# Optimisation et convexité

*Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.*

## Table des matières

# Introduction

**Objectif de la leçon** : On optimise des fonctions convexes (ou concaves) et différentiables sur des produits d'intervalles. Dans le cadre convexe (ou concave), qui intervient souvent en économie, le problème d'optimisation se trouve très simplifié puisque les conditions du second ordre sont inutiles.

# Fonctions à plusieurs variables concaves ou convexes et optimisation libre

## Fonctions concaves

Soit f : $IR^2 \to IR^2$ définie sur un produit d'intervalles $I_1 \times I_2$.f(x,y) est donc défini pour x appartenant à l'intervalle $I_1$ et pour y appartenant à l'intervalle $I_2$.

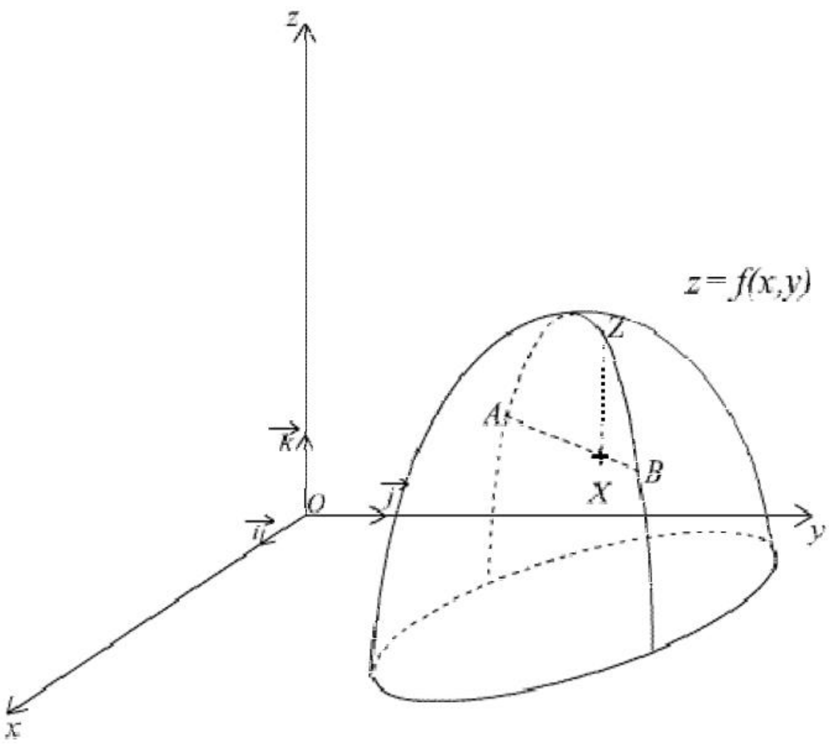
**Définition** : f est concave sur $I_1 \times I_2$ si et seulement si, pour tous points A et B de $I_1 \times I_2$ et pour tout $\mathrm{t} \in [0;1]$,

$$\mathrm{f}(\mathrm{t}A + (1-\mathrm{t})\mathrm{B}) \geq \mathrm{tf}(\mathrm{A}) + (1-\mathrm{t})\mathrm{f}(\mathrm{B})$$

**Remarque** : Si $t \in [0;1]$,$\mathrm{X} = \mathrm{tA} + (1-\mathrm{t})\mathrm{B} \in [\mathrm{A};\mathrm{B}] (\subset I_1 \times I_2)$.

Si $t = 0, X = B$, si $t = 1$ $X = A$ et si $t = \frac{1}{2} X$ est le milieu de $[A;B]$ et quand $t$ parcourt $[0;1]$,X parcourt tout le segment $[\mathrm{A};\mathrm{B}]$.

On a le dessin suivant :




$A = (x_A; y_A), B = (x_B; y_B), X = tA + (1-t)B = (t_A + (1-t)x_B; t_A + (1-t)y_B) = (x; y)$ et Z, le point de la représentation graphique de f d'abscisse x et d'ordonnée y a pour coordonnées $(x = \mathrm{tx_A} + (1-\mathrm{t})\mathrm{x_B}; \mathrm{y} = \mathrm{ty_A} + (1-\mathrm{t})\mathrm{y_B}; \mathrm{f(x,y)} = \mathrm{f(tA} + (1-\mathrm{t})\mathrm{B})$.

L'inégalité (1) qui caractérise la concavité de f exprime que Z est au-dessus de X.

Autrement dit, la représentation graphique de f est au-dessus de la corde [A ;B].

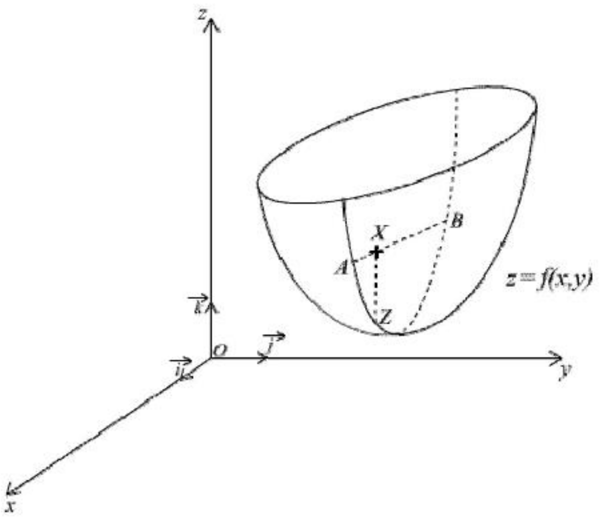
## Fonctions convexes

Soit f: $\boldsymbol{IR}^2 \to \boldsymbol{IR}^2$ définie sur un convexe $I_1 \times I_2$, où $I_1$ et $I_2$ sont deux intervalles de IR.

**Définition** : f est convexe sur $I_1 \times I_2$ si et seulement si, pour tous points A et B de $I_1 \times I_2$ et pour tout t $\in [0;1]$,

$$\mathrm{f}(\mathrm{t}A + (1-t)\mathrm{B}) \leq \mathrm{tf}(\mathrm{A}) + (1-\mathrm{t})\mathrm{f}(\mathrm{B})$$

On a le dessin suivant :




Ici l'inégalité (2) qui caractérise la convexité de f exprime que $\mathrm{Z}$ est en dessous de $\mathrm{X}$.

Autrement dit, la représentation graphique de f est en dessous de la corde $[A;B]$.

**Propriété 1** : f est convexe sur $I_1 \times X_2$ si et seulement si (-f) est concave sur $I_1 \times I_2$.

**Propriété 2** : Si $f_1, f_2, \dots, f_p$ sont concaves (respectivement convexes) sur un même produit d'intervalles, toute combinaison linéaire de ces fonctions, de la forme

$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots . + \alpha_p f_p$, avec $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, .. \alpha_p \geq 0$ est concave (respectivement convexe sur ce même produit d'intervalles).

Ces définitions et ces propriétés se prolongent sur $IR^3, IR^4$.

Sur $IR^4$ par exemple, f est une fonction de 4 variables définie sur un produit de 4 intervalles, elle prend ses valeurs dans IR et $A$ et $B$ ont 4 coordonnées au lieu de 2.

## Exemples à connaître

1- Les fonctions affines. Dans $R^2$ elles sont de la forme $f(x,y) = ax + by + c$, avec a,b et c réels quelconques. Ces fonctions sont concaves et convexes sur $R^2$, on les appelle parfois rectilignes.

Sur $IR^3$, on a le même résultat avec les fonctions de la forme $f(x,y,z) = ax + by + cz + d$, on les appelle parfois planes.

Sur $IR^4$, on a le même résultat avec les fonctions de la forme $f(x,y,z,t) = ax + by + cz + dt + e$...(fonctions dites parfois hyperplanes).

**Remarque** : D'après la propriété 2, si on ajoute à une fonction concave (respectivement convexe) sur un produit d'intervalles une fonction affine, on obtient une fonction concave (respectivement convexe) sur ce même produit d'intervalles.

2- Soit $A = (a_1, \dots, a_n)$ un point quelconque de $IR^n$ et f l'application de $IR^n$ dans $IR^n$ définie par : $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \to |X - A| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots . + (x_n - a_n)^2}$ est convexe.

3- a) $f : (x, y) \ \to x^\alpha + by^\beta$ avec $\alpha \in [0; 1], \beta \in [0; 1], a \geq 0$ et $b \ \geq 0$ est concave sur $]\ 0\ ; +\infty[x]\ 0\ ; +\infty[$.

On peut généraliser à $R^3, R^4$. Par exemple $(x,y,z,t) \to ax^\alpha + by^\beta + cz^\gamma + dt^\delta$ avec $\alpha, \beta, \gamma$ et $\delta$ réels de $[0; 1]$ et a,b,c,d positifs ou nuls, est concave sur $]\ 0\ ; +\infty[\times]\ 0\ ; +\infty[\times]\ 0\ ; +\infty[\times]\ 0\ ; +\infty[$.

b) $f : (x, y) \to ax^\alpha + by^\beta$ avec $\alpha \geq 1, \beta \geq 1$ et $a \geq 0, \sim b \geq 0$ est convexe sur $]\ 0\ ; +\infty[\times]\ 0\ ; +\infty[$.

On peut généraliser à $R^3, R^4$, Par exemple ( $x,y,z,t) \to ax^\alpha + by^\beta + cz^\gamma + dt^\delta$ avec $\alpha, \beta, \gamma$ et $\delta$ réels supérieurs à 1 et a,b,c,d positifs et nuls, est convexe sur $]\ 0\ ; +\infty[\times]\ 0\ ; +\infty[\times]\ 0\ ; +\infty[\times]\ 0\ ; +\infty[$.

4- a) $f: (x,y) \to x^\alpha y^\beta$ avec $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ et $\alpha + \beta \leq 1$ est concave sur $]\ 0\ ; +\infty[\times]\ 0\ ; +\infty[$.

b) $f : (x,y) \to x^\alpha y^\beta$ avec $\alpha \leq 0$ et $\beta \leq 0$ est convexe sur $]\ 0\ ; +\infty[\times]\ 0\ ; +\infty[$.

c) $f: (x,y) \to x^\alpha y^\beta$ avec $\alpha \leq 0, \beta \geq 1$ et $\alpha + \beta \geq 1$ est convexe sur $]\ 0\ ; +\infty[\times]\ 0\ ; +\infty[$.

Ces exemples ne sont pas à savoir par cœur, mais il faut savoir les utiliser astucieusement dans les exercices.

**Propriété fondamentale** :

Si f est concave et différentiable sur un produit d'intervalles ouverts, alors si $X_0$ est un point stationnaire de $f, f$ fatteint son maximum sur $C$ en $X_0$.

Si f est convexe et différentiable sur un produit d'intervalles ouverts, alors si $X_0$ est un point stationnaire de $f$, fatteint son minimum sur $C$ en $X_0$.

# Fonctions à plusieurs variables concaves ou convexes – Optimisation sous contrainte

Dans le cadre convexe le problème de l'optimisation sous contrainte est lui aussi simplifié.

Si $(x_0, y_0)$ est un point stationnaire du Lagrangien correspondant à la valeur $\lambda_0$du multiplicateur de Lagrange, et si $f(x,y) + \lambda_0 \sim g(x,y)$ est concave (respectivement convexe) sur un convexe $I_1 \times I_2$ contenant $(x_0, y_0)$, alors ( $x_0, y_0$ ) est un maximum (respectivement minimum) de $f$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

# Références

**Comment citer ce cours ?**

Mathématiques 2, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).