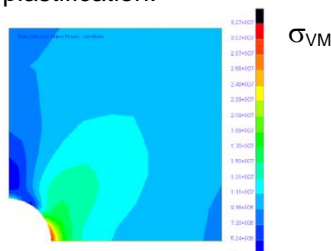


Figure : résultat d'un logiciel Eléments Finis donnant la contrainte équivalente de Von-Mises



Voir session "Mécanique des milieux continus", notion de contraintes

Sur MOODLE

2. La flexion traction

2-1 Définition et hypothèse



Connaître la définition

Une poutre, ou un tronçon de poutre cylindrique, est en flexion simple dès que le torseur des efforts intérieurs se présente sous la forme suivante :

$$\{\vec{T}_{int}\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ T_z & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}_G$$

On se place ici dans le cas où l'influence de l'effort tranchant est négligeable devant les autres sollicitations

2-2 Champ de contraintes

Dans un cas général, le vecteur contrainte s'écrit

$$\vec{C}(P, \vec{x}) = \sigma_x \cdot \vec{x} + \tau_{xy} \cdot \vec{y}$$



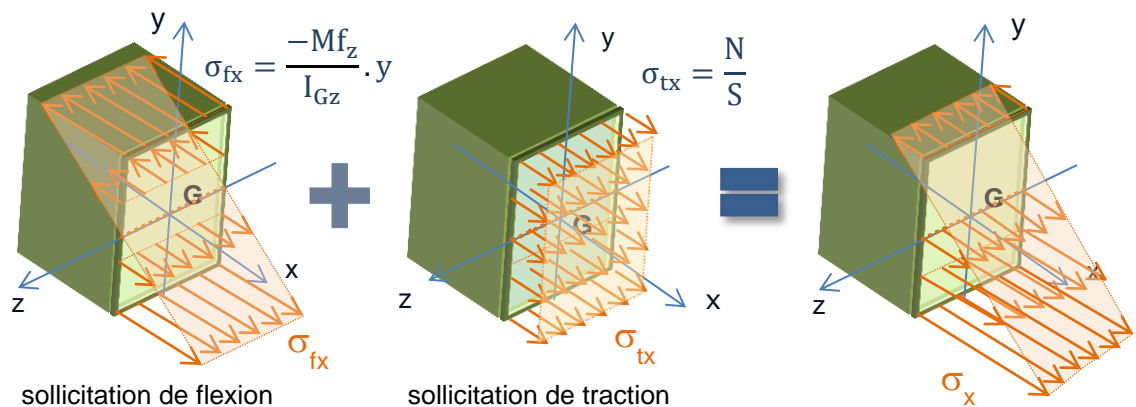
Connaître la répartition des contraintes

En négligeant l'effet de l'effort tranchant, la contrainte est alors purement normale

$$\vec{C}(P, \vec{x}) = \sigma_x \cdot \vec{x}$$

La valeur de la contrainte normale σ_x résulte de la somme des contraintes de traction et des contraintes de flexion.

$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{-Mf_z}{I_z} \cdot y$$



2-3 Champ de déplacements

Le champ de déplacement pour une sollicitation de traction – flexion est la superposition du champ de déplacement en traction et du champ de déplacement en flexion.

En négligeant les effets de l'effort tranchant, on obtient:

$$\frac{du}{dx} = \frac{N(x)}{E.S}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{Mf_z(x)}{E.I_z}$$




Sur MOODLE

Activités sur les sollicitations composées

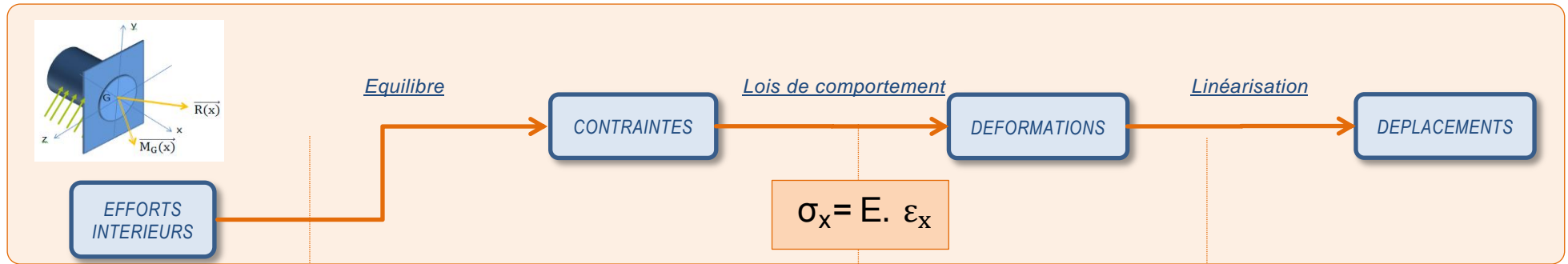
SOLLICITATION DE FLEXION TRACTION

- Être capable de dimensionner une poutre sollicitée en FLEXION TRACTION dans un cas simple

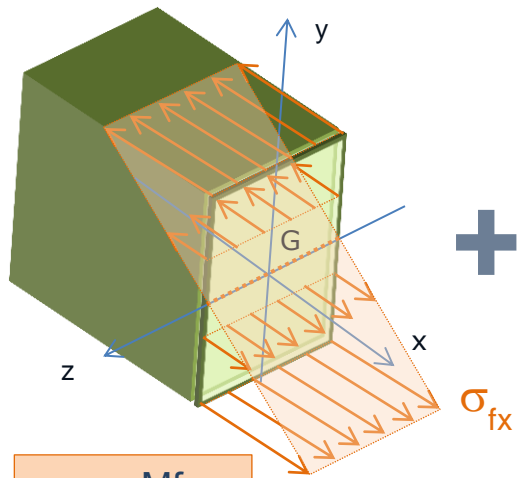
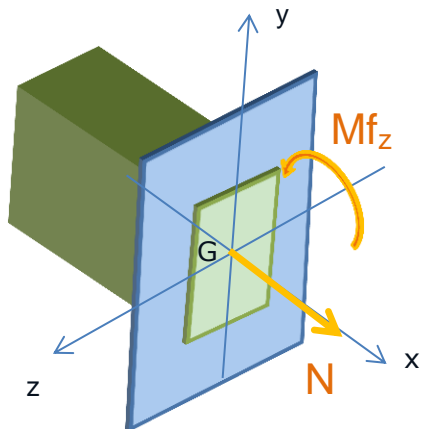
 Synthèse pour la sollicitation de FLEXION-TRACTION

 Eléments de cours pour une sollicitation de FLEXION TRACTION





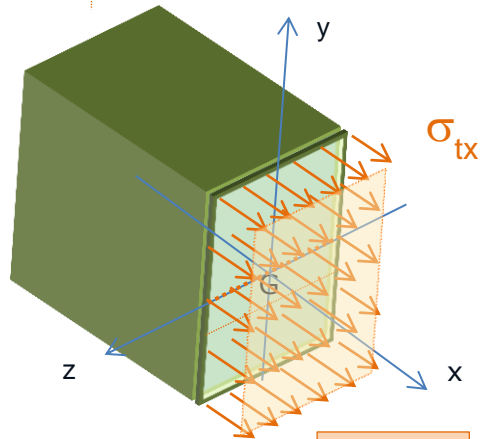
$$\{T_{int}\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}_G$$



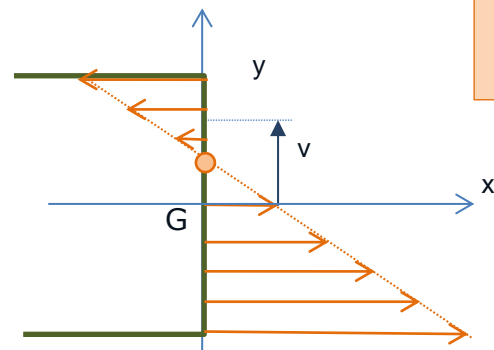
$$\sigma_{fx} = \frac{-Mf_z}{I_{Gz}} \cdot y$$

$$\vec{C}_{M,\vec{x}} = \sigma_x \cdot \vec{X}$$

contrainte normale



$$\sigma_{tx} = \frac{N}{S}$$



On superpose les déformations de flexion et de traction



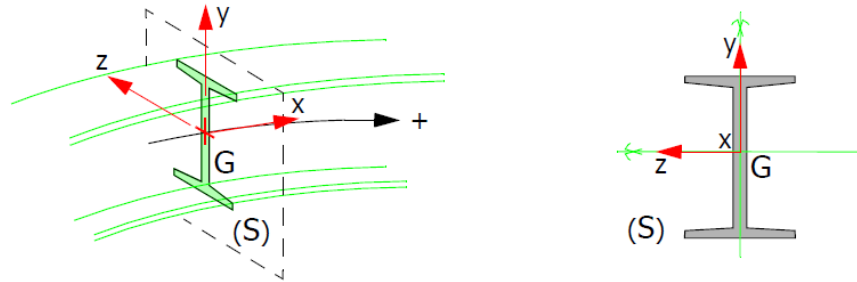
Les déformations dues à l'effort normal sont souvent négligées par rapport aux déformations dues au moment fléchissant.

3. La flexion déviée

3-1. Rappels

Pour définir les éléments de réduction du torseur des efforts intérieurs, on se place dans un système de coordonnées local (G, x, y, z) défini de la manière suivante :

- G est le centre géométrique de la section.
- \vec{x} est tangent en G à la ligne moyenne dirigé dans le sens positif,
- \vec{y} et \vec{z} sont les directions principales de la section droite (S).

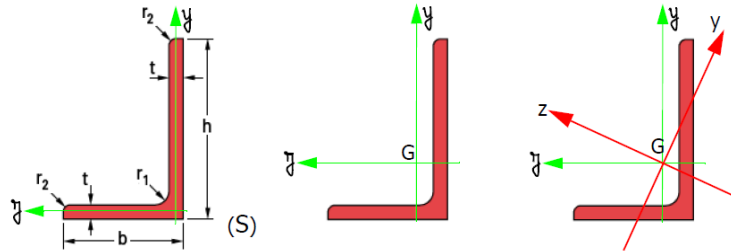


Détermination des directions principales

- quand la section possède un axe de symétrie, G est sur cet axe et l'axe de symétrie définit une direction principale.
- Sinon, on recherche les axes principaux de la section.

Exemple d'une cornière à ailes inégales:

Dans des axes arbitrairement choisis, on cherche les coordonnées de G.



On calcule ensuite dans ces axes centrés en G la matrice des moments quadratiques: Les directions (y, z) recherchées sont les directions principales de cette matrice.

$$\begin{pmatrix} \iint_{(S)} y^2 dS & -\iint_{(S)} yz dS \\ -\iint_{(S)} yz dS & \iint_{(S)} z^2 dS \end{pmatrix} \quad dS \text{ élément surfacique.}$$

Les valeurs propres sont les moments quadratiques principaux:

3-2. Champ de contraintes

Une poutre, ou un tronçon de poutre, est sollicitée en flexion déviée dès que le torseur des efforts intérieurs se présente sous la forme suivante :

$$\{T_{coh}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_y & Mf_y \\ T_z & Mf_z \end{pmatrix}_G$$

Le moment résultant est: $\vec{M}_G = Mf_y \cdot \vec{y} + Mf_z \cdot \vec{z}$

Les contraintes normales résultent de la superposition de deux sollicitations de flexion simple.

Pour la flexion autour de z: $\sigma_x = -\frac{Mf_z}{I_z} \cdot y$

Pour la flexion autour de y: $\sigma_x = \frac{Mf_y}{I_y} \cdot z$



Connaître la définition et la répartition des contraintes

$$\sigma_x = -\frac{Mf_z}{I_z} \cdot y + \frac{Mf_y}{I_y} \cdot z$$

On peut alors déduire le lieu des contraintes nulles $\sigma_x=0$ appelé axe neutre.

$$-\frac{Mf_z}{I_z} \cdot y + \frac{Mf_y}{I_y} \cdot z = 0$$

La contrainte est proportionnelle à la distance à l'axe neutre. L'équation montre que l'axe neutre n'est en général pas confondu avec la ligne d'action du vecteur moment résultant \vec{M}_G .

La ligne d'action du moment fléchissant et l'axe neutre ne coïncident donc que lorsque \vec{M}_G est dirigé suivant une direction principale de la section.

3-3. Champ de déplacements

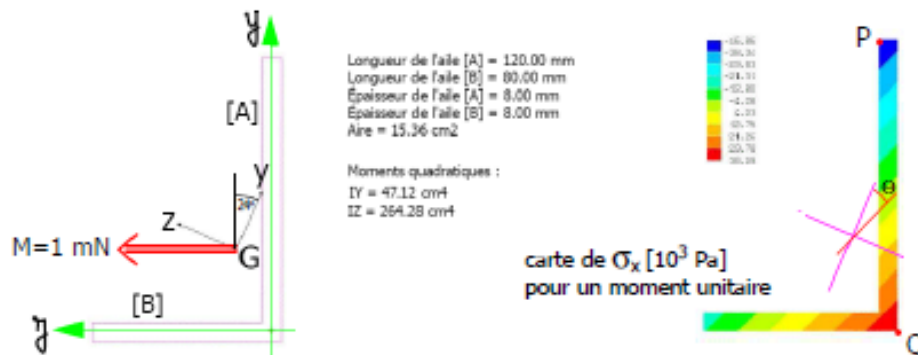
La déformation de la poutre est caractérisée par un vecteur dont les composantes sont :

$$\frac{d\theta_z}{dx} = \frac{Mf_z}{E \cdot I_{Gz}} \quad \text{et} \quad \frac{d\theta_y}{dx} = \frac{-Mf_y}{E \cdot I_{Gz}}$$

Les vecteurs \vec{M}_G et $\vec{d\theta}$ n'ont pas, comme dans la flexion pure la même direction ; cette remarque justifie le nom de flexion déviée.

Exemple de la cornière

Soit par exemple une cornière à ailes inégales soumise à un moment M unitaire (voir figure):



Pour M unitaire, les composantes M_y et M_z se calculent dans les axes principaux:

$$M_y = -\sin(24) \cdot 1 = -0.406 \quad \text{et} \quad M_z = \cos(24) \cdot 1 = 0.914$$

Pour M unitaire, la contrainte s'écrit:

$$\sigma_x = -\frac{Mf_z}{I_z} \cdot y + \frac{Mf_y}{I_y} \cdot z = -(0.346 \cdot y + 0.862 \cdot z) 10^6 \text{ Pa}$$

Les valeurs extrêmes sont atteintes en P et en Q (voir figure).

Les isovaleurs sont inclinées de Θ par rapport à \vec{y}

$$\tan \theta = \frac{0,346}{0,862} = 0,401 \quad \text{d'où} \quad \theta = 21,8^\circ$$




Sur MOODLE

Activités sur les sollicitations composées

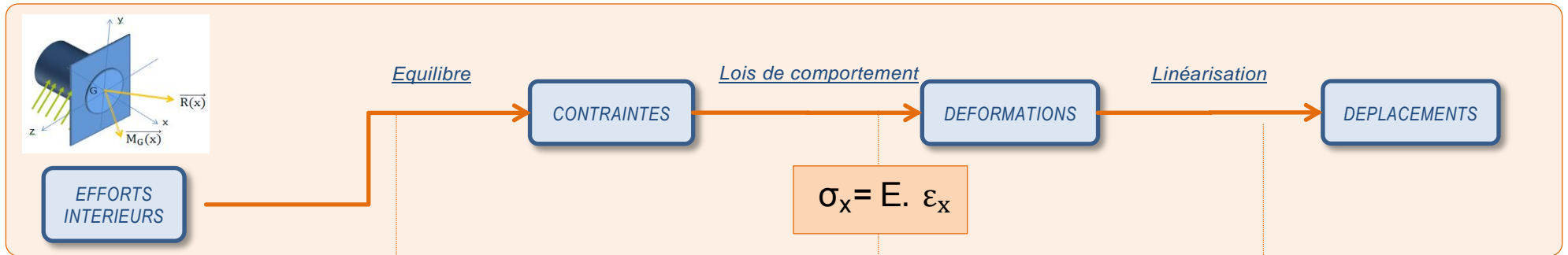
SOLLICITATION DE FLEXION DEVIEE

- Être capable de dimensionner une poutre sollicitée en FLEXION DEVIEE dans un cas simple

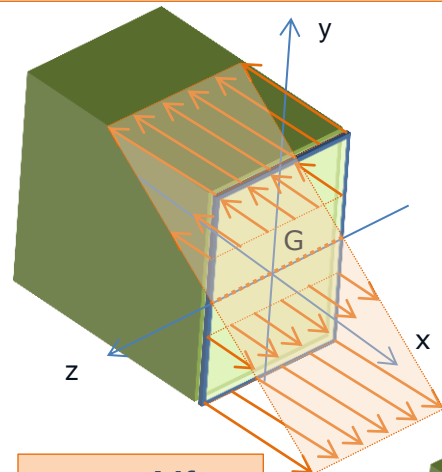
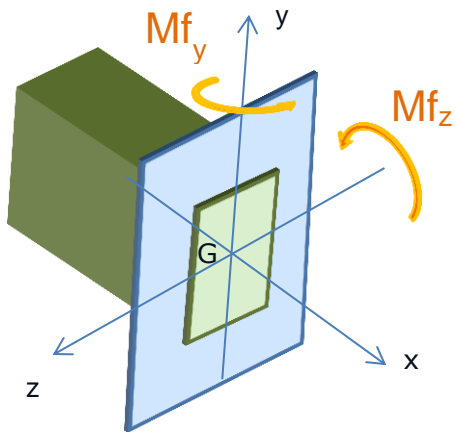
 Synthèse pour une sollicitation de FLEXION-DEVIEE

 Eléments de cours pour la sollicitation de FLEXION DEVIEE

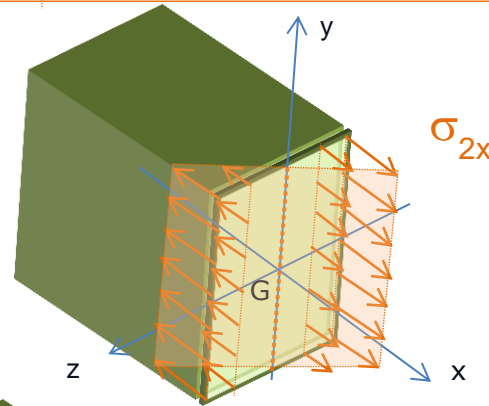




$$\{T_{int}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Mf_y \\ 0 & Mf_z \end{pmatrix}_G$$

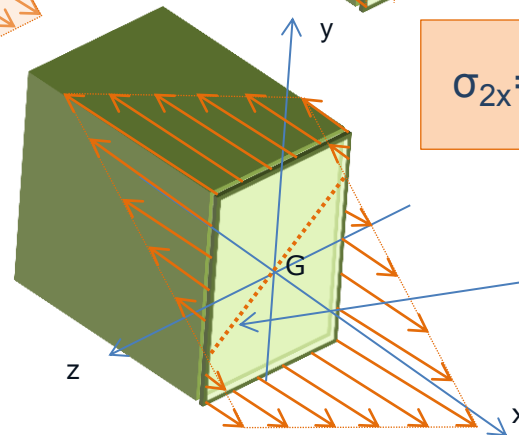


$$\sigma_{1x} = \frac{-Mf_z}{I_{Gz}} \cdot y$$



$$\sigma_{2x} = \frac{Mf_y}{I_{Gy}} \cdot z$$

=



On superpose les déformations de flexion.

$$Mf_z = E \cdot I_{Gz} \cdot v_y''$$

$$Mf_y = -E \cdot I_{Gy} \cdot v_z''$$



Dans la base principale

$$\vec{C}_{M,\vec{x}} = (\sigma_{1x} + \sigma_{2x}) \cdot \vec{x}$$

contrainte normale

$$\frac{Mf_y}{I_{Gy}} \cdot z - \frac{Mf_z}{I_{Gz}} \cdot y = 0$$

4. La flexion torsion

4-1 Définition



Connaître la définition

Une poutre, ou un tronçon de poutre, est sollicitée en flexion-torsion dès que le torseur des efforts intérieurs se présente sous la forme suivante :

$$\{T_{\text{coh}}\} = \begin{Bmatrix} 0 & M_x \\ T_y & Mf_y \\ T_z & Mf_z \end{Bmatrix}_G$$

Nous nous plaçons dans le cas de section circulaire.

Dans ce cas, tous les axes passant par le centre géométrique de la section droite sont des axes principaux. Ainsi, dans chaque section, on peut définir un moment de flexion Mf résultant:

$$Mf = \sqrt{Mf_y^2 + Mf_z^2}$$

4-2 Champ des contraintes



Connaître la répartition des contraintes

Pour les sections circulaires, les contraintes tangentiels dues aux efforts tranchants peuvent être négligées par rapport aux contraintes tangentiels dues au moment de torsion.

Le vecteur contrainte s'écrit:

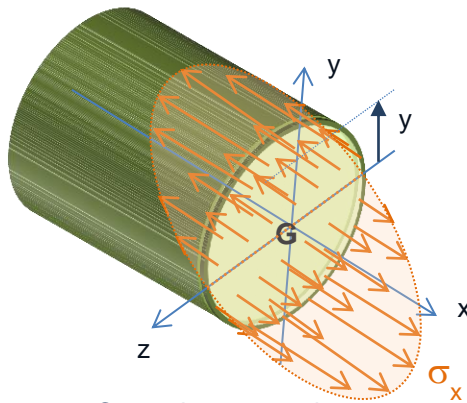
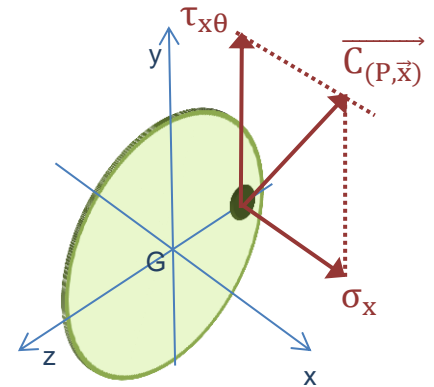
$$\overrightarrow{C(M, \vec{x})} = \sigma_x \cdot \vec{x} + \tau_{x\theta} \cdot \vec{e}_\theta$$

Avec $\sigma_x = -\frac{Mf_z}{I_z} \cdot y$ et $\tau_{x\theta} = \frac{M_x}{I_x} \cdot r$

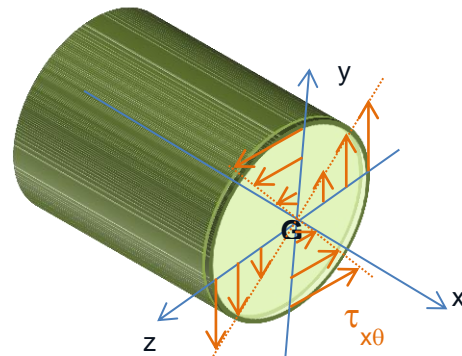
Remarque : on suppose ici que le moment fléchissant résultant est autour de Gz .

L'état de contrainte au point M est caractérisé par la matrice

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{x\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{x\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Contrainte normale



Contrainte tangentielle

Une diagonalisation de la matrice permet de calculer:

Les contraintes principales:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \sigma_{x\text{maxi}} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{x\text{maxi}}^2 + 4 \cdot \tau_{x\theta\text{maxi}}^2} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma_{x\text{maxi}} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{x\text{maxi}}^2 + 4 \cdot \tau_{x\theta\text{maxi}}^2}$$

La contrainte normale maximale : $\sigma_{\text{maxi}} = \frac{1}{2} \sigma_{x\text{maxi}} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{x\text{maxi}}^2 + 4 \cdot \tau_{x\theta\text{maxi}}^2}$

La contrainte tangentielle maximale : $\tau_{\text{maxi}} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{x\text{maxi}}^2 + 4 \cdot \tau_{x\theta\text{maxi}}^2}$

La contrainte équivalente de Von-Mises : $\sigma_{\text{eqVM}} = \sqrt{\sigma_{x\text{maxi}}^2 + 3 \cdot \tau_{x\theta\text{maxi}}^2}$

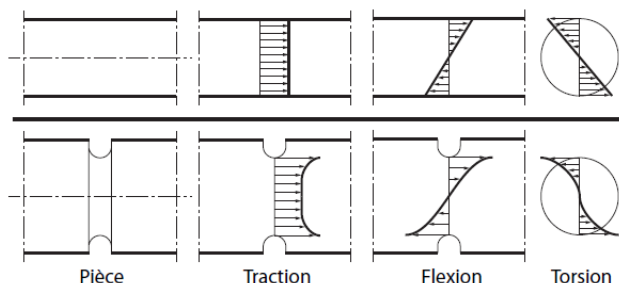
4-3 Notion de concentrations de contraintes



Pour aller plus loin ...

La concentration de contraintes est un problème souvent rencontré en conception mécanique. C'est un phénomène d'augmentation locale des contraintes dans une zone comportant une modification géométrique de la pièce.

Sur la figure ci-dessous, on présente pour deux géométries d'un barreau cylindrique l'allure de répartition des contraintes normales en traction et en flexion, et des contraintes tangentielles en torsion :



La zone de concentration de contraintes est souvent le site d'amorçage de fissures de fatigue et peut être aussi l'origine d'une rupture brutale dans le cas d'un matériau fragile. Dans le cas des poutres, le calcul de RdM ne donne plus des résultats corrects dans la zone où les contraintes sont concentrées. Mais les calculs restent valables tant que l'on s'éloigne "suffisamment" de l'accident géométrique (trou, variation brutale de la section, entaille. . .).

La définition du coefficient de concentration de contraintes repose sur une constatation fondamentale. Pour un type de chargement donné, le rapport entre la contrainte réelle (dans le cas où elle est inférieure à la limite d'élasticité) et la contrainte nominale en un point ne dépend pas de la valeur de la charge appliquée.

On appelle contrainte nominale la contrainte maximale calculée à partir d'une étude de RdM,

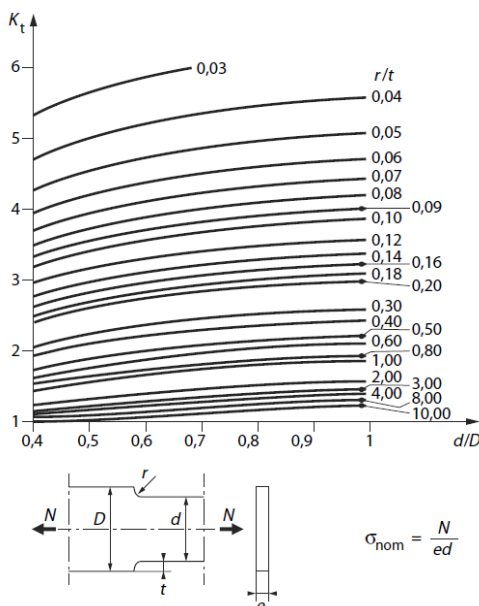
Le coefficient de concentrations de contraintes K_t est alors défini par le rapport entre la contrainte réelle et la contrainte nominale :

$$K_t = \frac{\sigma_{réel}}{\sigma_{nom}}$$

L'indice "t" est employé pour indiquer que ces coefficients sont théoriques et que leur calcul repose sur les hypothèses de la théorie de la mécanique des milieux continus. Le coefficient théorique de concentration de contraintes K_t dépend uniquement de la géométrie de la pièce (et en particulier de l'accident géométrique) et du type de sollicitation. Dans ce cas, on suppose que le matériau est élastique, linéaire, homogène et isotrope.

Plusieurs approches existent pour déterminer K_t : utilisation d'abaques, de formules (souvent approchées) donnant l'expression de K_t sous forme analytique, ou encore utilisation de logiciels dédiés.

L'exemple ci-dessous illustre l'importance de la géométrie sur les valeurs du coefficient de concentration de contraintes.



On peut noter également que le coefficient de concentration de contraintes est donné pour chaque sollicitation.

Ainsi, pour une sollicitation de flexion torsion, la contrainte équivalente de Von-Mises proche d'une zone de singularité s'écrit:

$$\sigma_{eqVM} = \sqrt{(K_{t_{flexion}} \cdot \sigma_{x_{maxi}})^2 + 3 \cdot (K_{t_{torsion}} \cdot \tau_{x\theta_{maxi}})^2}$$

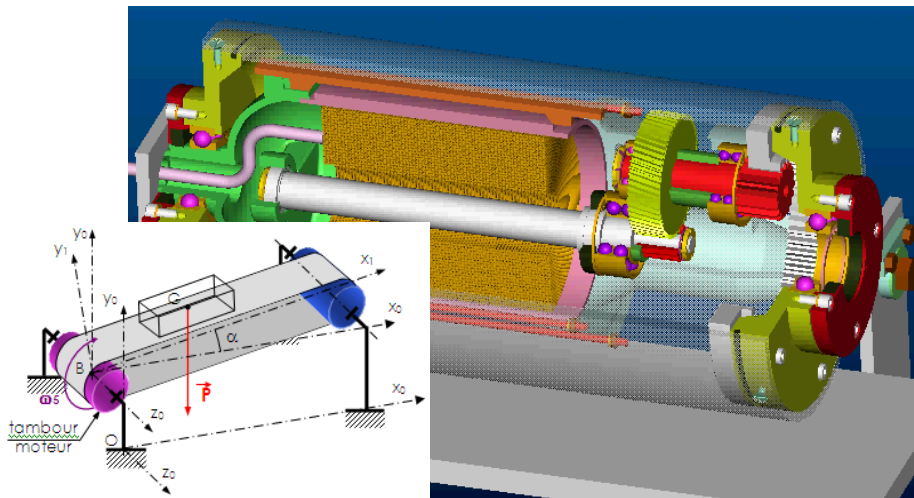
La contrainte normale due à la flexion a été multipliée par le coefficient de contraintes en flexion $K_{t_{flexion}}$. La contrainte tangentielle due à la torsion a été multipliée par le coefficient de contraintes en torsion $K_{t_{torsion}}$.

Application

On vérifie le dimensionnement d'un arbre intermédiaire de tambour moteur.



Exemple d'application

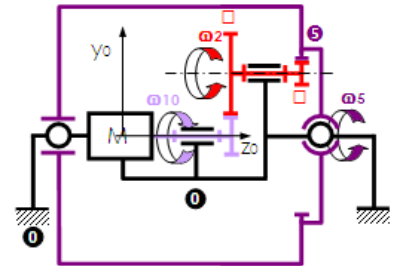


On donne la puissance maximale transmise $P_m=1,5$ kW et la vitesse de rotation du moteur $N_m=920$ tr/min.

Etape 1

Le modèle cinématique nous permet facilement de déterminer

- La vitesse de rotation de l'arbre intermédiaire N_2
- Le couple transmis par l'arbre intermédiaire $C_2=52,7$ Nm



Etape 2

Le modèle architectural nous permet ensuite de déterminer les efforts dans les liaisons en appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique.

Le calcul nécessite une modélisation des roulements (linéaire annulaire +rotule) et une modélisation du contact au niveau des engrenages (ponctuelles parfaites)

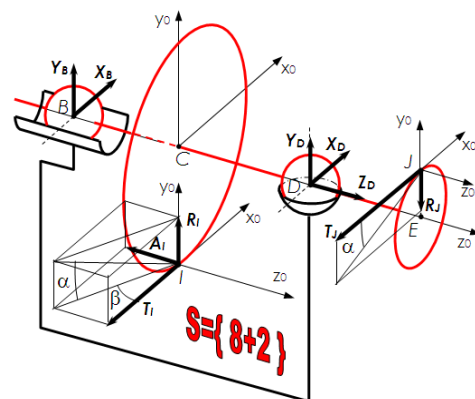
Les données géométriques des engrenages et les distances entre les centres de liaisons permettent de calculer les efforts.

$T_i=-1191$ N ; $R_i=442,5$ N ; $A_i=-252$ N

$T_j=-2635$ N ; $R_i=-959$ N

$X_B=-400$ N ; $Y_B=-895$ N

$X_D=4225$ N ; $Y_D=1411$ N ; $Z_D=252$ N





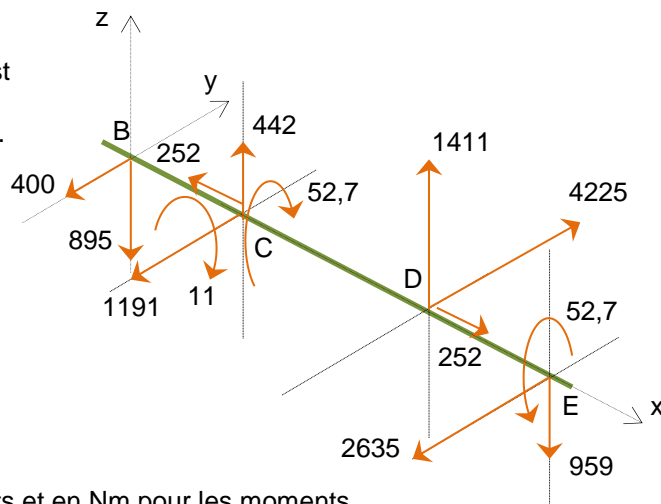
Exemple d'application

Etape 3

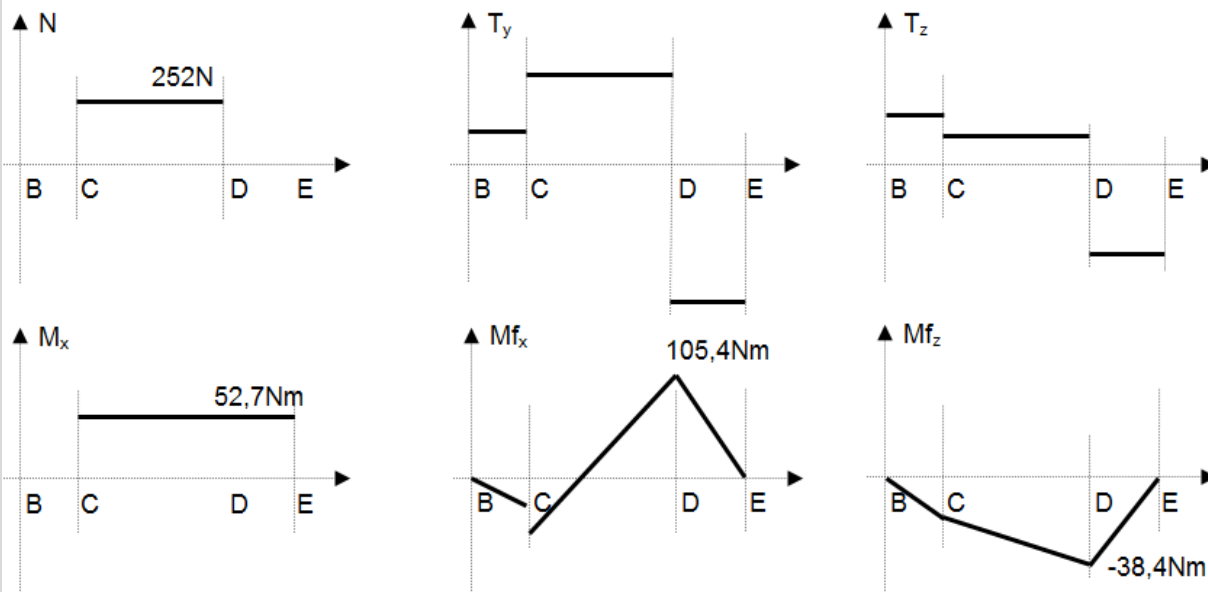
Le modèle de résistance des matériaux est un modèle poutre pour lequel tous les efforts sont ramenés sur la ligne moyenne.

L'arbre travaille

- En traction entre C et D
- En torsion entre C et E
- En flexion simple entre B et E.



Les valeurs sont en Newton pour les efforts et en Nm pour les moments



Les diagrammes des efforts intérieurs permettent d'identifier la zone la plus sollicitée.

Il s'agit ici du point D.

Dans cette zone, l'arbre est sollicité en traction-flexion-torsion.

Etape 4

Pour chaque sollicitation, on peut calculer les contraintes nominales.

Pour la traction,
$$\sigma_x = \frac{N}{S} = \frac{252}{490} = 0,51 \text{ MPa}$$

Pour la flexion, la section étant circulaire, tous les axes sont principaux et on peut calculer le moment résultant

$$M_f = \sqrt{M_{f_y}^2 + M_{f_z}^2} = 112,2 \text{ Nm}$$

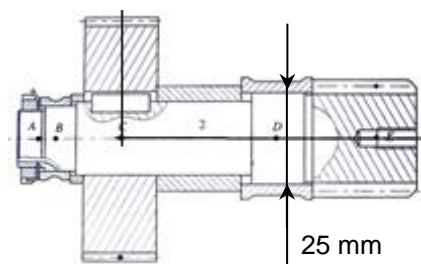
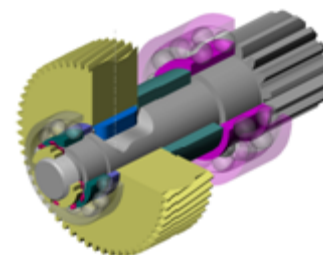
On déduit

$$\sigma_{x \text{ Maxi}} = \frac{M_f}{I_z} \cdot y_M = \frac{112200}{19165} \cdot 12,5 = 73 \text{ MPa}$$

Pour la torsion, la section étant circulaire,

$$M_x = 52,7 \text{ Nm}$$

On déduit



$$\tau_{x\theta \text{ Maxi}} = \frac{M_x}{I_x} \cdot r_M = \frac{52700}{38330} 12,5 = 17,2 \text{ MPa}$$

Etape 5

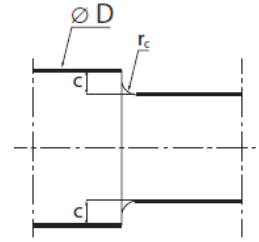
Au niveau du point D, on a un épaulement qui occasionne des concentrations de contraintes.

Les abaques donnent $K_{t_f}=2$ et $K_{t_t}=2,2$

On peut alors calculer la contrainte équivalente de Von-Mises

$$\sigma_{\text{eqVM}} = \sqrt{(K_{t_{\text{flexion}}} \cdot \sigma_{x_{\text{maxi}}})^2 + 3 \cdot (K_{t_{\text{torsion}}} \cdot \tau_{x\theta_{\text{maxi}}})^2}$$

$$\sigma_{\text{eqVM}} = \sqrt{(2,73)^2 + 3 \cdot (2,2 \cdot 17,2)^2} = \sqrt{(146)^2 + 3 \cdot (38)^2} = 160 \text{ MPa}$$



On peut alors déduire le choix d'un matériau pour l'arbre étant donné le coefficient de sécurité imposé.



Sur MOODLE

Activités sur les sollicitations composées



SOLLICITATION DE FLEXION TORSION

- Être capable de dimensionner une poutre sollicitée en FLEXION TORSION dans un cas simple

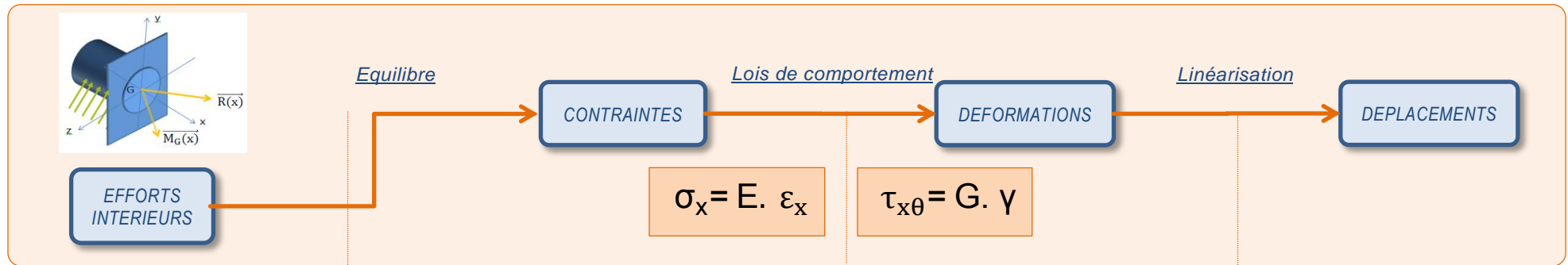


Synthèse pour la sollicitation de FLEXION-TORSION

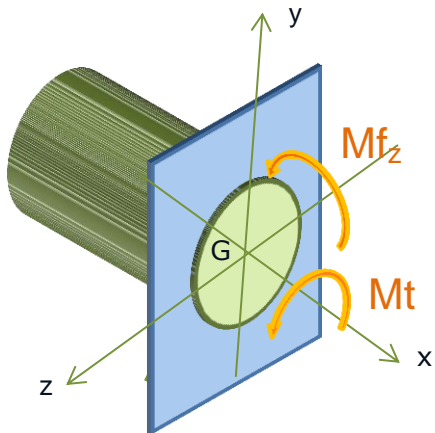


Eléments de cours pour la sollicitation de FLEXION TORSION

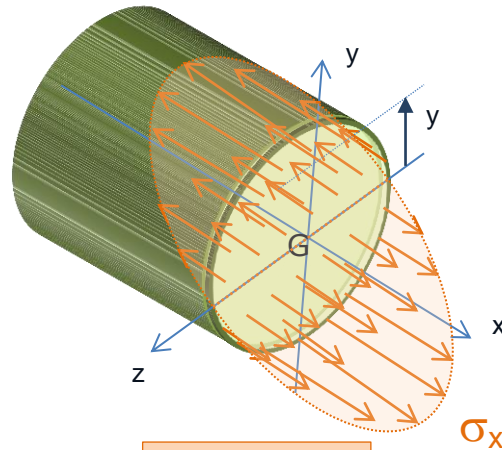




$$\{T_{int}\} = \begin{Bmatrix} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}_G$$

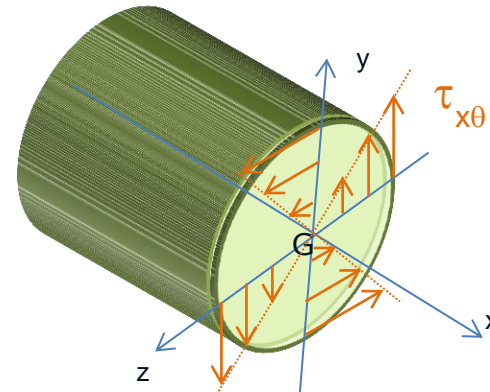


Uniquement pour les sections circulaires



$$\sigma_x = \frac{-Mf_z}{I_{Gz}} \cdot y$$

contrainte normale



$$\tau_{x\theta} = \frac{Mt}{I_{Gx}} \cdot r$$

contrainte tangentielle

$$\vec{C}_{M,\vec{x}} = \sigma_x \cdot \vec{x} + \tau_{x\theta} \cdot \vec{e}_\theta$$

On superpose les déformations de flexion et de torsion



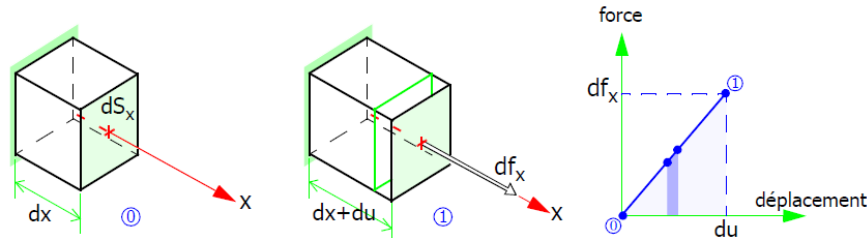
Les déformations dues à l'effort tranchant sont négligeables

Résolution des problèmes hyperstatiques

1. Théorèmes énergétiques

1-1 Energie de déformation

Considérons un petit cube de dimensions infinitésimales. dS_x représente l'aire des faces de normale x . La face arrière est supposée bloquée. La face avant est libre et sous l'effet d'un effort df_x appliqué suivant x , elle se déplace d'une valeur " du ". (0) correspond à l'état initial et (1) à l'état final.



L'effort ayant été appliqué progressivement, le travail effectué pour passer de (0) à (1) est $dW = \frac{1}{2} df_x \cdot du$

Ce travail s'est transformé sous forme d'énergie élastique accumulée dans le petit cube :

$$dW = \frac{1}{2} df_x \cdot du = \frac{1}{2} \sigma_x dS_x \varepsilon_x dx = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dV$$

Ce résultat reste valable si la face arrière est libre.

Cas d'une sollicitation de traction

L'énergie élastique par unité de volume s'écrit:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x = \frac{1}{2} \frac{N^2}{ES^2}$$

L'énergie élastique par unité de longueur de poutre s'écrit (cas des poutres droites):

$$\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} ES$$

Cas d'une sollicitation de flexion pure

L'énergie élastique par unité de volume s'écrit:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x = \frac{1}{2} \frac{Mf_z}{I_z} y \cdot \frac{Mf_z}{EI_z} y = \frac{1}{2} \frac{Mf_z^2}{EI_z^2} y^2$$

L'énergie élastique par unité de longueur de poutre s'écrit (cas des poutres droites):

$$\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} \frac{Mf_z^2}{EI_z}$$

Cas d'une sollicitation de torsion (section circulaire)

L'énergie élastique par unité de volume s'écrit:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma = \frac{1}{2} \frac{M_x}{I_x} r \cdot \frac{M_x}{GI_x} r = \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{GI_x^2} r^2$$

L'énergie élastique par unité de longueur de poutre s'écrit (cas des poutres droites):

$$\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{GI_x}$$



Connaître la définition et les cas de sollicitations élémentaires



Pour aller plus loin ...

Cas d'un effort tranchant

L'énergie élastique par unité de volume s'écrit:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma$$

La répartition des contraintes tangentielles n'est pas uniforme sur la section dans le cas de la théorie simplifiée. Il faut prendre en compte la loi de répartition dans le calcul de l'énergie de déformation par unité de longueur.

L'énergie élastique par unité de longueur de poutre s'écrit alors (cas des poutres droites):

$$\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{k_y} \frac{T_y^2}{GS} = \frac{1}{2} \frac{T_y^2}{GS_y}$$

K_y est le coefficient de section réduite, S_y est la section réduite.

Exemple d'une section rectangulaire :

$$\tau_{xy} = \frac{3T_y}{2 \cdot b \cdot h} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right\}$$

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma = \frac{1}{2} \frac{9T_y^2}{4Gb^2h^2} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right\}^2$$

L'intégration donne alors

$$\frac{dW}{dx} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} \frac{9T_y^2}{4Gb^2h^2} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right\}^2 b \cdot dy = \frac{1}{2} \left\{ \frac{6}{5} \frac{T_y^2}{G(bh)} \right\}$$

Le coefficient de section réduite vaut alors $k_y = 5/6$ et la section réduite $S_y = 5/6 \cdot S$



Exemple d'application



Connaître la relation

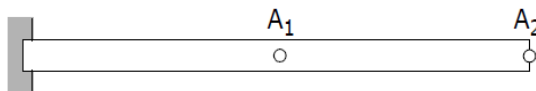
Cas général

Dans le cas général, l'énergie élastique par unité de longueur de poutre s'écrit:

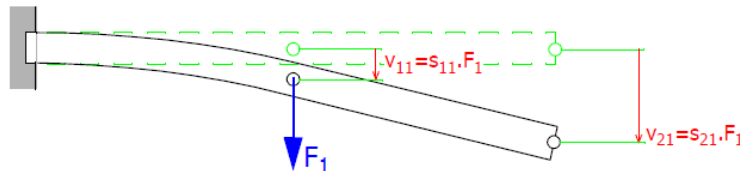
$$\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{N^2}{ES} + \frac{T_y^2}{GS_y} + \frac{T_z^2}{GS_z} + \frac{M_x^2}{GI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} \right\}$$

1-2 Théorème de Maxwell-Betti

Considérons une poutre encastrée à l'origine. La section médiane est repérée par A_1 et la section extrême par A_2 :

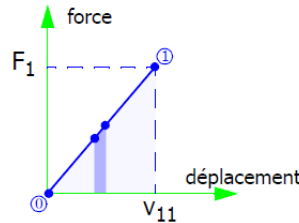


Appliquons l'effort F_1 en A_1

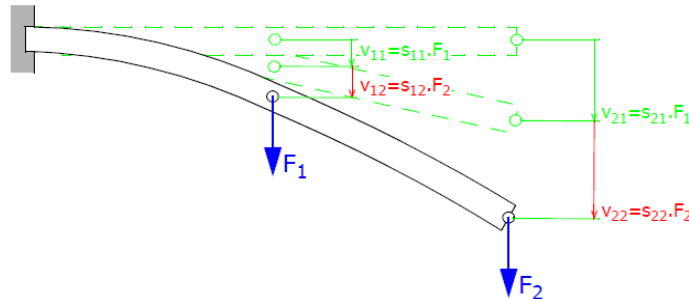


Le point A_1 se déplace de $v_{11} = s_{11} \cdot F_1$ et le point A_2 de $v_{21} = s_{21} \cdot F_1$

L'énergie de déformation emmagasinée par la structure est égale au travail de l'effort F_1 mis en jeu pour passer de l'état initial (0) à l'état (a).



Appliquons l'effort F_2 en A_2



Le point A_1 se déplace de $v_{12}=s_{12} \cdot F_2$ et le point A_2 de $v_{22}=s_{22} \cdot F_2$
 L'énergie de déformation emmagasinée par la structure est égale au travail des efforts F_1 et F_2 mis en jeu pour passer de l'état (a) à l'état (b): $W_{(b)} = v_{12} \cdot F_1 + \frac{1}{2} \cdot v_{22} \cdot F_2$
 Au final, l'énergie de déformation emmagasinée par la structure est égale à: $W_{(a)} + W_{(b)} = \frac{1}{2} \cdot v_{11} \cdot F_1 + v_{12} \cdot F_1 + \frac{1}{2} \cdot v_{22} \cdot F_2$

Si on inverse la séquence de chargement en appliquant d'abord le chargement F_1 puis le chargement F_2 , on aboutit au même état final avec une énergie égale à: $\frac{1}{2} \cdot v_{22} \cdot F_2 + v_{21} \cdot F_2 + \frac{1}{2} \cdot v_{11} \cdot F_1$

On déduit alors: $v_{12} \cdot F_1 = v_{21} \cdot F_2$



Connaître le théorème

C'est le théorème de Maxwell-Betti qui s'énonce comme suit:
 Le travail de F_1 dans le déplacement du à F_2 est égal au travail de F_2 dans le déplacement du à F_1 .

1-3 Matrice de souplesse – matrice de raideur

Désignons par $v_1 = v_{11} + v_{12}$ le déplacement total du point A_1 et par $v_2 = v_{21} + v_{22}$ le déplacement total du point A_2 . Il est alors possible d'écrire:

$$\begin{cases} v_1 = v_{11} + v_{12} = s_{11} \cdot F_1 + s_{12} \cdot F_2 \\ v_2 = v_{21} + v_{22} = s_{21} \cdot F_1 + s_{22} \cdot F_2 \end{cases}$$



Connaître la définition

Sous forme matricielle: $\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = [S] \cdot \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$

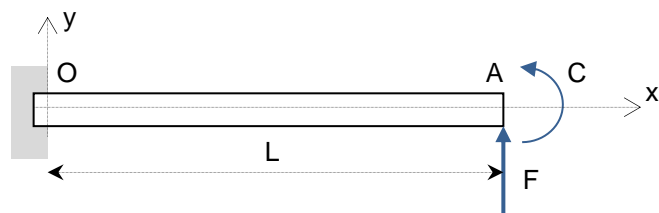
La matrice $[S]$ est la matrice de souplesse. Son inverse $[S]^{-1}$ est appelée matrice de raideur (notée $[K]$)

Le théorème de Maxwell-Betti montre l'égalité $s_{12} = s_{21}$. On déduit alors la symétrie de la matrice de souplesse $[S]$ et donc de la matrice de raideur $[K]$.



Exemple d'application

Exemple de matrice de souplesse



La poutre (OA) travaille en flexion.
 Le moment fléchissant vaut $M_f = F \cdot (L - x) + C$
 L'équation de la déformée est obtenue en intégrant deux fois: $E \cdot I_z \cdot y'' = F \cdot (L - x) + C$

On obtient

- La rotation de la section en A : $E \cdot I_z \cdot \omega_A = \frac{1}{2} \cdot F \cdot L^2 + C \cdot L$
- La flèche de la section en A : $E \cdot I_z \cdot v_A = \frac{1}{3} \cdot F \cdot L^3 + \frac{1}{2} \cdot C \cdot L^2$

On déduit la matrice de souplesse

$$[S] = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \begin{bmatrix} L & \frac{L^2}{2} \\ \frac{L^2}{2} & \frac{L^3}{3} \end{bmatrix}$$

1-4 Théorème de Castigliano

En reprenant l'exemple précédent, à la fin de la séquence de chargement, l'énergie de déformation prend la forme suivante:

$$W = \frac{1}{2} \cdot v_{11} \cdot F_1 + v_{12} \cdot F_1 + \frac{1}{2} \cdot v_{22} \cdot F_2$$

Si on remplace v_{11} , v_{12} et v_{22} par leurs expressions en fonction de F_1 et F_2 , on obtient W en fonction des forces appliquées :

$$W = \frac{1}{2} \cdot s_{11} \cdot F_1^2 + s_{12} \cdot F_1 \cdot F_2 + \frac{1}{2} \cdot s_{22} \cdot F_2^2$$

Dérivons cette expression de W par rapport à F_1 et F_2 :

$$\frac{\partial W}{\partial F_1} = s_{11} \cdot F_1 + s_{12} \cdot F_2 = v_{11} + v_{12} = v_1$$

$$\frac{\partial W}{\partial F_2} = s_{21} \cdot F_1 + s_{22} \cdot F_2 = v_{21} + v_{22} = v_2$$



Connaître le théorème

C'est le théorème de Castigliano qui s'énonce comme suit:

Quand on dérive l'énergie de déformation W par rapport à un effort F_i , on obtient le déplacement du point d'application de l'effort F_i mesuré dans la direction de F_i .

$$\frac{\partial W}{\partial F_i} = v_i$$

Remarque 1 : lorsque l'action mécanique appliquée n'est pas une force mais un couple M_i appliqué en un point, la dérivée de l'énergie de déformation par rapport au couple appliqué M_i est égal au déplacement angulaire mesuré autour de l'axe d'application du couple.

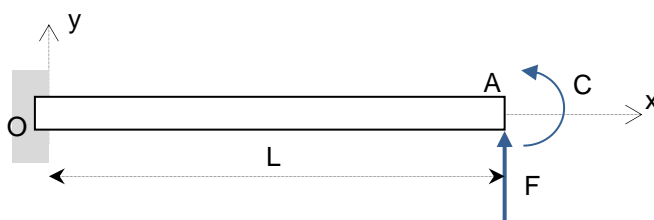
$$\frac{\partial W}{\partial M_i} = \theta_i$$



Exemple d'application

Exemple d'application

On reprend l'exemple précédent.



Rappelons l'expression du moment fléchissant: $M_f = F \cdot (L - x) + C$

L'énergie de déformation prend donc la forme suivante (en négligeant l'effet de l'effort tranchant):

$$dW = \frac{1}{2} \frac{M_f^2}{E I_z} \cdot dx$$

En appliquant le théorème de Castigliano, on obtient la flèche au point A:

$$v_A = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \left[\int_{(OA)} \frac{1}{2} \frac{M_f^2}{E I_z} \cdot dx \right]$$

On déduit

$$v_A = \left[\int_{(OA)} \frac{M_f}{E I_z} \cdot \frac{\partial M_f}{\partial F} \cdot dx \right] = \frac{1}{E I_z} \cdot \left[\int_0^L \{F \cdot (L - x) + C\} \cdot \{L - x\} \cdot dx \right] = \frac{1}{E I_z} \cdot \left[F \cdot \frac{L^3}{3} + C \cdot \frac{L^2}{2} \right]$$

On retrouve bien la valeur obtenue au chapitre précédent.

De même pour la rotation de la section en A:

$$\omega_A = \frac{\partial W}{\partial C} = \frac{\partial}{\partial C} \left[\int_{(OA)} \frac{1}{2} \frac{Mf_z^2}{EI_z} \cdot dx \right]$$

$$\omega_A = \left[\int_{(OA)} \frac{Mf_z}{EI_z} \cdot \frac{\partial Mf_z}{\partial C} \cdot dx \right] = \frac{1}{EI_z} \cdot \left[\int_0^L \{F \cdot (L - x) + C\} \cdot \{1\} \cdot dx \right] = \frac{1}{EI_z} \cdot \left[F \cdot \frac{L^2}{2} + C \cdot L \right]$$

2. Résolution des problèmes hyperstatiques

2-4 Théorème de Ménabréa



Connaître le théorème

Le théorème de Ménabréa est un cas particulier du théorème de Castigliano appliqué dans le cas de structures hyperstatiques.

Dans le cas d'une structure hyperstatique, le nombre de degré de liaison est surabondant. Une liaison surabondante introduit une composante d'action mécanique supplémentaire (F_i ou M_i) et impose un déplacement nul (degré de liberté supprimé). Ainsi, la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport aux inconnues hyperstatiques d'actions mécaniques est nulle.

Y_i inconnue hyperstatique :

$$\frac{\partial W}{\partial Y_i} = 0$$

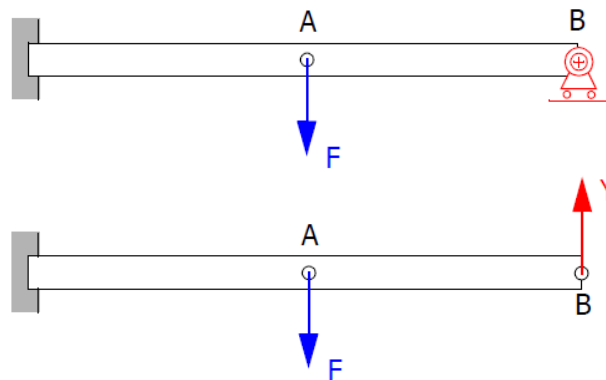


Exemple d'application

Exemple d'une poutre encastree et sur un appui simple.

Considérons l'exemple hyperstatique de degré 1 suivant. L'appui en B génère un effort Y_B . Cet effort constitue une 4^e inconnue qui vient s'ajouter aux 3 inconnues de l'action mécanique d'encastrement en O.

Cet effort peut être considéré comme inconnue hyperstatique.



Le "système isostatique associé" est le système pour lequel la liaison en B est remplacée par l'effort Y (supposé connu) correspondant à l'inconnue hyperstatique Y :

Exprimons l'énergie élastique W en fonction de l'effort F connu et de Y .

Si Y représente l'action générée par l'appui en B alors le théorème de Castigliano nous permet d'écrire:

$$\frac{\partial W}{\partial Y} = 0$$

La relation traduit que le point B ne se déplace pas suivant la verticale ce qui traduit bien le degré de liaison surabondant.

Cette relation constitue l'équation supplémentaire qui manquait pour calculer les actions de liaison.

Si l'action inconnue est un moment M , on écrit de même:

$$\frac{\partial W}{\partial M} = 0$$

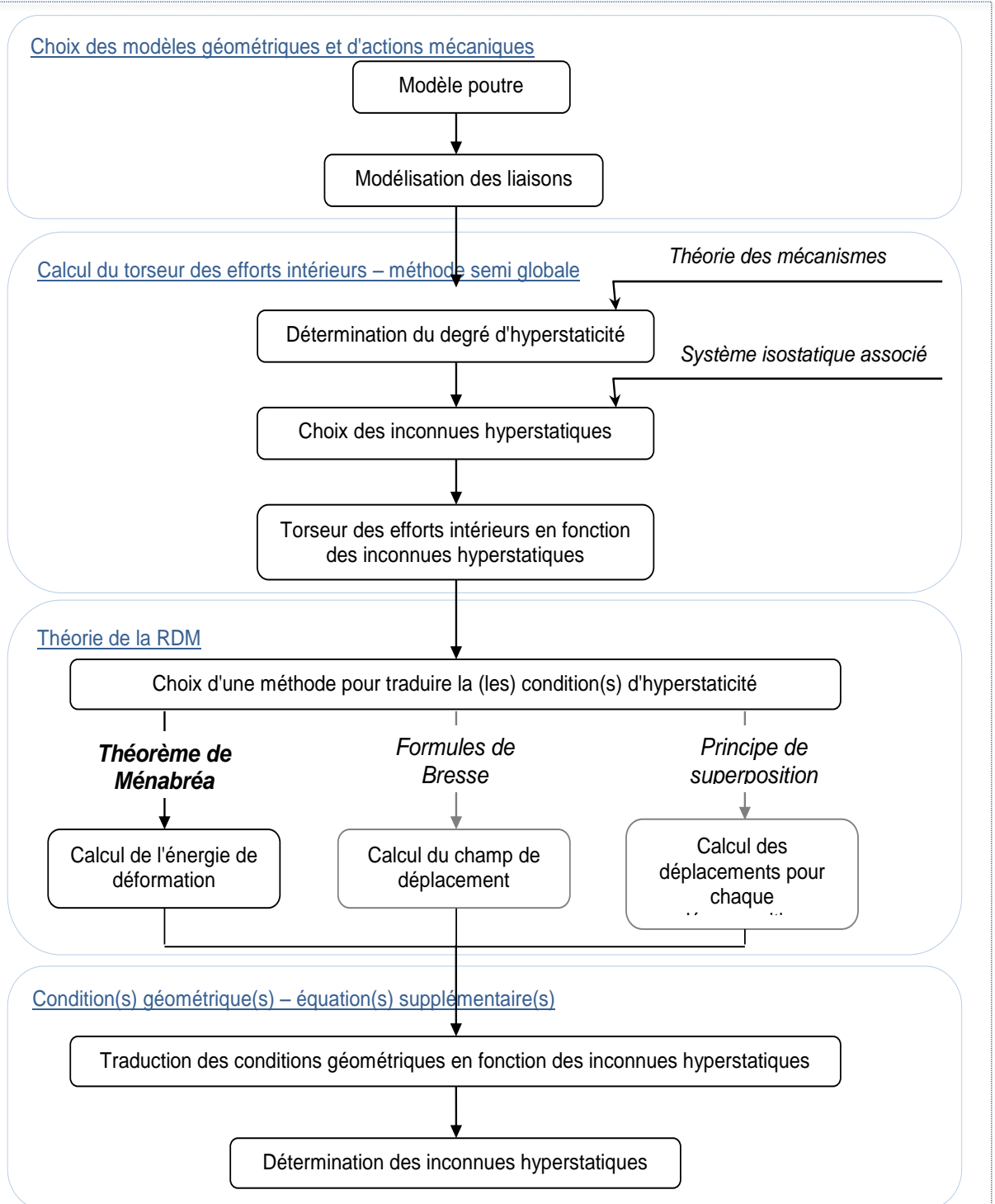
Ce qui traduit que le point d'application ne subit pas de rotation.

Le théorème de Ménabréa s'applique quelque soit le degré d'hyperstatisme: h . Il suffit de désigner h inconnues hyperstatiques, de calculer W en fonction des forces données et de ces h inconnues puis d'écrire que la dérivée de W par rapport à chacune de ces inconnues est égale à 0.

2-5 Démarche de résolution d'un problème hyperstatique



Démarche à connaître



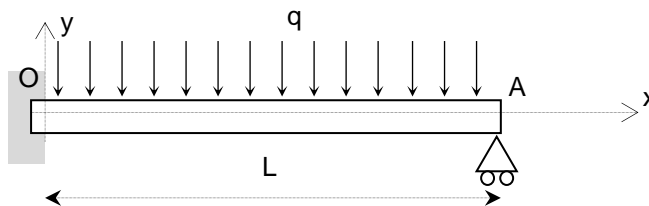
Exemple d'application



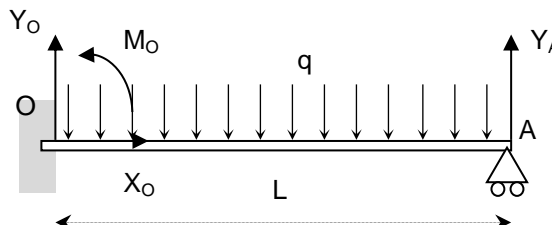
Exemple d'application

Soit une poutre encastrée soumise à une charge répartie q (la charge peut modéliser par exemple son propre poids).

Modèle géométrique et de liaison.



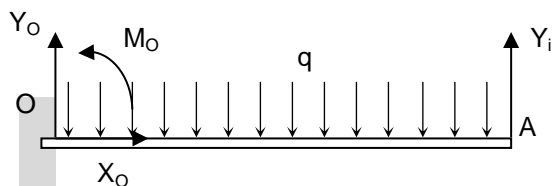
Degré d'hyperstaticité



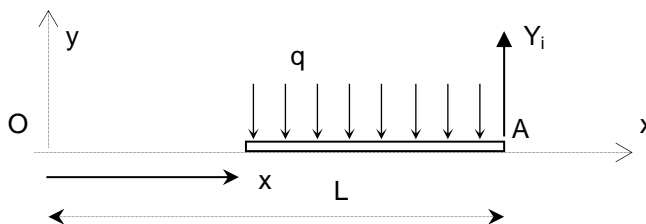
Le PFS nous donne trois équations pour quatre inconnues de liaison. Le système est hyperstatique de degré 1.

Choix des inconnues hyperstatiques et système isostatique associé

Nous choisissons $Y_i = Y_A$ comme inconnue hyperstatique. Le système isostatique associé correspond donc à la poutre encastrée soumise à un effort Y_i au point A.



Calcul du torseur des efforts intérieurs en fonction des inconnues hyperstatiques



Le calcul des éléments de réduction donne

$$T_y = -q \cdot (L-x) + Y_i$$

$$M_f_z = -q \frac{(L-x)^2}{2} + Y_i \cdot (L-x)$$

Calcul de l'énergie de déformation

$$W = \frac{1}{2} \int_{(OA)} \frac{M_f_z^2}{EI_z} \cdot dx$$

$$dW = \frac{1}{2} \frac{M_f_z^2}{EI_z} \cdot dx$$

Condition de déplacement nul en A

$$\frac{\partial W}{\partial Y_i} = 0$$

On déduit

$$\int_{(OA)} Mf_z \cdot \frac{\partial Mf_z}{\partial Y_i} \cdot dx = 0$$
$$\int_0^L \left\{ -q \frac{(L-x)^2}{2} + Y_i \cdot (L-x) \right\} \cdot (L-x) \cdot dx = 0$$

D'où

$$-q \cdot \frac{L^4}{8} + Y_i \cdot \frac{L^3}{3} = 0$$

$$Y_A = Y_i = \frac{3}{8} \cdot qL$$



Sur MOODLE

Activités sur les problèmes hyperstatiques

✓ DEGRÉ HYPERSTATIQUE

- Être capable d'identifier si le modèle de calcul RDM est iso ou hyperstatique
- Être capable de calculer le degré d'hyperstaticité

✓ CONDITIONS LIMITES

- Être capable de traduire les conditions limites imposées par les liaisons
- Être capable d'évaluer qualitativement la déformée d'une poutre hyperstatique

✓ SYSTEME ISOSTATIQUE + CONDITION DEPLACEMENT

Être capable d'associer à un système hyperstatique :

- un système isostatique équivalent
- la ou les conditions géométriques nécessaires à ce système isostatique

✓ RESOLUTION PROBLEME HYPERSTATIQUE : PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Être capable de résoudre un problème hyperstatique par le principe de superposition :

- remplacer un problème hyperstatique en la superposition de plusieurs problèmes isostatiques
- traduire la ou les conditions géométriques associées à la superposition
- résoudre les actions de liaison

✓ ENERGIE DE DEFORMATION

- Être capable de calculer l'énergie de déformation absorbée par une poutre
- Être capable de calculer un déplacement à partir du théorème de Clapeyron

✓ METHODES ÉNERGÉTIQUES : APPLICATIONS

Exploiter les méthodes énergétiques pour :

- calculer des déplacements (Castigliano et charge fictive)
- résoudre des problèmes hyperstatiques (Ménabréa)

