CINEMATIQUE DU POINT

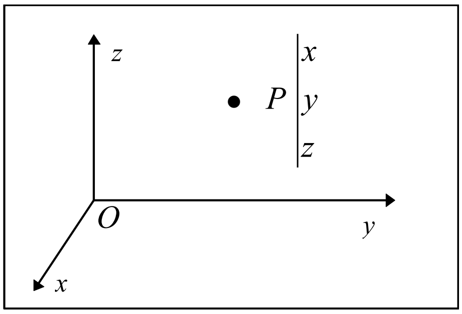
I VECTEUR POSITION

La cinématique est l'étude des mouvements des corps, et ce indépendamment des causes qui les produisent ou les modifient.

Pour étudier les mouvements des corps, l'observateur doit utiliser des repères d'espace et de temps. Supposons défini un référentiel constitué par :

- une échelle de temps t ,
- un repère d'espace, ensemble de points dont les distances mutuelles sont invariables au cours du temps, caractérisé par :
    - un point O choisi comme origine du repère,
    - une base orthonormée $B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

On note $R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère associé à l'espace physique ; c'est le repère auquel l'observateur des mouvements est lié.



La position d'un point P en mouvement par rapport à R est définie, à chaque instant t, par le vecteur position $\vec{OP}$:

$$\vec{OP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B$$

x, y et *z* sont des fonctions du temps t et

$$x\,,\ \frac{dx}{dt}\ \text{(notée } \dot{x}\text{) et } \frac{d^2x}{dt^2}\ \text{(notée } \ddot{x}\text{)}$$

existent et sont continues dans les intervalles de temps considérés.

II TRAJECTOIRE DE *P* DANS LE REPÈRE R

II.1 Définition

La trajectoire du point P dans le repère R est l'ensemble géométrique des positions de P dans le repère R.

Remarques : c'est une courbe liée au repère R ; il existe autant de trajectoires que de repères de référence ; exemple : soit M un point d'une masse d'équilibrage d'une roue de voiture :

- si R est lié à la roue, la trajectoire de M par rapport à R est réduite au point M ;
- si R est lié au véhicule, la trajectoire de M par rapport à R est un cercle ;
- si R est lié à la route, la trajectoire de M par rapport à R est une cycloïde.

II.2 Equations

Les équations de trajectoire pourront être définies de différentes faons :

- trajectoires planes :

$$y=f(x)$$

- intersection de deux surfaces 3D :

$$f_1(x,y,z)=0$$
$$f_2(x,y,z)=0$$

- coordonnées paramétriques 2D :

$$x=x(t)$$
$$y=y(t)$$

III VITESSE DE *P* DANS LE REPERE R

III.1 Définitions

La notion de vitesse d'un point P en mouvement par rapport à un repère R permet d'apprécier, à chaque instant, la faon dont le vecteur position $O\vec{P}$ évolue par rapport au temps.

On définit la vitesse du point P par rapport au repère R par la dérivée par rapport au temps dans le repère R du vecteur position :

$$\vec{V}(P/R)=\frac{d}{dt}\vec{OP}$$

Cette notion de dérivation dans un repère R donné est fondamentale : elle signifie que la variation du vecteur vitesse $O\vec{P}$ est appréciée par rapport à R. Nous verrons plus loin ce que recouvre cette notion du point de vue mathématique.

III.2 Expression analytique de la vitesse

III.2.1 Coordonnées cartésiennes

Les coordonnées du point P sont définies par les composantes x, y et z (fonctions du temps) du vecteur $\vec{OP}$:

$$\vec{OP} = x\,\vec{x} + y\,\vec{y} + z\,\vec{z} = {}_B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\vec{V}(P/R) = \frac{d}{dt}x\,\vec{x} + x\frac{d}{dt}\vec{x} + \frac{d}{dt}y\,\vec{y} + y\frac{d}{dt}\vec{y} + \frac{d}{dt}z\,\vec{z} + z\frac{d}{dt}\vec{z}$$

Soit :

$$\vec{V}(P/R) = \frac{dx}{dt}\vec{x} + \frac{dy}{dt}\vec{y} + \frac{dz}{dt}\vec{z}$$

En effet, les vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ étant des vecteurs liés à R , leur dérivée dans R est donc nulle. Ainsi :

$$\vec{V}(P/R) = {}_B\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

III.2.2 Coordonnées polaires

Considérons un mouvement tel que la trajectoire soit contenue dans le plan Oxy. La position d'un point P peutêtre définie par le couple (r, θ) tel que le vecteur position $\vec{OP}$ s'écrive :

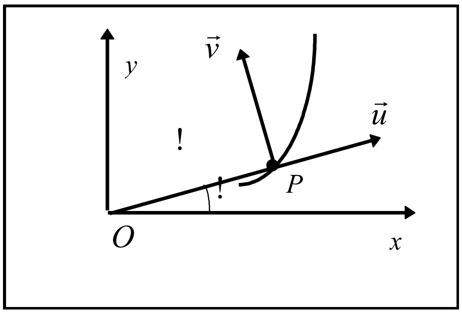
$$\vec{OP} = r\,\vec{u}$$

où :

- (r, θ) sont des fonctions du temps t,
- $\vec{u}$ est le vecteur unitaire du rayon polaire.

Soit $\vec{v}$ le vecteur unitaire se déduisant de $\vec{u}$ par rotation de 90°. Alors :

$$\vec{V}(P/R) = \dot{r}\,\vec{u} + r\,\dot{\theta}\,\vec{v}$$



Remarque : $\vec{V}(P/R)$ représente la vitesse du point P par rapport au repère R . C'est un vecteur au sens mathématique ; à ce titre, il peut donc être exprimé dans n'importe quelle base de l'espace vectoriel associé ; nous l'avons précédemment exprimé dans R , puis une deuxième fois dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ correspondant au système de coordonnées polaires.

III.3 Dimension et unités de la vitesse

La dimension des composantes du vecteur vitesse est LT^{-1} (L = Longueur, T = Temps).

Dans le système SI, les unités correspondantes sont le mètre et la seconde ; une vitesse s'exprime donc en mètre par seconde : ms^{-1}.

IV ACCÉLÉRATION DE *P* DANS LE REPÈRE R

IV.1 Définitions

La notion d'accélération d'un point P en mouvement par rapport à un repère R permet d'apprécier, à chaque instant, la faon dont le vecteur vitesse $\vec{V}(P/R)$ évolue par rapport au temps.

On définit l'accélération du point P par rapport au repère R par la dérivée par rapport au temps et dans le repère R du vecteur vitesse :

$$\vec{\gamma}(P/R)=\frac{d}{dt}\vec{V}(P/R)=\frac{d^2}{dt^2}\vec{OP}$$

Remarque : du point de vue mathématique, rien ne s'oppose à ce que l'on construise des dérivées du vecteur position d'ordre supérieur; nous verrons plus loin (Dynamique) que les énoncés des principes fondamentaux de la mécanique ne requirent que les expressions du vecteur accélération.

IV.2 Expression analytique de l'accélération

IV.2.1 Coordonnées cartésiennes

$$\vec{\gamma}(P/R)_B={}_B\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix}$$

IV.2.2 Coordonnées polaires

Considérons un mouvement plan. Le vecteur vitesse est défini par :

$$\vec{V}(P/R)=\dot{r}\vec{u}+r\dot{\theta}\vec{v}$$

d'où :

$$\vec{\gamma}(P/R)=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{u}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\vec{v}$$

IV.3 Dimension et unités de l'accélération

La dimension des composantes du vecteur accélération est LT^{-2} (L = Longueur, T = Temps).

Dans le système SI, les unités correspondantes sont le mètre et la seconde ; une accélération s'exprime donc en mètre par seconde par seconde : ms^{-2}.

V MOUVEMENTS PARTICULIERS

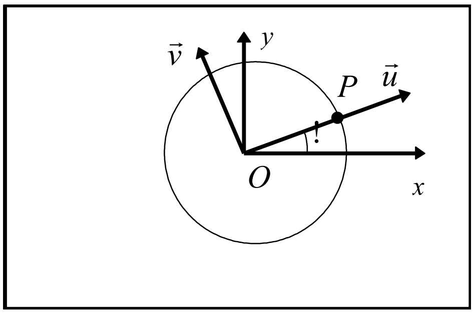
V.1 Mouvement rectiligne

Le mouvement d'un point matériel est rectiligne lorsque sa trajectoire est portée par une droite. Soit $R(0,\vec{x})$ un repère pris sur cette droite.

$$\vec{OP}=x\vec{x} \qquad \vec{V}(P/R)=\dot{x}\vec{x} \qquad \vec{\gamma}(P/R)=\ddot{x}\vec{x}$$

V.2 Mouvement circulaire

Le mouvement d'un point matériel est dit circulaire lorsque sa trajectoire est portée par un cercle. Soit O le centre de ce cercle, R son rayon. Soit $\mathcal{R}$ le repère fixe de l'observateur.



On a ici $r=R=cte$

D'où :

$$\vec{V}(P/R)=r\dot{\theta}\vec{v}$$

et :

$$\vec{\gamma}(P/R)=-r\dot{\theta}^2\vec{u}+r\ddot{\theta}\vec{v}$$