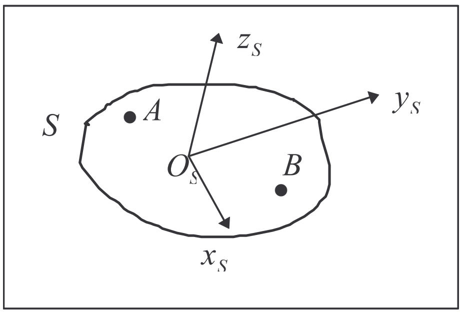
CINEMATIQUE DU SOLIDE RIGIDE

I MOUVEMENT DE SOLIDE RIGIDE

I.1 Définition

Un solide rigide est un ensemble de points matériels tel que les distances qui les séparent sont indépendantes du temps et du mouvement. On écrit :

$$Dist(A,B) = \left\|\vec{AB}\right\| = l$$



I.2 Conséquences

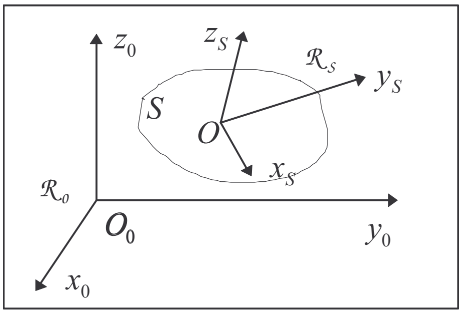
- A tout solide rigide S, on peut associer un repère $\mathcal{R}_S$ dans lequel les points de ce solide gardent une position fixe ;
- Pour indiquer que l'on considère le mouvement d'un point matériel P de S on notera :

$$P \in S \quad (\text{"}P \text{ appartenant à } S\text{"})$$

- On peut "étendre" le solide S à tout l'espace référencé par $\mathcal{R}_S$; on pourra ainsi être amené à parler de points appartenant à S même lorsque ces points seront situés en dehors des limites matérielles du solide S considéré.

I.3 Mouvement d'un solide par rapport à un repère

L'étude du mouvement d'un solide S (auquel on attache le repère $\mathcal{R}_S$) par rapport à un solide de référence 0 (auquel on attache le repère $\mathcal{R}_0$) revient à étudier le mouvement de $\mathcal{R}_S$ par rapport à $\mathcal{R}_0$, c'est à dire déterminer à chaque instant t la position de $\mathcal{R}_S$ par rapport à $\mathcal{R}_0$.



Notation : lors de l'étude du mouvement d'un point $P \in S$ par rapport au solide de référence 0 auquel est attaché $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$,-$O_0$ fixe dans $\mathcal{R}_0$ - on considèrera :

- le vecteur position $O_0\vec{P}(t)$,
- le vecteur vitesse $\vec{V}(P \in S/0) = \vec{V}(P \in \mathcal{R}_S / \mathcal{R}_0$
- le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(P \in S/0) = \vec{\Gamma}(P \in \mathcal{R}_S / \mathcal{R}_0)$.

II CHAMP DES VITESSES D'UN SOLIDE RIGIDE

II.1 Torseur cinématique

Soient A et B deux points d'un solide rigide S. On a :

$$Dist(A,B) = \|A\vec{B}\| = l$$

d'où :

$$A\vec{B} \cdot A\vec{B} = \text{cste}=l^2$$

Cette quantité scalaire étant constante dans le temps, sa dérivée par rapport au temps est nulle :

$$2 \quad A\vec{B} \cdot \left(\frac{dA\vec{B}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = 0$$

L'apparition d'une dérivée de vecteur nous oblige à spécifier le repère dans lequel s'effectue cette dérivation : le mouvement se faisant par rapport à $\mathcal{R}_0$, c'est dans ce repère que la dérivation s'effectue. On a :

$$A\vec{B} = O_0\vec{B} - O_0\vec{A}$$

$$\left(\frac{dA\vec{B}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{dO_0\vec{B}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} - \left(\frac{dO_0\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{V}(B \in S/0) - \vec{V}(A \in S/0)$$

D'où :

$$A\vec{B} \cdot \vec{V}(B \in S/0) = A\vec{B} \cdot \vec{V}(A \in S/0)$$

Ainsi, le champ des vitesses d'un solide rigide est un champ équiprojectif (cf. cours TORSEURS).

Il existe donc un torseur dont le champ des moments est le champ des vitesses de ce solide rigide. Ce torseur est appelé le **torseur cinématique** et est noté $[\mathcal{C}_{S/0}]$:

$$[\mathcal{C}_{S/0}] = \left[\vec{\Omega}_{S/0}, \vec{V}(A \in S/0)\right]_A$$

$\vec{\Omega}_{S/0}$, résultante de ce torseur, est appelé - pour des raisons qui seront explicitées plus tard - vecteur **vitesse instantanée de rotation** de S par rapport 0 (solide de référence).

La relation de changement de point du champ des moments d'un torseur s'écrit ici :

$$\vec{V}(A \in S/0) = \vec{V}(B \in S/0) + A\vec{B} \wedge \vec{\Omega}_{S/0}$$

où $\vec{\Omega}_{S/0}$ et $\vec{V}(A \in S/0)$ sont les éléments de réduction en A du torseur cinématique $\left[\mathcal{C}_{S/0}\right]$.

II.2 Description du champ des vecteurs vitesses d'un solide à l'instant *t*

Reprenons la classification établie à l'occasion du cours sur les torseurs.

$\vec{\Omega}_{S/0} \cdot \vec{V}(A \in S/0) = 0$	$\vec{\Omega}_{S/0} = \vec{0}$	$\vec{V}(A \in S/0) = \vec{0}$	**a**
$\vec{\Omega}_{S/0} \cdot \vec{V}(A \in S/0) = 0$	$\vec{\Omega}_{S/0} = \vec{0}$	$\vec{V}(A \in S/0) \neq \vec{0}$	**b**
$\vec{\Omega}_{S/0} \cdot \vec{V}(A \in S/0) = 0$	$\vec{\Omega}_{S/0} \neq \vec{0}$	$\vec{V}(A \in S/0) \neq \vec{0}$	**c**
$\vec{\Omega}_{S/0} \cdot \vec{V}(A \in S/0) \neq 0$	$\vec{\Omega}_{S/0} \neq \vec{0}$	$\vec{V}(A \in S/0) \neq \vec{0}$	**d**

a - $\forall P \in S \quad \vec{V}(P \in S/0) = \vec{V}(A \in S/0) + \vec{PA} \wedge \vec{\Omega}_{S/0} = \vec{0} + \vec{PA} \wedge \vec{0} = \vec{0}$:

Le solide est immobile par rapport au solide de référence.

b - $\forall P \in S \quad \vec{V}(P \in S/0) = \vec{V}(A \in S/0) + \vec{PA} \wedge \vec{\Omega}_{S/0} = \vec{V}(A \in S/0) + \vec{PA} \wedge \vec{0} = \vec{V}(A \in S/0)$

tous les points ont même vitesse : le solide est animé d'un mouvement de translation (pas nécessairement rectiligne comme on va le voir plus tard) par rapport au solide de référence.

c - Le torseur est un glisseur . Il admet un axe central (Δ), parallèle à $\vec{\Omega}_{S/0}$; de plus :

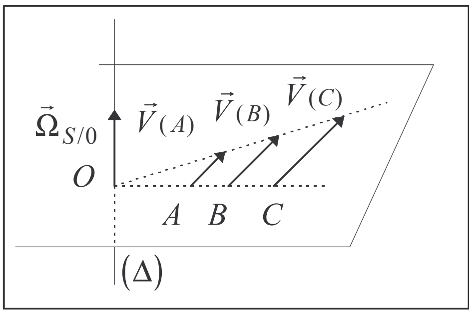
$$\forall O \in (\Delta) \quad \vec{V}(O \in S/0) = \vec{0}$$

D'où :

$$\forall P \in S \qquad \vec{V}(P \in S/0) = \vec{V}(O \in S/0) + \vec{PO} \wedge \vec{\Omega}_{S/0} = \vec{0} + \vec{PO} \wedge \vec{\Omega}_{S/0} = \vec{\Omega}_{S/0} \wedge \vec{OP}$$

Le champ des vecteurs vitesse à l'instant t se construit grâce à la relation :

$$\forall O \in (\Delta) \quad \forall P \in S \qquad \vec{V}(P \in S/0) = \vec{\Omega}_{S/0} \wedge \vec{OP}$$



Le mouvement, **à l'instant *t***, est un mouvement de rotation autour de l'axe (Δ), axe central du torseur cinématique, appelé axe instantané de rotation.

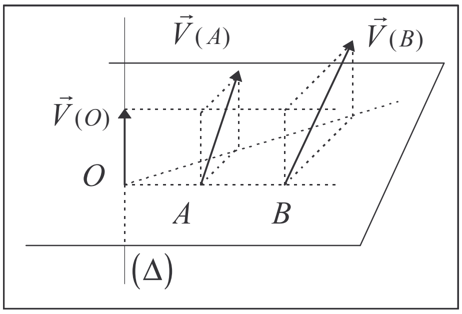
Attention, l'axe de rotation à l'instant $t+dt$ peut être différent de l'axe de rotation à l'instant t, c'est la raison pour laquelle (Δ) est appelé axe "instantané".

d - Le torseur est quelconque. Il admet un axe central (Δ), parallèle à $\vec{\Omega}_{S/0}$, et on a:

$$\forall O \in (\Delta) \qquad \vec{V}(O \in S/0) = \lambda\, \vec{\Omega}_{S/0} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathrm{R}$$

Le champ des vecteurs vitesse à l'instant t se construit grâce à la relation :

$$\forall O \in (\Delta) \quad \forall P \in S \qquad \vec{V}(P \in S/0) \;=\; \vec{V}(O \in S/0) + \vec{PO} \wedge \vec{\Omega}_{S/0}$$



Le mouvement, **à l'instant *t***, est un mouvement hélicoïdal autour de l'axe (Δ), appelé axe instantané de rotation : rotation de vitesse $\vec{\Omega}_{S/0}$ autour de (Δ) plus translation de vitesse $\vec{V}(O \in S/0) = \lambda\, \vec{\Omega}_{S/0}$ parallèlement à (Δ).

Attention, l'axe de rotation à l'instant $t+dt$ peut être différent de l'axe de rotation à l'instant t, c'est la raison pour laquelle (Δ) est appelé "instantané".

II.3 Calcul des vecteurs vitesse

Lors du calcul d'un vecteur vitesse $\vec{V}(P \in S/\mathcal{R}_0)$, les deux méthodes suivantes pourront être utilisées.

- si la vitesse d'un point est connue, on applique la relation de changement de point,
- dans le cas contraire, on calcule $\vec{V}(P \in S/\mathcal{R}_0)$ par la relation :

$$\vec{V}(P \in S/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(P/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d}{dt}\vec{OP}\right)_{\mathcal{R}_0}$$

où O est un point fixe de $\mathcal{R}_0$ et P un point fixe dans $\mathcal{R}_S$.

Mise en garde importante: le calcul du vecteur $\vec{V}(P \in S/\mathcal{R}_0)$ implique l'appartenance du point P au solide S ; dans certains cas étudiés ultérieurement il ne faudra pas confondre $\vec{V}(P \in S/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{V}(P/\mathcal{R}_0)$, ce dernier vecteur représentant la vitesse du point géométrique P dont le mouvement est considéré indépendamment de tout solide.

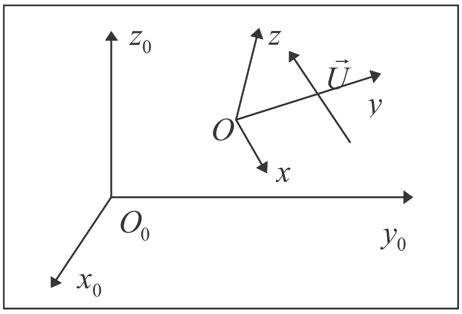
III MOUVEMENT D'UN REPERE $\mathcal{R}$ PAR RAPPORT A UN REPERE DE REFERENCE $\mathcal{R}_0$

III.1 Formule du repère mobile

Soit $\mathcal{R} = (O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère mobile par rapport à un repère de référence $\mathcal{R}_0 = (O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Soit $\vec{U}$ un vecteur fixe dans $\mathcal{R}$. Considérons, à titre d'explication, que $\mathcal{R}$ est attaché à un solide S et que $\vec{U} = A\vec{B}$ est le vecteur qui relie deux points A et B de ce solide.

On a :

$$\vec{V}(B \in \mathcal{R} / \mathcal{R}_0) - \vec{V}(A \in \mathcal{R} / \mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge A\vec{B}$$



soit :

$$\left(\frac{dO_0\vec{B}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} - \left(\frac{dO_0\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge A\vec{B}$$

$$\left(\frac{dA\vec{B}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge A\vec{B}$$

Finalement :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{U}$$

o˘ $\vec{U}$ est un vecteur fixe dans $\mathcal{R}$.

III.2 Calcul du vecteur vitesse instantanée de rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}$

Appliquons la formule du repère mobile aux vecteurs unitaires $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ de R (ces vecteurs sont fixes dans $\mathcal{R}$ mais mobiles dans $\mathcal{R}_0$):

$$\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{x} \qquad \left(\frac{d\vec{y}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{y} \qquad \left(\frac{d\vec{z}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{z}$$

On a :

$$\vec{R} = \vec{x} \wedge \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + \vec{y} \wedge \left(\frac{d\vec{y}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + \vec{z} \wedge \left(\frac{d\vec{z}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0}$$

soit :

$$\vec{R} = \vec{x} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{x}\right) + \vec{y} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{y}\right) + \vec{z} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{z}\right)$$

En vertu de la formule du double produit vectoriel : $\vec{V}_1 \wedge \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right) = \vec{V}_2\left(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3\right) - \vec{V}_3\left(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2\right)$

$$\vec{R} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}\Bigg(\underbrace{\vec{x}\cdot\vec{x} + \vec{y}\cdot\vec{y} + \vec{z}\cdot\vec{z}}_{3}\Bigg) \underbrace{-\vec{x}\left(\vec{x}\cdot\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}\right) - \vec{y}\left(\vec{y}\cdot\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}\right) - \vec{z}\left(\vec{z}\cdot\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}\right)}_{-\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}}$$

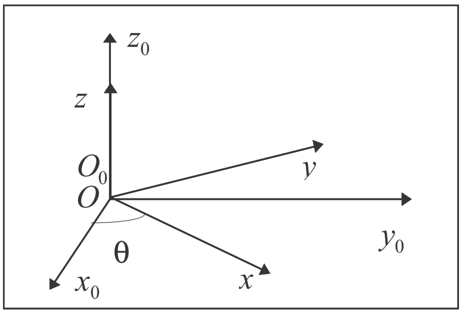
soit :

$$\vec{R} = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}$$

D'où :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} = \frac{1}{2}\left(\vec{x} \wedge \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + \vec{y} \wedge \left(\frac{d\vec{y}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + \vec{z} \wedge \left(\frac{d\vec{z}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0}\right)$$

Application : mouvement de rotation autour d'un axe.



On démontre aisément le résultat important suivant : quand un solide S est en liaison pivot d'axe $\left(O_0\vec{z}_0\right) = \left(O_S\vec{z}_S\right)$ et de paramètre $\theta = \left(O_0\vec{x}_0, O_0\vec{x}_S\right)$ choisi direct par rapport à un solide de référence 0, le vecteur instantané de rotation est :

$$\vec{\Omega}_{S/0} = \dot{\theta}\,\vec{z}_0 = \frac{d\theta}{dt}\vec{z}_0$$