Théorème de l'Energie Cinétique

Pierre STEPHAN
pierre.stephan@univ-tlse2.fr

Le Théorème de l'Energie Cinétique (TEC) appliqué à un solide (ou un système de solides) permet d'obtenir une relation scalaire entre les paramètres cinématiques du mouvement, les caractéristiques d'inertie du solide (ou des solides) et les actions mécaniques appliquées sur le solide (ou les solides).
Pour l'ingénieur, le Théorème de l'Energie Cinétique peut permettre pour des système à un degré de liberté de déterminer plus rapidement les relations d'entrée-sortie entre les efforts (calcul de couple moteur ou de force motrice).
Il peut également permettre pour des système à un degré de liberté de déterminer plus rapidement l'équation de mouvement.

1. Théorème de l'énergie cinétique

1-1 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide (S)

Le théorème de l'énergie cinétique se démontre à partir de la loi fondamentale de la dynamique en multipliant scalairement par $\overrightarrow{V_{P,S/R_g}}$ les deux termes de l'équation :
$\overrightarrow{dF_{\to P}}.\overrightarrow{V_{P,S/R_g}} = dm.\overrightarrow{\Gamma_{(P/R_g)}}.\ \overrightarrow{V_{P,S/R_g}}$

En isolant un solide (S), on effectue la somme des produits scalaires $\overrightarrow{dF_{\to P}}.\overrightarrow{V_{P,S/R_g}}$
Le principe des actions réciproques $\overrightarrow{dF_{1\to 2}} = -\ \overrightarrow{dF_{2\to 1}}$ et l'hypothèse de solide indéformable entraîne que tous les termes correspondant aux efforts intérieurs s'annulent.
Il reste la somme des produits scalaires des forces extérieures appliquées sur le solide (S) :
$\sum_{P\in(S)} \overrightarrow{dF_{ext\to P}}.\overrightarrow{V_{P,S/R_g}} = \sum_{P\in(S)} \overrightarrow{dF_{ext\to P}}.\left(\overrightarrow{V_{A,S/R_g}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{AP}\right) = \sum \overrightarrow{F_{ext\to(S)}}.\overrightarrow{V_{A,S/R_g}} + \sum \overrightarrow{M_{A_{ext\to(S)}}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}$

On obtient alors pour le premier terme la somme des puissances des actions mécaniques extérieures appliquées sur le solide (S) par rapport au repère galiléen.
On note cette puissance $P_{ext\to(S),R_g}$

Pour le deuxième terme, on effectue la somme des produits scalaires $dm.\overrightarrow{\Gamma_{(P/R_g)}}.\ \overrightarrow{V_{P,S/R_g}}$
$\sum_{P\in(S)} dm.\overrightarrow{\Gamma_{(P/R_g)}}.\overrightarrow{V_{P,S/R_g}} = \sum_{P\in(S)} dm.\left.\frac{d\overrightarrow{V_{P,S/R_g}}}{dt}\right|_{/R_g}.\overrightarrow{V_{P,S/R_g}} = \frac{d}{dt}\left\{\sum_{P\in(S)} \frac{1}{2}.\left\|\overrightarrow{V_{P,S/R_g}}\right\|^2.dm\right\}\Big|_{/R_g}$
On obtient alors pour le deuxième terme la déivée par rapport au temps de l'énérgie cinétique du solide (S).
On note l'énergie cinétique du solide (S) $Ec_{(S/R_g)} = \int_{P\in(S)} \frac{1}{2}.\left\|\overrightarrow{V_{P,S/R_g}}\right\|^2.dm$

Le théorème de l'énergie cinétique pour un solide (S) s'écrit alors :

$$\sum P_{ext\to(S),R_g} = \frac{d}{dt}\left\{Ec_{(S/R_g)}\right\}\Big|_{/R_g}$$

1-2 Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides

Si on considère un ensemble (E) composé de plusieurs solides (S_i), l'application du théorème de l'énergie cinétique sur chacun des solides nous permet par sommation d'obtenir le théorème de l'énergie cinétique appliqué à un ensemble de solides.
Le deuxième terme se déduit facilement
$\sum_i \frac{d}{dt}\left\{Ec_{(S_i/R_g)}\right\}\Big|_{/R_g} = \frac{d}{dt}\left\{\sum_i Ec_{(S_i/R_g)}\right\}\Big|_{/R_g} = \frac{d}{dt}\left\{Ec_{(E/R_g)}\right\}\Big|_{/R_g}$
On obtient la dévivée par rapport au temps de l'énergie cinétique totale de l'ensemble (E) : $Ec_{(E/R_g)}$

Le premier terme fait intervenir la somme des puissances des actions mécaniques extérieures appliquées sur chaque soide S_i :

$$\sum P_{ext\to(S_i),R_g} = \sum P_{ext\to(E),R_g} + \left\{\sum_{i\neq j} P_{(S_i)\to(S_j),R_g} + \sum_{i\neq j} P_{(S_j)\to(S_i),R_g}\right\}$$

En explicitant le deuxième terme de l'expression, on obtient la puissance des inter-effort P_{int}.

$$\left\{\sum_{i\neq j} P_{(S_i)\to(S_j),R_g} + \sum_{i\neq j} P_{(S_j)\to(S_i),R_g}\right\} = \sum_{P\in(S_j)} \overrightarrow{dF_{S_i\to S_j}}.\overrightarrow{V_{P,S_j/R_g}} + \sum_{P\in(S_i)} \overrightarrow{dF_{S_j\to S_i}}.\overrightarrow{V_{P,S_i/R_g}} = \sum_{P\in(S_i\cap S_j)} \overrightarrow{dF_{S_i\to S_j}}.\overrightarrow{V_{P,S_j/S_i}}$$

D'où :

$$P_{int} = \sum \overrightarrow{F_{S_i\to S_j}}.\overrightarrow{V_{A,S_j/S_i}} + \sum \overrightarrow{M_{A_{S_i\to S_j}}}.\overrightarrow{\Omega_{S_j/S_i}}$$

.

Le théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides (E) s'écrit alors :

$$\sum P_{ext\to(E),R_g} + P_{int} = \frac{d}{dt}\left\{Ec_{(E/R_g)}\right\}\Big|_{/R_g}$$

Dans le cas d'un ensemble de solides (E), le théorème de l'énergie cinétique, contrairement aux théorèmes généraux, fait intervenir la puissance des actions mécaniques intérieures au système isolé.

Le théorème de l'énergie cinétique ne donne qu'une seule équation scalaire. Cette équation est dépendante des équations données par les théorèmes généraux. Elle ne constitue pas une équation supplémentaire indépendante.

2. Calcul de l'énergie cinétique d'un ensemble de solides (E)

2-1 Energie cinétique

Nous avons défini l'énergie cinétique d'un ensemble de solides par :

$$Ec_{(E/R_g)} = \int_{P\in(E)} \frac{1}{2}.\left\|\overrightarrow{V_{P,E/R_g}}\right\|^2 .dm$$

L'énergie cinétique est pratiquement toujours définie par rapport à un repère supposé galiléen, le théorème de l'énergie cinétique découlant directement de la loi fondamentale de la dynamique.

Pour calculer l'énergie cinétique d'un ensemble de solides, on commence par décomposer le système.

$$Ec_{(E/R_g)} = \sum_i Ec_{(S_i/R_g)}$$

Dans un deuxième temps, pour chaque solide S_i, on s'interroge sur la nature du mouvement de S_i/R_g.

S_i/R_g est un mouvement de translation

Tous les points de S_i ont le même vecteur vitesse. $Ec_{(S_i/R_g)} = \frac{1}{2}.m.\left\|\overrightarrow{V_{G,S_i/R_g}}\right\|^2$

S_i/R_g est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe Oz

$$Ec_{(S_i/R_g)} = \int_{P\in(S_i)} \frac{1}{2}.\left(\overrightarrow{\Omega_{S_i/R_g}} \wedge \overrightarrow{OP}\right)^2 .dm = \int_{P\in(S_i)} \frac{1}{2}.\left(\dot{\theta}.\vec{z} \wedge \overrightarrow{OP}\right)^2 .dm = \frac{1}{2}.J_{Oz(S_i)}.\dot{\theta}^2$$

$$Ec_{(S_i/R_g)} = \frac{1}{2}.J_{Oz(S_i)}.\dot{\theta}^2$$

S_i/R_g est un mouvement quelconque dans le plan Oxy

$$Ec_{(S_i/R_g)} = \int_{P\in(S_i)} \frac{1}{2}.\left\{\overrightarrow{V_{G,S_i/R_g}} + \overrightarrow{\Omega_{S_i/R_g}} \wedge \overrightarrow{GP}\right\}^2 .dm = \int_{P\in(S_i)} \frac{1}{2}.\left\{\overrightarrow{V_{G,S_i/R_g}}\right\}^2 .dm + \int_{P\in(S_i)} \frac{1}{2}.\left(\overrightarrow{\Omega_{S_i/R_g}} \wedge \overrightarrow{GP}\right)^2 .dm$$

$$= \frac{1}{2}.m.\left\|\overrightarrow{V_{G,S_i/R_g}}\right\|^2 + \frac{1}{2}.j_{Gz(S_i)}.\dot{\theta}^2$$

$$Ec_{(S_i/R_g)} = \frac{1}{2}.m.\left\|\overrightarrow{V_{G,S_i/R_g}}\right\|^2 + \frac{1}{2}.j_{Gz(S_i)}.\dot{\theta}^2$$

Dans le cas d'une masse ponctuelle m concentrée en P (solide modélisé par une masse ponctuelle) :

$$Ec_{(P/R_g)} = \frac{1}{2}.m.\left\|\overrightarrow{V_{P/R_g}}\right\|^2$$

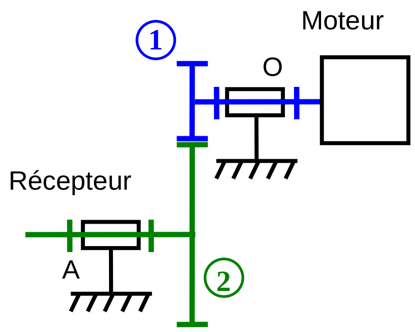
2-2 Notion d'inertie équivalente et de masse équivalente

Lorsqu'on détermine littéralement l'énergie cinétique d'un ensemble de solides qui appartiennent à une même chaîne cinématique, il est parfois utile notamment en automatismes de l'exprimer en fonction d'un seul paramètre cinématique.

Cas de l'inertie équivalente

Exemple de transmission avec réducteur de vitesse.

Soit 1 la classe d'équivalence correspondant à l'ensemble des pièces liées en rotation avec l'arbre moteur (en général rotor moteur, accouplement, pignon menant…) ; on note ω_1 la vitesse de rotation de l'ensemble 1 et J_1 son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation. Soit 2 la classe d'équivalence correspondant à l'ensemble des pièces liées en rotation avec l'arbre récepteur (en général élément récepteur, pignon mené …) ; on note ω_2 la vitesse de rotation de l'ensemble 2 et J_2 son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation.



Soit $k = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ le rapport de transmission (<1 pour un réducteur de vitesse).

On a : $Ec_{E/0} = Ec_{1/0} + Ec_{2/0} = \frac{1}{2}.J_1.\omega_1^2 + \frac{1}{2}.J_2.\omega_2^2 = \frac{1}{2}.(\ J_1 + J_2.k^2\ )\ .\omega_1^2$

Le terme $J_{eq} = J_1 + J_2.k^2$ est appelé <u>Inertie équivalente de l'ensemble ramenée à l'arbre moteur</u>.

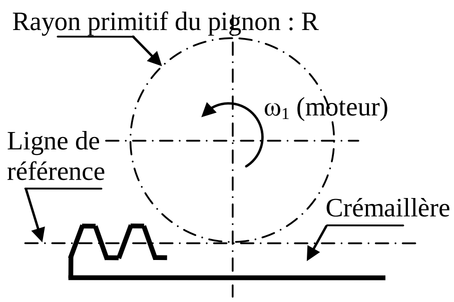
De façon fictive, on considère que l'ensemble de la chaîne cinématique possède une énergie cinétique égale à celle d'un arbre moteur d'inertie équivalent J_{eq}.

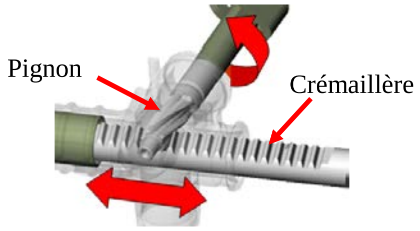
$Ec_{(E/R_g)} = \frac{1}{2}.j_{eq}.\omega_1^2$

Cas de la masse équivalente

Si le paramètre cinématique en fonction duquel l'énergie cinétique est exprimée, est la vitesse d'un solide qui est en translation, alors on parle de « masse équivalente ».

Exemple d'un système pignon-crémaillère :
Soit 1 la classe d'équivalence correspondant à l'ensemble des pièces liées en rotation avec l'arbre moteur, on note ω_1 la vitesse de rotation de l'ensemble 1 et J_1 son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation. Soit 2 la classe d'équivalence correspondant à l'ensemble des pièces liées à la crémaillère de masse totale M_2. La vitesse de la crémaillère : $V_2 = R.\omega_1$





$$Ec_{E/0} = Ec_{1/0} + Ec_{2/0} = \frac{1}{2}.J_1.\omega_1^2 + \frac{1}{2}.M_2.V_2^2$$

$$Ec_{E/0} = \frac{1}{2}.\left(\frac{J_1}{R^2} + M_2.\right)\ .V_2^2$$

Le terme $M_{eq} = \frac{J_1}{R^2} + M_2$ est appelé masse équivalente de l'ensemble ramenée à la crémaillère.

3. *Calcul de la somme des puissances extérieures et intérieures des actions mécaniques appliquées à (E)*

3-1 Puissances extérieures galiléennes

La démonstration du théorème de l'énergie cinétique a permis de mettre en évidence la puissance des actions mécaniques extérieures au système isolé :

$$P_{ext\to(S),R_g} = \sum \overrightarrow{F_{ext\to(S)}}.\overrightarrow{V_{A,S/R_g}} + \sum \overrightarrow{M_{A_{ext\to(S)}}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}$$

Cas d'une force $\vec{F}$ appliquée sur le solide (S) en un point A

Dans ce cas, $P_{F\to(S),R_g} = \vec{F}.\overrightarrow{V_{A,S/R_g}}$

Exemple de l'action de la pesanteur : $P_{pest\to(S),R_g} = -M.g.\vec{z}.\overrightarrow{V_{G,S/R_g}}$ (si l'axe z est vertical vers le haut)

Cas d'un couple C_m appliquée sur un arbre moteur (S) tournant à la vitesse de rotation ω_m

Dans ce cas, $P_{C\to(S),R_g} = \overrightarrow{C_m}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} = C_m.\omega_m$

Cas d'une action mécanique de liaison parfaite
Lorsque la liaison est parfaite, il existe des composantes d'actions mécaniques de force et de moment par rapport au centre de liaison uniquement sur des axes correspondant à des libertés de mouvement supprimés.
En conséquence, les produits scalaires de l'expression de la puissance sont nuls si l'extérieur du système est fixe (lié au repère galiléen).

Pour une liaison parfaite, la partie extérieure étant fixe, $P_{AMliaison\to(S),R_g} = 0$

3-2 Puissances intérieures ou des inter-efforts

Pour un système isolé (E) composé d'un ensemble de solides, le théorème de l'énergie cinétique fait apparaître la puissance des efforts intérieurs au système isolé :

$$P_{int} = \sum \overrightarrow{F_{S_i\to S_j}}.\overrightarrow{V_{A,S_j/S_i}} + \sum \overrightarrow{M_{A_{S_i\to S_j}}}.\overrightarrow{\Omega_{S_j/S_i}}$$

Cas d'une action mécanique de liaison parfaite

Lorsque la liaison à l'intérieur du système isolé est parfaite, la puissance des inter-efforts de cette liaison est nulle. En effet, le cours sur la modélisation des liaison fait apparaître des composantes d'action mécanique de liaison uniquement sur les degrés de liberté supprimés (là où les composantes cinématiques sont nulles).

<u>Pour une liaison parfaite</u>, $P_{int} = 0$

Cas où la liaison n'est pas parfaite

Pour l'ingénieur, dans la plupart des cas, le calcul de la puissance des actions mécaniques intérieures au système isolé est complexe. Cette puissance dissipée dans les liaisonsest souvent estimée globalement dans des mécanismes en utilisant la notion de rendement.
Le rendement d'un système est le rapport, à régime établi, entre la puissance à la sortie du système et la puis

Par définition, $\eta = \dfrac{|P_{utile}|}{P_{fournie}} = \dfrac{|P_{réceptrice}|}{P_{motrice}} = \dfrac{|P_{sortie}|}{P_{entrée}}$.

Ce qui est nécessaire à l'utilisation

Ce qu'il a fallu fournir pour y arriver

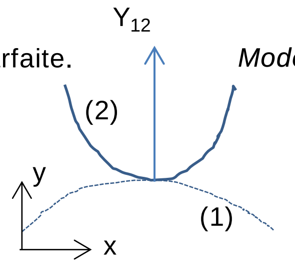
On déduit : $P_{int} = (1-\eta)\,.P_{entrée}$

La puissance des inter-effort est négative (puissance dissipée dans les liaisons)
Le rendement du système est compris entre 0 et 1.

Cas particulier du contact ponctuel

Dans le cas d'un contact ponctuel pour un problème plan, suivant le système réel et la modélisation choisie, plusieurs cas peuvent être rencontrés.

a- La liaison est supposée parfaite.
Dans ce cas, $P_{int} = 0$



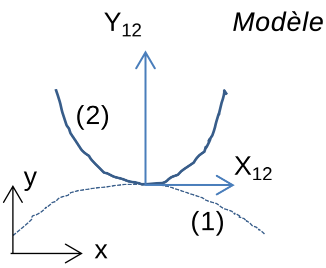
Modèle parfait

b- La liaison n'est pas supposée parfaite ; la composante tangentielle d'effort n'est pas négligée (résistance au glissement)

Dans ce cas, $P_{int} = \overrightarrow{R_{12}}.\overrightarrow{V_{I,2/1}}$

Dans le cas du <u>roulement sans glissement</u> : $P_{int} = 0$

Dans le cas du <u>glissement</u> : $P_{int} = -f.\,Y_{12}.V_{I,2/1}$



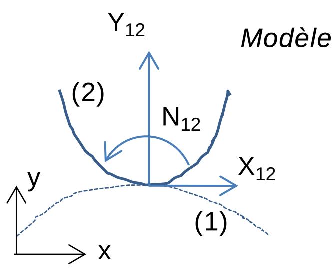
c- La liaison n'est pas supposée parfaite ; la composante tangentielle d'effort et la composante de moment (résistance au roulement) ne sont pas négligées

Dans ce cas, $P_{int} = \overrightarrow{R_{12}}.\overrightarrow{V_{I,2/1}} + \overrightarrow{M_{I12}}.\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$

Dans le cas du <u>roulement sans glissement</u> : $P_{int} = -r.\,Y_{12}.\Omega_{2/1}$

Dans le cas du <u>glissement (avec roulement)</u> :

$P_{int} = -f.\,Y_{12}.V_{I,2/1} - r.\,Y_{12}.\Omega_{2/1}$



4. Démarches de résolution du théorème de l'énergie cinétique

4-1 Démarche d'application

Le théorème de l'énergie cinétique comme les théorème généraux est issus de la loi fondamental de la dynamique. Son application suit donc deux étapes incontournables et communes

- L'identification du repère galiléen
- L'isolement d'un solide ou d'un ensemble de solides

On choisit un repère galiléen et on effectue le bilan complet des données d'entrée du problème

Récapituler les particularités de certaines actions mécaniques (composantes nulles pour les liaisons, couple moteur ou force motrice)

On isole le solide ou le système de solides considéré

Utilisation du graphe d'analyse pour faire l'inventaire des paramètres cinématiques

On s'aide d'un dessin ou un schéma si possible (schéma cinématique)

On effectue le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures et Intérieures

Actions intérieures
Actions extérieures

On écrit le TEC

$$\sum P_{ext\rightarrow(E),R_g} + P_{int} = \frac{d}{dt}\left\{Ec_{(E/R_g)}\right\}\Big|_{/R_g}$$

On cacule l'énergie cinétique du système isolé

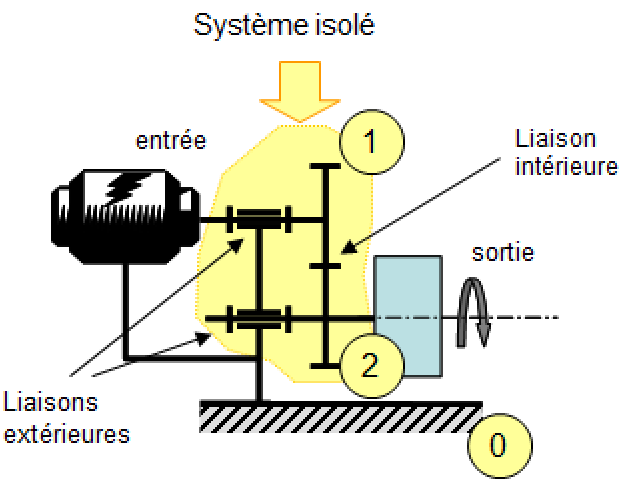
On calcule les puissances extérieures et intérieures au système isolé

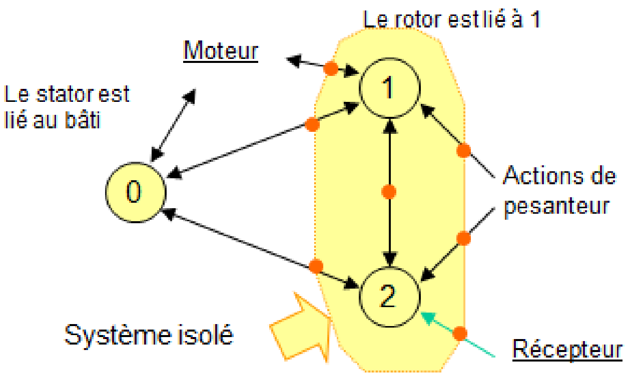
On effectue la résolution

Par rapport au théorèmes généraux, le théorème de l'énergie cinétique présente l'intérêt d'accéder directement à une équation de mouvement ou à l'effort exercé par un actionneur (couple ou force motrice).
Cette détermination est directe uniquement dans le cas d'un système à un degré de liberté (une loi entrée-sortie. En effet, le théorème de l'énergie cinétique ne nous donne qu'une seule équation en isolant l'ensemble du système en mouvement.
L'isolement d'une partie du système conduit également à une équation mais qui fait intervenir les actions de liaison ce qui ne constitue plus un atout par rapport aux théorèmes généraux.

4-2 Autres formulations du TEC – Conservation de l'énergie

Cas d'un mécanisme à un degré de liberté

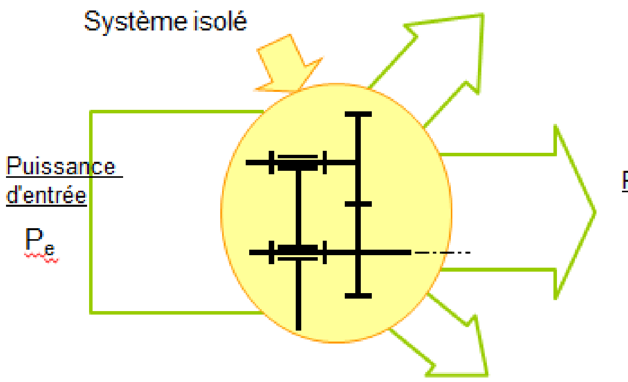




Remarque : le système isolé correspond toujours à un ensemble de pièces en liaison avec le bâti (partie fixe)

Puissance dissipée dans les liaisons P_{diss}
(liaisons intérieures et extérieures)

- Elle est toujours négative
- Elle concerne les actions mécaniques de liaisons (voir graphe des liaisons)
- En BE, elle est souvent "globalisée" par l'intermédiaire du rendement ou d'un couple de frottement équivalent ramené sur l'arbre d'entrée.



Puissance de sortie P_s

Ce que l'on nomme "puissance de sortie" correspond à la puissance appliquée sur le récepteur (donnée souvent en valeur absolue).

En isolant le système, la puissance des actions extérieures en sortie vaut donc $-P_s$ (l'opposée à la puissance de sortie).

Puissance nécessaire $P_{inertie}$
pour vaincre les inerties (en régime transitoire)

En phase d'accélération (ou de décélération), il existe une puissance supplémentaire liée à la mise en mouvement des pièces. Elle s'écrit en fonction de la variation d'énergie cinétique.

$$P_{ext} + P_{diss} + P_{inertie} = 0$$

$$P_e - P_s + P_{diss} = dE_c/dt$$

Conservation de l'énergie mécanique totale

Si l'on considère un système mécanique pour lequel :

- La puissance des inter-efforts et plus généralement la puissance dissipée dans les liaisons est nulle,
- La puissance des actions mécaniques extérieures s'écrit en fonction d'une énergie potentielle

$$\sum P_{AM\rightarrow(E),R_g} = -\frac{d}{dt}\left\{Ep_{AM\rightarrow(E)}\right\}\Big|_{/R_g}$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt}\left\{Ep_{AM\rightarrow(E)} + Ec_{(E/R_g)}\right\}\Big|_{/R_g} = 0$$

On a alors conservation de l’énergie mécanique totale du système

$$Em_{(E)} = Ep_{AM \to (E)} + Ec_{(E/R_g)} = cste$$

L’ingénieur rencontre principalement deux actions mécaniques dérivant d’une énergie potentielle $Ep_{AM \to (E)}$:

- L’action de la pesanteur $P_{pes \to (S),R_g} = -M.g.\vec{z}\,.\overrightarrow{V_{G,S/R_g}} = -\frac{d}{dt}\left\{M.g\,.\overrightarrow{OG}.\vec{z}\right\}\Big|_{/R_g}$ (z vertical vers le haut)

On déduit

$$Ep_{pes \to (S)} = M.g\,.\overrightarrow{OG}.\vec{z} + cste$$

- L’action exercé par un ressort $P_{res \to (S),R_g} = -k.(\Delta x).\vec{x}\,.\overrightarrow{V_{P,S/R_g}} = -k.(\Delta x).\dot{x} = -\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}.k.(\Delta x)^2\right\}\Big|_{/R_g}$

On déduit

$$Ep_{res \to (S)} = \frac{1}{2}.k.(\Delta x)^2$$

Le cas d’une action mécanique modélisée par un ressort est très fréquent. En effet, le comportement des matériaux peut souvent être modélisé par un comportement linéaire dont le modèle correspondant est un ressort de rigidité k.