Suites récurrentes

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices corrigés

Attention : ceci est la version corrigée des exercices.

Exercice 1

Consigne

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ 3u_{n+1} = u_n + n^2 + 2n \end{cases}$.

Correction

Notons (1) l'équation $3u_{n+1} = u_n + n^2 + 2n$.

L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$

Les solutions de (2) sont de la forme $v_n = v_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et, d'après le cours, celles de (1) sont de la forme : $u_n = v_n + u_n *$, où $(u_n *)$ est une solution particulière de (1).

Déterminons $(u_n *)$:

On cherche $u_n *$ de la même forme que le second membre $(n^2 + 2n)$ et on pose $u_n^* = an^2 + bn + c$. On détermine a,b et c en écrivant que $\mathrm{u}_{\mathrm{n}}{ }^{*}$ vérifie (1):

$3(a(n+1)^2 + b(n+1) + c) = an^2 + bn + c + n^2 + 2n$, soit $n^2(3a - a - 1) + n(6a + 3b - b - 2) + (3a + 3b + 3c - c) = 0$

D'où $\begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ 6a + 2b - 2 = 0 \\ 3a + 3b + 2c = 0 \end{cases}$ et $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$ et $c = 0$. Donc $u_n^* = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ et $u_n = v_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

Pour déterminer v_0, on utilise la condition initiale $u_0 = 2$. Soit $2 = v_0$ et $u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

Exercice 2

Consigne

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} - 4u_n = 3^n - 1 \end{cases}$.

Correction

Notons (1) l'équation $u_{n+1} - 4u_n = 3^n - 1$.

L'équation homogène associée à (1) est $\mathrm{v}_{n+1} = 4\mathrm{v}_n$ (2).

Les solutions de (2) sont de la forme $\mathrm{v}_n = \mathrm{v}_0 4^n$ et, d'après le cours, celles de (1) sont de la forme : $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons $(\mathrm{u}_n *)$:

On cherche $\mathbf{u_n} *$ de la même forme que le second membre $(3^n - 1)$ et on pose

$\mathrm{u}_n *= \mathrm{a}3^n + \mathrm{b}$. On détermine a et b en écrivant que $\mathrm{u}_n *$ vérifie (1) :

$a3^{n+1} + b - 4(a3^n + b) = 3^n - 1$, soit $3^n(3a - 4a - 1) + (b - 4b + 1) = 0$.

D'où$\begin{cases} a + 1 = 0 \\ -3b + 1 = 0 \end{cases}$ et a=-1 et b=$\frac{1}{3}$. Donc $u_n^* = -3^n + \frac{1}{3}$ et $u_n = v_0 4^n - 3^n + \frac{1}{3}$.

Pour déterminer v_0, on utilise la condition initiale $\mathrm{u}_0 = 1$. Soit $1 = \mathrm{v}_0 - 1 + \frac{1}{3}, \mathrm{v}_0 = \frac{5}{3}$ et

$$\mathrm{u}_n = \frac{5}{3}4^n - 3^n + \frac{1}{3}$$

Exercice 3

Consigne

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ 2u_{n+1} + u_n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$.

Correction

Notons (1) l'équation $2\mathrm{u}_{n+1} = \mathrm{u}_n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$. L'équation homogène associée à (1) est $\mathrm{v}_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{v}_n$ (2).

Les solutions de (2) sont de la forme $\mathrm{v}_n = \mathrm{v}_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et, d'après le cours, celles de (1) sont de la forme : $\mathrm{u}_n = \mathrm{v}_n + \mathrm{u}_n *$, où $(\mathrm{u}_n *)$ est une solution particulière de (1).

Déterminons $(u_n *)$:

On cherche $u_n *$ de la même forme que le second membre $\left(3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$. Mais ici il y a résonance et on pose $u_n *= an\left(\frac{1}{2}\right)^n$. On détermine a en écrivant que $u_n *$ vérifie (1) :

$2\left(a(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = an\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$, soit $n\left(\frac{1}{2}\right)^n(a-a) + \left(\frac{1}{2}\right)^n(a-3) = 0$

D'où a $= 3$. Donc $u_n *= 3n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Pour déterminer v_0, on utilise la condition initiale $u_0 = -1$. Soit $-1 = v_0$ et $u_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice 4

Consigne

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = 2u_{n-1} + n^2 - 2 \end{cases}$.

Correction

Notons (1) l'équation $u_n = 2u_{n\text{-}1} + n^2 - 2$.

L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+1} = 2v_n$ (2).

Les solutions de (2) sont de la forme $v_n = v_0 2^n$ et, d'après le cours, celles de (1) sont de la forme : $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons $(u_n *)$:

On cherche $u_n *$ de la même forme que le second membre ($n^2 + 2n$) et on pose $u_n *= an^2 + bn + c$. On détermine a,b et c en écrivant que $u_n *$ vérifie (1):

$an^2 + bn + c = 2(a(n-1)^2 + b(n-1) + c) + n^2 - 2$, soit $n^2(a - 2a - 1) + n(b + 4a - 2b) + (c - 2a + 2b - 2c + 2) = 0$

D'où $\begin{cases} a + 1 = 0 \\ 4a - b = 0 \\ -2a + 2b - c + 2 = 0 \end{cases}$ et $a = -1, b = -etc = -. Doncu_n *= -n^2 - 4n$ et $u_n = v_0 2^n - n^2 - 4n - 4$.

Pour déterminer v_0, on utilise la condition initiale $u_0 = 0$. Soit $0 = v_0 - 4, v_0 = 4$ et

$$u_n = 2^{n+2} - n^2 - 4n - 4$$

Exercice 5

Consigne

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = \frac{2e}{2e+1} \\ u_{n+1} + 2u_n + e^{-n-1} = 0 \end{cases}$.

Correction

Notons (1) l'équation $u_{n+1} + 2u_n + e^{-n-1} = 0$.

L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+1} = -2v_n$ (2). Les solutions de (2) sont de la forme $v_n = v_0(-2)^n$ et, d'après le cours, celles de (1) sont de la forme : $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons $(u_n *)$:

On cherche $u_n *$ de la même forme que le second membre $(-e^{-n-1})$ et on pose $u_n * = ae^{-n}$. On détermine a en écrivant que $u_n *$ vérifie (1) :

$ae^{-n-1} + 2a^{-n} + e^{-n-1} = 0$, soit $e^{-n-1}(a + 2ae + 1) = 0$

D'où $a = -\frac{1}{1+2e}$. Donc $u_n^* = -\frac{e^{-n}}{1+2e}$ et $u_n = v_0(-2)^n - \frac{e^{-n}}{1+2e}$.

Pour déterminer v_0, on utilise la condition initiale $u_0 = \frac{2e}{2e+1}$. Soit $\frac{2e}{2e+1} = v_0 - \frac{1}{1+2e}$, $v_0 = 1$ et

$$u_n = (-2)^n - \frac{e^{-n}}{1 + 2e}$$

Exercice 6

Consigne

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n - 1 \end{cases}$.

Correction

Notons (1) l'équation $u_{n+1} = u_n + n - 1$.

L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+1} = v_n$

Les solutions de (2) sont de la forme $v_n = v_0$ et, d'après le cours, celles de (1) sont de la forme : $u_n = v_n + u_n^*$, où $(u_n *)$ est une solution particulière de (1).

Déterminons $(u_n *)$:

On cherche $u_n *$ de la même forme que le second membre ($n-1$). Mais ici il y a résonance étant donnée la forme de (2) et on pose $u_n *= n(an+b)$. On détermine a et b en écrivant que $u_n *$ vérifie (1): $(n+1)(a(n+1)+b) = n(an+b)+n-1$, soit $n^2(a-a-1)+n(2a+b-b-1)+(a+b+1)=0$

D'où $\begin{cases} 2a-1=0 \\ a+b+1=0 \end{cases}$ et $a=\frac{1}{2}$ et $b=-\frac{3}{2}$. Donc $u_n^* = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$ et $u_n = v_0 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$. Pour déterminer v_0, on utilise la condition initiale $u_0 = 3$.Soit $3 = v_0$ et $u_n = 3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$

Exercice 7

Consigne

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_n + u_{n-1} = (-3)^n + 1 \end{cases}$.

Correction

Notons (1) l'équation $u_n + 3u_{n\text{-}1} = (-3)^n + 1$.

L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+1} = -3v_n$ (2).

Les solutions de (2) sont de la forme $v_n = v_0(-3)^n$ et, d'après le cours, celles de (1) sont de la forme : $u_n = v_n + u_n *$, où $(u_n *)$ est une solutiōn particulière de (1).

Déterminons $(u_n *)$:

On cherche u_n^* de la mêne forme que le second membre $((-3)^n + 1)$.

Mais ici il y a résonarce et on pose $u_n^* = an(-3)^n + b$. On détermine a et b en écrivant que u_n^* vérifie (1) : an $(-3)^n + b + 3[a(n-1)(-3)^{n-1} + b] = (-3)^n + 1$, soit

$n(-3)^n(a-a) + (-3)^n(a-1) + (b+3b-1) = 0$

D'où $a = 1$ et $b = \frac{1}{4}$. Donc $u_n^* = n(-3)^n + \frac{1}{4}$ et $u_n = v_0(-3)^n + n(-3)^n + \frac{1}{4}$

Pour déterminer v_0, on utilise la condition initiale $u_0 = -1$. Soit $-1 = v_0 + \frac{1}{4}, v_0 = -\frac{5}{4}$ et

$$u_n = -\frac{5}{4}(-3)^n + n(-3)^n + \frac{1}{4}$$

Exercice 8

Consigne

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 3 \; et \; u_1 = 3 \\ 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n - 1 + n \end{cases}$.

Correction

Notons (1) l'équation $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n - 1 + n$.

L'équation homogène associée à (1) est $2v_{n+2} - 3v_{n+1} + v_n = 0$ (2).

Equation caractéristique associée à (2) : $2r^2 - 3r + 1 = 0$ (3).

(3) s'écrit $(r-1)(2r-1) = 0$($r = 1$ est racine évidente). Les racines de (3) sont donc $r_1 = 1$ et

$r_2 = \frac{1}{2}$

D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme : $v_n = k_1 + k_2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et les solutions de (1) sont de la forme : $u_n = v_n + u_n *$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons (u_n^*):

On cherche u_n^* de la même forme que le second membre $(-1+n)$. Mais ici il y a résonance ($r_1 = 1$ et le second membre est un polynôme) et on pose

$u_n *= n(an + b)$. On détermine a et b en écrivant que $u_n *$ vérifie (1) :

$2(n+2)(a(n+2)+b) = 3(n+1)(a(n+1)+b).) - (n(a\,n+b)) - 1 + n$, soit

$n^2(2a - 3a + a) + n(8a + 2b - 6a - 3b + b - 1) + (8a + 4b - 3a - 3b + 1) = 0$

D'où $\begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ 5a + b + 1 = 0 \end{cases}$ et $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{7}{2}$.

Donc $u_n^* = \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{2}n$ et $u_n = k_1 + k_2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{2}n$.

Pour déterminer k_1 et k_2, on utilise les conditions initiales $u_0 = 3$ et $u_1 = 3$.

Soit $\begin{cases} 3 = k_1 + k_2 \\ 3 = k_1 + \frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2} - \frac{7}{2} \end{cases}$. On obtient $k_1 = 9$ et $k_2 = -6$ et $u_n = 9 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{2}n$

Exercice 9

Consigne

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \; et \; u_1 = 0 \\ 4u_{n+2} = u_n + 2 \end{cases}$.

Correction

Notons (1) l'équation $4u_{n+2} = u_n + 2$.

L'équation homogène associée à (1) est $\mathrm{v}_{n+2} - \frac{1}{4}\mathrm{v}_n = 0$ (2).

Equation caractéristique associée à (2) : $\mathrm{r}^2 - \frac{1}{4} = 0$ (3).

(3) s'écrit $\left(r - \frac{1}{2}\right)\left(r + \frac{1}{2}\right) = 0$. Les racines de (3) sont donc $r_1 = -\frac{1}{2}$ et $r_2 = \frac{1}{2}$.

D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme : $\mathrm{v}_n = \mathrm{k}_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mathrm{k}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et les solutions de (1) sont de la forme : $\mathrm{u}_n = \mathrm{v}_n + \mathrm{u}_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons $(\mathrm{u}_n *)$:

On cherche u_n^* de la même forme que le second membre (+2) et on pose $\mathrm{u}_n^* = \mathrm{a}$. On détermine a en écrivant que u_n^* vérifie (1) :$4\,a = a + 2$, soit $a = \frac{2}{3}$ et $\mathrm{u}_n^* = \frac{2}{3}$

D'où $\mathrm{u}_n = \mathrm{k}_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mathrm{k}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$.

Pour déterminer k_1 et k_2, on utilise les conditions initiales $\mathrm{u}_0 = 1$ et $\mathrm{u}_1 = 0$.

Soit $\begin{cases} 1 = k_1 + k_2 + \frac{2}{3} \\ 0 = -k_1\frac{1}{2} + k_2\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \end{cases}$. On obtient $k_1 = \frac{5}{6}$ et $k_2 = -\frac{1}{2}$ et $u_n = \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{2}{3}$

Exercice 10

Consigne

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \; et \; u_1 = 1 \\ u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = 2^n + 1 \end{cases}$.

Correction

Notons (1) l'équation $u_n - 5u_{n\text{-}1} + 6u_{n\text{-}2} = 2^n + 1$.

L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+2} - 5v_{n+1} + 6v_n = 0$ (2).

Equation caractéristique associée à (2) : $r^2 - 5r + 6 = 0 \quad (3)$.

(3) s'écrit $(r-2)(r-3) = 0$. Les racines de (3) sont donc $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$. D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme : $v_n = k_1 2^n + k_2 3^n$ et les solutions de (1) sont de la forme $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons $(u_n *)$:

On cherche u_n^* de la même forme que le second membre $(2^n + 1)$. Mais ici il y a résonance (r_1 = 2 et le second membre contient une puissance de 2) et on pose $u_n * = a2^n + b$. On détermine a et b en écrivant que $u_n *$ vérifie (1) :

an $2^n + b - 5(a(n-1)2^{n-1} + b) + 6(a(n-2)2^{n-2} + b) = 2^n + 1$, soit

$n2^{n-2}(4a - 10a + 6a) + 2^{n-2}(10a - 12a - 4) + (b - 5b + 6b - 1) = 0$

D'où $\begin{cases} -2\,a - 4 = 0 \\ 2\,b - 1 = 0 \end{cases}$ et $a = -2$ et $b = \frac{1}{2}$. Donc $u_n^* = -n2^{n+1} + \frac{1}{2}$ et $u_n = k_1 2^n + k_2 3^n - n2^{n+1} + \frac{1}{2}$.

Pour déterminer k_1 et k_2, on utilise les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

Soit $\begin{cases} 1 = k_1 + k_2 + \frac{1}{2} \\ 1 = 2k_1 + 3k_2 - 4 + \frac{1}{2} \end{cases}$. On obtient $k_1 = -3$ et $k_2 = \frac{7}{2}$ et $u_n = (-3)2^n + \left(\frac{7}{2}\right)3^n - n2^{n+1} + \frac{1}{2}$

Exercice 11

Consigne

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 0 \text{ } et \text{ } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 1 \end{cases}$.

Correction

Notons (1) l'équation $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 1$.

L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n = 0$ (2).

Equation caractéristique associée à (2) : $r^2 - 3r + 2 = 0$ (3).

(3) s'écrit $(r-1)(r-2)=0$ ($r=1$ est racine évidente). Les racines de (3) sont donc $r_1=1$ et $r_2=2$. D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme : $v_n=k_1+k_2 2^n$ et les solutions de (1) sont de la forme : $u_n=v_n+u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons $(u_n *)$:

On cherche $u_n *$ de la même forme que le second membre (+1). Mais ici il y a résonance ($r_1=1$ et le second membre est un polynôme) et on pose $u_n^*=$ an. On détermine a en écrivant que $u_n *$ vérifie (1): $a(n+2)=3a(n+1)-2an+1$, soit $n(a-3a+2a)+(2a-3a-1)=0$.

D'où $a=-1$, $u_n^*=-n$ et $u_n=k_1+k_2 2^n-n$.

Pour déterminer k_1 et k_2, on utilise les conditions initiales $u_0=0$ et $u_1=1$.

Soit $\begin{cases} 0=k_1+k_2 \\ 1=k_1+2k_2-1 \end{cases}$. On obtient $k_1=-2$ et $k_2=2$ et $u_n=-2+2^{n+1}-n$

Exercice 12

Consigne

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0=2 \ et \ u_1=-1 \\ u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n+2n+1 \end{cases}$.

Correction

Notons (1) l'équation $u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n+2n+1$.

L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+2}-4v_{n+1}+4v_n=0$ (2).

Equation caractéristique associée à (2) : $r^2-4r+4=0$ (3)

(3) s'écrit $(r-2)^2=0$. (3) a donc une racine double $r_0=2$. D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme : $v_n=k_1 2^n+k_2 n 2^n$ et les solutions de (1) sont de la forme $u_n=v_n+u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons $(u_n *)$:

On cherche u_n^* de la même forme que le second membre $(2n+1)$ et on pose $u_n^*=an+b$. On détermine a et b en écrivant que $u_n *$ vérifie (1) :

$a(n+2)+b=4(a(n+1)+b)-4(an+b)+2n+1$, soit

$n(a-4a+4a-2)+(2a+b-4a-4b+4b-1)=0$

D'où $\begin{cases} a-2=0 \\ -2a+b-1=0 \end{cases}$ et $a=2$ et $b=5$. Donc $u_n^*=2n+5$ et $u_n=k_1 2^n+k_2 n 2^n+2n+5$.

Pour déterminer k_1 et k_2, on utilise les conditions initiales $u_0=2$ et $u_1=-1$.

Soit $\begin{cases} 2=k_1+5 \\ -1=2k_1+2k_2+7 \end{cases}$. On obtient $k_1=-3$ et $k_2=-1$ et $u_n=(-3)2^n-n2^n+2n+5$

Exercice 13

Consigne

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0=1 \text{ et } u_1=-1 \\ 3u_{n+2}=-2u_{n+1}+5u_n+3 \end{cases}$.

Correction

Notons (1) l'équation $3u_{n+2}=-2u_{n+1}+5u_n+3$.

L'équation homogène associée à (1) est $3v_{n+2}+2v_{n+1}-5v_n=0$ (2).

Equation caractéristique associée à (2) : $3r^2+2r-5=0$ (3).

(3) s'écrit $(r-1)(3r+5)=0$($r=1$ est racine évidente). Les racines de (3) sont donc $r_1=1$ et $r_2=-\frac{5}{3}$. D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme : $v_n=k_1+k_2\left(-\frac{5}{3}\right)^n$et les solutions de (1) sont de la forme : $u_n=v_n+u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons $(u_n *)$:

On cherche u_n^* de la même forme que le second membre (+3). Mais ici il y a résonance ($r_1=1$ et le second membre est un polynôme) et on pose $u_n^*=an$. On détermine a en écrivant que $u_n *$ vérifie (1) : $3a(n+2)=-2a(n+1)+5an+3=0$, soit $n(3a+2a-5a)+(6a+2a-3)=0$. D'où $a=\frac{3}{8}$, $u_n *=\frac{3}{8}n$ et $u_n=k_1+k_2\left(-\frac{5}{3}\right)^n+\frac{3}{8}n$.

Pour déterminer k_1 et k_2, on utilise les conditions initiales $u_0=1$ et $u_1=-1$.

Soit $\begin{cases} 1=k_1+k_2 \\ -1=k_1-\frac{5}{3}k_2+\frac{3}{8} \end{cases}$. On obtient $k_1=\frac{7}{64}$ et $k_2=\frac{57}{64}$ et $u_n=\frac{7}{64}+\frac{57}{64}\left(-\frac{5}{3}\right)^n+\frac{3}{8}n$

Exercice 14

Consigne

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 0 \; et \; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 2^n \end{cases}$.

Correction

Notons (1) l'équation $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 2^n$.

L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+2} - 4v_{n+1} + 4v_n = 0$ (2)

Equation caractéristique associée à (2) : $r^2 - 4r + 4 = 0$ (3)

(3) s'écrit $(r-2)^2 = 0$. (3) a donc une racine double $r_0 = 2$. D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme : $v_n = k_1 2^n + k_2 n 2^n$ et les solutions de (1) sont de la forme $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons $(u_n *)$:

On cherche $u_n *$ de la même forme que le second membre (2^n). Mais ici il y a résonance ($r_0 = 2$ est la racine double et le second membre est une puissance de 2) et on pose $u_n *= an^2 2^n$. On détermine a en écrivant que u_n^* vérifie (1) :

$a(n+2)^2 2^{n+2} = 4a(n+1)^2 2^{n+1} - 4a^2 2^n + 2^n$, soit

$n^2 2^n (4a - 8a + 4a) + 2^n(16a - 16a) + 2^n(16a - 8a - 1) = 0$.

D'où $a = \frac{1}{8}$ et $u_n^* = \frac{1}{8} n^2 2^n$

Donc $u_n = k_1 2^n + k_2 n 2^n + \frac{1}{8} n^2 2^n$.

Pour déterminer k_1 et k_2, on utilise les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Soit $\begin{cases} 0 = k_1 \\ 1 = 2k_1 + 2k_2 + \frac{1}{4} \end{cases}$. On obtient $k_1 = 0$ et $k_2 = \frac{3}{8}$ et

$$u_n = \frac{3}{8} n 2^n + \frac{1}{8} n^2 2^n = 3n 2^{n-3} + n^2 2^{n-3} = (n^2 + 3n) 2^{n-3} .$$

Exercice 15

Consigne

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \; et \; u_1 = 27 \\ u_n - 9u_{n-1} + 20u_{n-2} = 5^n + 12 \end{cases}$.

Correction

Notons (1) l'équation $u_n - 9u_{n-1} + 20u_{n-2} = 5^n + 12$.

L'équation homogène associée à (1) est $v_{n+2} - 9v_{n+1} + 20v_n = 0$ (2).

Equation caractéristique associée à (2) : $r^2 - 9r + 20 = 0$ (3).

(3) s'écrit $(r-4)(r-5) = 0$. Les racines de (3) sont donc $r_1 = 4$ et $r_2 = 5$. D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme : $v_n = k_1 4^n + k_2 5^n$ et les solutions de (1) sont de la forme $u_n = v_n + u_n^*$, où (u_n^*) est une solution particulière de (1).

Déterminons $(u_n *)$:

On cherche $u_n *$ de la même forme que le second membre $(5^n + 12)$. Mais ici il y a résonance ($r_2 = 5$ et le second membre contient une puissance de 5) et on pose $u_n^* = an5^n + b$ On détermine a et b en écrivant que $u_n *$ vérifie (1) :

an $5^n + b - 9(a(n-1)5^{n-1} + b) + 20(a(n-2)5^{n-2} + b) = 5^n + 12$, soit

$n5^{n-2}(25a - 45a + 20a) + 5^{n-2}(45a - 40a - 25) + (b - 9b + 20b - 12) = 0$.

D'où $\begin{cases} 5a - 25 = 0 \\ 12b - 12 = 0 \end{cases}$ et $a = 5$ et $b = 1$. Donc $u_n^* = n5^{n+1} + 1$ et $u_n = k_1 4^n + k_2 5^n + n5^{n+1} + 1$.

Pour déterminer k_1 et k_2, on utilise les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 27$.

Soit $\begin{cases} 1 = k_1 + k_2 + 1 \\ 27 = 4k_1 + 5k_2 + 25 + 1 \end{cases}$. On obtient $k_1 = -1$ et $k_2 = 1$ et $u_n = -4^n + 5^n + n5^{n+1} + 1$

Exercice 16

Consigne

Déterminer (u_n) telle que $u_{n+2} + 4u_{n+1} + 3u_n = a^n + 8$, suivant les valeurs du paramètre a.

Correction

Notons (1) l'équation $\mathrm{u_{n+2} + 4u_{n+1} + 3u_n = a^n + 8}$.

L'équation homogène associée à (1) est $\mathrm{v_{n+2} + 4v_{n+1} + 3v_n = 0}$ (2).

Equation caractéristique associée à (2) : $r^2 + 4r + 3 = 0$ (3).

(3) s'écrit $(r + 1)(r + 3) = 0$ ($r = -1$ est racine évidente). Les racines de (3) sont donc $r_1 = -1$ et $r_2 = -3$. D'après le cours les solutions de (2) sont de la forme : $\mathrm{v_n = k_1(-1)^n + k_2(-3)^n}$ et les solutions de (1) sont de la forme : $\mathrm{u_n = v_n + u_n^*}$, où $(\mathrm{u_n^*})$ est une solution particulière de (1).

Déterminons $(\mathrm{u_n} *)$:

On cherche $\mathrm{u_n^*}$ de la même forme que le second membre $(\mathrm{a^n + 8})$. Mais ici, suivant les valeurs de a, il y a ou non résonance.

Si $a \neq -1$ et $a \neq --3$, il n'y a pas résonance et on peut poser $\mathrm{u_n^* = c_1a^n + c_2}$. On détermine c_1 et c_2 en écrivant que $\mathrm{u_n} *$ vérifie (1):

$\mathrm{c_1a^{n+2} + c_2 + 4(c_1a^{n+1} + c_2) + 3(c_1a^n + c_2) = a^n + 8}$, soit

$\mathrm{a^n(c_1a^2 + 4c_1a + 3c_1 - 1) + (c_2 + 4c_2 + 3c_2 - 8) = 0}$.

D'où $\begin{cases} c_1a^2 + 4c_1a + 3c_1 - 1 \\ 8c_2 - 8 = 0 \end{cases}$ et $c_1 = \frac{1}{a^2+4a+3}$ et $c_2 = 1$ (remarquons que $a^2 + 4a + 3$ est non nul car $\mathrm{a \neq -1}$ et $\mathrm{a \neq -3}$). Donc $\mathrm{u_n^* = \frac{a^n}{a^2+4a+3} + 1}$ et $\mathrm{u_n = k_1(-1)^n + k_2(-3)^n + \frac{a^n}{a^2+4a+3} + 1}$

On ne peut pas calculer $\mathrm{k_1}$ et $\mathrm{k_2}$ par manque de conditions initiales.

Si $a = -1$, il y a résonance et $\mathrm{u_n} *$ est de la forme $un *= \mathrm{c1n - 1n + c2}$. On détermine $\mathrm{c_1}$ et $\mathrm{c_2}$ en écrivant que $u_n *$ vérifie (1) :

$\mathrm{c\,1(n + 2)(-1)^{n+2} + c_2 + 4(c_1(n + 1)(-1)^{n+1} + c_2) + 3(c_1n(-1)^n + c_2) = (-1)^n + 8}$, soit

$\mathrm{n(-1)^n(c_1 - 4c_1 + 3c_1) + (-1)^n(2c_1 - 4c_1 - 1) + (c_2 + 4c_2 + 3c_2 - 8) = 0}$.

D'où $\begin{cases} -2c_1 - 1 \\ 8c_2 - 8 = 0 \end{cases}$ et $c_1 = -\frac{1}{2}$ et $c_2 = 1$. Donc $u_n^* = \frac{1}{2}n(-1)^{n+1} + 1$ et

$$u_n = k_1(-1)^n + k_2(-3)^n + \frac{1}{2}n(-1)^{n+1} + 1$$

On ne peut pas calculer k_1 et k_2 par manque de conditions initiales.

Si $a = -3$, il y a résonance et $u_n *$ est de la forme $u_n *= c_1 n(-3)^n + c_2$. On détermine c_1 et c_2 en écrivant que $u_n *$ vérifie (1) :

$c_1(n+2)(-3)^{n+2} + c_2 + 4(c_1(n+1)(-3)^{n+1} + c_2) + 3(c_1 n(-3)^n + c_2) = (-3)^n + 8$, soit

$n(-3)^n(9c_1 - 12c_1 + 3c_1) + (-3)^n(18c_1 - 12c_1 - 1) + (c_2 + 4c_2 + 3c_2 - 8) = 0.$

D'où $\begin{cases} 6c_1 - 1 = 0 \\ 8c_2 - 8 = 0 \end{cases}$ et $c_1 = \frac{1}{6}$ et $c_2 = 1$. Donc $u_n *= \frac{1}{6}n(-3)^{n+1} + 1$ et

$$u_n = k_1(-1)^n + k_2(-3)^n + \frac{1}{6}n(-3)^{n+1} + 1$$

On ne peut pas calculer k_1 et k_2 par manque de conditions initiales.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 2, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).