Cycle Préparatoire IFCI, INSA de Toulouse

Filière Génie Mécanique

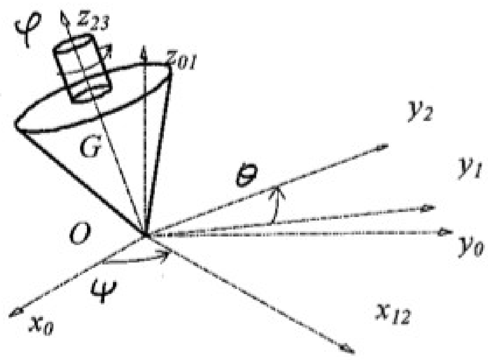
Cinématique

Toupie

On s'intéresse au mouvement d'une toupie. Le modèle proposé est celui de la figure ci-dessous. La position de la toupie 3 par rapport au repère de référence 0 est repérée par les trois angles d'Euler :

- la rotation de la base 1 par rapport à la base 0 est d'axe $0\vec{z}_0$ et de paramètre ψ ;
- la rotation de la base 2 par rapport à la base 2 est d'axe $0\vec{x}_1$ et de paramètre θ ;
- la rotation de la base 3 (confondue avec la toupie) par rapport à la base 2 est d'axe $0\vec{z}_2$ et de paramètre φ .

On supposera que l'extrémité de la toupie reste toujours confondue avec le centre *0* du repère 0 au cours du mouvement de la toupie 3 par rapport à 0.



La position du centre de gravité *G* de la toupie est tel que $\overline{OG}=a$.

Déterminer l'expression de $\vec{V}(G,3/0)$, vitesse du point G appartenant au solide 3 dans son mouvement par rapport au solide 0. On exprimera $\vec{V}(G,3/0)$ dans la base qui vous semblera la plus appropriée.

Correction

Avant toute chose, on écrit le vecteur $\vec{\Omega}_{3/0}=\dot{\psi}\,\vec{z}_0+\dot{\theta}\,\vec{x}_1+\dot{\phi}\,\vec{z}_2$.

Deux méthodes sont possibles.

A) Dérivation du vecteur position

0 n'est pas un point « à problème » (ce n'est pas un point de contact avec glissement, par exemple). La vitesse $\vec{V}(G,3/0)$ est donc la vitesse du point géométrique :

$$\vec{V}(G,3/0)=\left(\frac{d}{dt}\vec{OG}\right)_0$$

Dans cette formule, 0 est la base de dérivation (la base par rapport à laquelle se fait le mouvement – le 0 de $\vec{V}(G,3/0)$) et O est bien un point fixe du repère de référence.

$$\vec{V}(G,3/0)=\left(\frac{d}{dt}\vec{OG}\right)_0=\left(\frac{d}{dt}a\,\vec{z}_3\right)_0$$

On applique la formule de dérivation dans une base mobile (ici entre les bases 0 et 3) :

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{u}\right)_0=\left(\frac{d}{dt}\vec{u}\right)_3+\vec{\Omega}_{3/0}\wedge\vec{u}$$

$\vec{V}(G,3/0)=\left(\frac{d}{dt}a\,\vec{z}_3\right)_3+\vec{\Omega}_{3/0}\wedge a\,\vec{z}_3=\vec{\Omega}_{3/0}\wedge a\,\vec{z}_3$

On peut effectuer ce produit vectoriel, soit terme à terme à partir de l'expression $\vec{\Omega}_{3/0}=\dot{\psi}\,\vec{z}_0+\dot{\theta}\,\vec{x}_1+\dot{\phi}\,\vec{z}_2$, soit en projetant ces vecteurs dans une même base : la base 3 ou la base 2. On remarquera que $\vec{z}_3=\vec{z}_2$. On choisit donc 2.

$$\vec{V}(G,3/0)=\left|\begin{matrix}\dot{\theta}\\ \dot{\psi}\sin\theta\\ \dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\end{matrix}\right._2\wedge\left|\begin{matrix}0\\ 0\\ a\end{matrix}\right._2=\left|\begin{matrix}a\dot{\psi}\sin\theta\\ -a\dot{\theta}\\ 0\end{matrix}\right._2$$

B) Changement de point

On peut écrire la formule de changement de point pour le torseur cinématique (un même mouvement, deux points différents) :

$\vec{V}(G,3/0)=\vec{V}(0,3/0)+\vec{\Omega}_{3/0}\wedge\vec{OG}=\vec{\Omega}_{3/0}\wedge\vec{OG}$

Soit

$\vec{V}(G,3/0)=\vec{\Omega}_{3/0}\wedge a\,\vec{z}_3$

C'est à dire la même expression que plus haut.

<u>Remarques</u>

Remarque : le fait que le vecteur $\vec{V}(G,3/0)$ soit écrit dans la base 2 ne doit pas nous étonner. C'est un vecteur : à ce titre, il peut être écrit dans plusieurs bases. 2 est ici une base pratique (3 le serait aussi) ; la base 0 le serait beaucoup moins en raison des nombreuses projections nécessaires.