Optimisation et convexité

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices corrigés

Attention : ceci est la version corrigée des exercices.

Exercice 1

Consigne

Soit $f(x, y, z) = x^4 + 2y^3 + 5z^2 + 4x - 6y - 10z + 3$

1. Montrer que f est convexe sur sur un ensemble que l'on précisera.

2. Déterminer alors les extrema de f.

Correction

1) D'après l'exemple 3-b) du paragraphe 1.3.2 du cours, $(x, y, z) \to x^4 + 2y^3 + 5z^2$ est convexe $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.

D'autre part $(x, y, z) \to -4x - 6y - 10z + 3$ est convexe (et concave) sur IR^2 car affine, donc d'après le cours f est bien convexe sur $C =]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.

2) Recherche des points stationnaires de f. f est différentiable de IR^3.

(x, y, z) est un point stationnaire de f si et seulement si $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6y^2 - 6 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 10z - 10 \end{cases}$.

D'où les points stationnaires de f : $A = (1,1,1)$ et $B = (1, -1, 1)$.

Or $A \in C$ et puisque f est convexe sur CA correspond à un minimum local de f.

Pour B, étudions $\Delta = f(x,y,z) - f(1,-1,1)$ au voisinage de $(1,-1,1)$ et posons $x = 1 + h$, $y = -1 + k$ et $z = 1 + t$. (h,k,t) est donc voisin de $(0,0,0)$ et

$$\Delta = (1+h)^4 + 2(-1+k)^3 + 5(1+t)^2 - 4(1+h) - 6(-1+k) - 10(1+t) + 3 - (-1)$$

$$\Delta = 6h^2 - 6k^2 + 5t^2 + (4h^3 + h^4 + 2k^3)$$

Pour (h,k,t) voisin de $(0,0,0)$, la parenthèse est négligeable devant les termes de degré 2. Ainsi $\Delta \sim 6h^2 - 6k^2 + 5t^2$, expression qui change signe sur tout voisinage de $(0,0,0)$ (en effet si $k = 0$, l'expression est positive et si $h = t = 0$, l'expression est négative).

B est donc un point col.

Exercice 2

Consigne

Soit $f(x, y, z) = -\frac{\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}} - 2x + 10y - 2$.

1. Montrer que f est concave sur un ensemble que l'on précisera.

2. Déterminer alors les extrema de f.

Correction

1. D'après l'exemple 4-c) du paragraphe 1.3.2 du cours, $(x, y) \to \frac{\sqrt{y^5}}{\sqrt{x}}$ est convexe sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$, son opposée est donc concave et puisque $(x,y) \to -2x + 10y - 2$ est concave (et convexe) sur IR^2 car affine. f est concave sur $C =]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.

2. Recherche des points stationnaires de f. f est différentiable sur $]0\,;+\infty[\times[0\,;+\infty[$ (x,y) est un point stationnaire de f si et seulement si $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt{y^5}}{2\sqrt{x^3}} - 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{5}{2}\frac{\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}} + 10 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt{y^3}}{2\sqrt{x^3}} = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{5}{2}\frac{\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}} = 10 \end{cases}$. En faisant le quotient des deux égalités, $y = x$, et la première équation donne par exemple $y = 4$.

Le seul point stationnaire de f est donc $(4,4)$.

Or $(4,4) \in C$ et f est concave sur C, $(4,4)$ correspond donc à un maximum de f sur C.

Exercice 3

Consigne

Soit $f(x,y) = 12\sqrt{y}\sqrt[3]{x} - 4x + 5y + 3$, sous la contrainte (C) : $2x^2 + y^2 = 18$.

1. Etudier la convexité de f.

2. Montrer que $(1{,}4)$ est un point stationnaire du Lagrangien.

3. Conclure.

Correction

1. D'après le cours $(x,y) \to 12\sqrt{y}\sqrt[3]{x}$ est concave sur $\mathbb{C} =]\,0\,;+\infty[\times]\,0\,;+\infty[$, $(x,y)\ \to -4\,x + 5\,y + 3$ est aussi concave (et convexe) puisqu'elle est affine. f est donc concave sur C. f est différentiable sur C.

2. Le Lagrangien $\mathrm{L} : (x,y,\lambda) \to 12\sqrt{y}\sqrt[3]{x} - 4x + 5y + 3 + \lambda(2x^2 + y^2 - 18)$ est différentiable sur C. Et (x,y) est un point stationnaire de L, s'il existe λ ∈ IR tel que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 4\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x^2}} - 4 + 4\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 6\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}} + 5 + 2\lambda y = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 18 \end{cases}$$

Or les 3 équations sont bien vérifiées pour x= 1, $y = 2.$ et

$\lambda = -1.$ $(1{,}4)$ est bien un point stationnaire de L associé à $\lambda = -1$

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 2, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).