Cycle Préparatoire IFCI, INSA de Toulouse

Filière Génie Mécanique

Cinématique

BIELLE MANIVELLE (correction)

Le dispositif représenté figure 1 modélise le fonctionnement d'un système bielle-manivelle. Il est constitué de deux barres identiques de longueur *a*, articulées entre elle en *A* et avec le bâti en *O*. L'extrémité de la barre 2 se déplace verticalement sur l'axe *Ox*.

- la barre 1 est en liaison pivot parfaite d'axe *Oz* et d'angle α avec le bâti 0 ;
- la barre 2 est en liaison pivot parfaite d'axe *Az* et d'angle β avec le bâti 0 ;

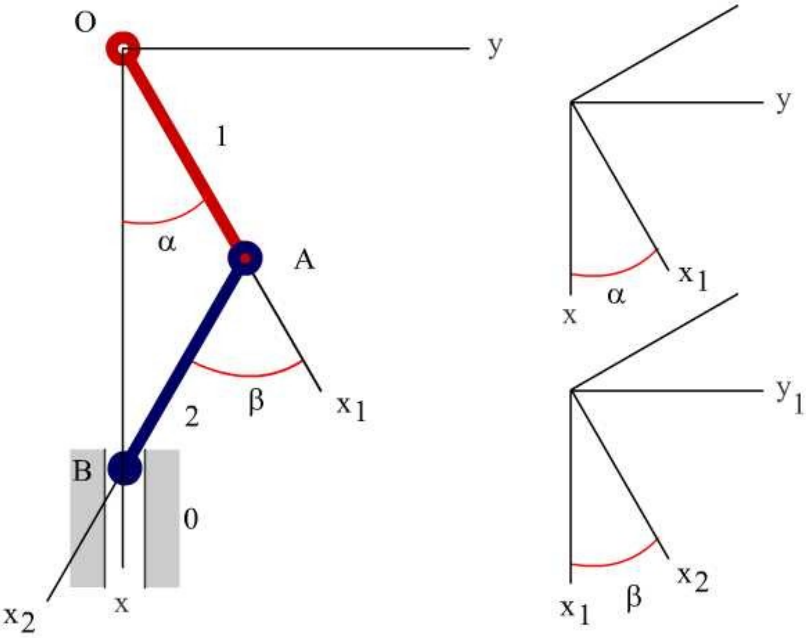

figure 1

1°) Montrez que l'on a : $\beta = -2\alpha$

On refait une figure. La somme des angles intérieurs à un triangle vaut π. Comme l'angle *OBA* vaut également α, l'angle OAB vaut $\pi - 2\alpha$. Donc l'angle β vaut -2α.

Le signe - dans la relation $\beta = -2\alpha$ est lié au fait que si $\alpha > 0$, donc mesuré dans le sens direct (de x vers x_1), l'angle β, quant à lui, mesuré de x_1 vers x_2, est négatif.

2°) Exprimer en fonction seulement de α les vecteurs rotation de 1/0, de 2/1 et de 2/0.

Par simple lecture de l'énoncé :

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}\,\vec{z} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\beta}\,\vec{z} = -2\dot{\alpha}\,\vec{z}$$

Donc

$$\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = -\dot{\alpha}\,\vec{z}$$

3°) Exprimer (le plus simplement possible) les vecteurs positions $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$

On a

$\vec{OA} = a\,\vec{x}_1$ et $\vec{OB} = a\,\vec{x}_1 + a\,\vec{x}_2$

Ici, il vaut généralement mieux ne pas céder à l'envie de projeter dans la la base 0, ce qui conduirait à introduire dans l'expression des cosinus et des sinus, au risque de se tromper dans les calculs.

4°) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(B,2/0)$

Deux façons de faire

A) Dérivation du vecteur position

B n'est pas un point « à problème » (ce n'est pas un point de contact avec glissement, par exemple). La vitesse $\vec{V}(B,2/0)$ est donc la vitesse du point géométrique :

$$\vec{V}(B,2/0)={}_0(\frac{d}{dt}\vec{OB})$$

Dans cette formule, 0 est la base de dérivation (la base par rapport à laquelle se fait le mouvement – le 0 de $\vec{V}(B,2/0)$) et O est bien un point fixe du repère de référence.

$$\vec{V}(B,2/0)={}_0(\frac{d}{dt}\vec{OB})={}_0(\frac{d}{dt}a\vec{x}_1+a\vec{x}_2)=a\ {}_0(\frac{d}{dt}\vec{x}_1)+a\ {}_0(\frac{d}{dt}\vec{x}_2)$$

On applique la formule de dérivation dans une base mobile :

$${}_0(\frac{d}{dt}\vec{u})={}_1(\frac{d}{dt}\vec{u})+\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{u}$$

$$\vec{V}(B,2/0)=a\ {}_1(\frac{d}{dt}\vec{x}_1)+\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{x}_1+a\ {}_2(\frac{d}{dt}\vec{x}_2)+\vec{\Omega}_{2/0}\wedge\vec{x}_2=a\dot{\alpha}\vec{y}_1-a\dot{\alpha}\vec{y}_2$$

Ici le vecteur $\vec{V}(B,2/0)$ est écrit sous une forme très simple. Il n'est pas nécessaire (pas demandé) de projeter $\vec{V}(B,2/0)$ dans la base $\vec{x}_1$ ou dans la base $\vec{x}_2$

Attention : l'expression $\vec{OB}=a\vec{x}_1+a\vec{x}_2$ est une expression purement géométrique et ne rend pas compte du fonctionnement du système bielle-manivelle, notamment du fait que le point *B* reste sur l'axe $O\vec{x}$. Pour exprimer cette contrainte, il faut écrire que $\vec{V}(B,2/0)$ est porté par $O\vec{x}$. En d'autres termes projeter $\vec{V}(B,2/0)$ sur $O\vec{x}$. On a :

$\vec{V}_{finale}(B,2/0)=v\vec{x}$ où $v=\vec{V}(B,2/0).\vec{x}$

Soit

$$v=(a\dot{\alpha}\vec{y}_1-a\dot{\alpha}\vec{y}_2).\vec{x}=-2a\dot{\alpha}\sin\alpha$$

Une autre façon de faire est d'exprimer le vecteur position directement suivant $O\vec{x}$. On a

$$\vec{OB}=2a\cos\alpha\vec{x}$$

Ainsi

$$\vec{V}(B,2/0)={}_0(\frac{d}{dt}\vec{OB})={}_0(\frac{d}{dt}2a\cos\alpha\vec{x})=-2a\dot{\alpha}\sin\alpha\vec{x}$$

B) Changement de point

On peut écrire la formule de changement de point pour le torseur cinématique (un même mouvement, deux points différents)

$$\vec{V}(B,2/0)=\vec{V}(A,2/0)+\vec{\Omega}_{2/0}\wedge\vec{AB}$$

En *A*, on peut écrire la formule de composition des vitesses (un même point, trois mouvements différents)

$$\vec{V}(A,2/0)=\vec{V}(A,2/1)+\vec{V}(A,1/0)$$

Soit finalement

$$\vec{V}(B,2/0)=\vec{V}(A,2/1)+\vec{V}(A,1/0)+\vec{\Omega}_{2/0}\wedge\vec{AB}$$

Le premier terme de la partie droite de l'équation est nul car *A* est un point de l'axe de rotation du mouvement de 2/1 (et ne se déplace pas le long de cet axe). Concernant le second terme, on applique à nouveau la formule de changement de point, cette fois pour le mouvement de 1/0. On obtient.

$$\vec{V}(B,2/0)=\vec{V}(0,1/0)+\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{OA}+\vec{\Omega}_{2/0}\wedge\vec{AB}$$

Le premier terme de la partie droite de l'équation est nul car *O* est un point de l'axe de rotation du mouvement de 1/0 (et ne se déplace pas le long de cet axe).

On retrouve le résultat précédent :

$\vec{V}(B,2/0)=a\dot{\alpha}\vec{y}_1-a\dot{\alpha}\vec{y}_2$

Qu'il faut à nouveau projeter selon $O\vec{x}$

Remarques

Les deux méthodes sont ici équivalentes ; les outils utilisés sont différents :

- dans l'une, on utilise la formule de dérivation du vecteur position
- dans l'autre la formule de changement de point pour le torseur cinématique et la composition des vitesses

Pour calculer $\vec{\Gamma}(B,2/0)$, on écrit la définition

$$\vec{\Gamma}(B,2/0)=\left(\frac{d}{dt}\vec{V}(B,2/0)\right)_0$$

On replace $\vec{V}(B,2/0)$ par son expression et on utilise à nouveau la formule de dérivation dans une base mobile.