

# Suites récurrentes

---

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

---

## Table des matières

<b>Introduction</b> .....	<b>2</b>
<b>Les suites récurrentes linéaires du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constants</b> .....	<b>3</b>
Définitions .....	3
Recherche de solution particulière de (1).....	3
<b>Suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants</b> .....	<b>4</b>
Définitions .....	4
Solution générale de l'équation homogène (2).....	4
Recherche de solution particulière de (1).....	5
<b>Références</b> .....	<b>6</b>

## Introduction

**Objectif de la leçon** : Reconnaître et déterminer des suites récurrentes d'ordre 1 et 2, avec un second membre simple.

Cette leçon est courte et s'inscrit dans la continuité de la leçon 1 sur les suites mais elle ne nécessite aucun autre prérequis. Elle n'en est pas moins importante et très utile en économie car beaucoup de situations économiques se traduisent mathématiquement par de telles suites lorsque le temps est envisagé de façon séquentielle.

# Les suites récurrentes linéaires du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constants

## Définitions

Ce sont les suites  $u$  définies par  $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = au_n + g(n), a \in \mathbf{R}^* \end{cases} \quad (1)$

L'équation homogène associée à (1) est :  $v_{n+1} = av_n$  (2).

**Théorème** : Si  $u^*$  est une solution particulière de (1) et si  $v$  est la solution générale de (2) (équation homogène associée à (1)), la solution générale de (1) est

$$u = u^* + v$$

**Démonstration** : Soit  $u^*$  une solution particulière de (1) :  $u_{n+1}^* = au_n^* + g(n)$

$u$  est une solution quelconque de (1) si et seulement si  $u_{n+1} = au_n + g(n)$

Soit :  $u_{n+1} - u_{n+1}^* = a(u_n - u_n^*)$  et  $u - u^*$  est solution de (2).

Or les solutions de (2) sont de la forme :  $v_n = v_0 a^n$

$$\text{Donc } u_n = u_n^* + v_0 a^n \quad v_0 \in \mathbf{R} \quad (\text{remarque : } u_0 = u_0^* + v_0)$$

## Recherche de solution particulière de (1)

\* **Cas où  $g(n) = P(n)$**  avec  $P$  est un polynôme de degré  $k$ .

Si  $a \neq 1$  alors une solution particulière est un polynôme  $Q(n)$  de degré  $k$ .

Si  $a = 1$ , une solution particulière est de la forme  $Q(n)$ , où  $Q$  est un polynôme de degré  $k$  (on dit qu'il y a **résonance**).

**N.B.** :  $g(n) = b$  (cte) est un cas particulier de celui-ci, il correspond à  $k = 0$ .

\* **Cas où  $g(n) = Ct^n$**  ( $C$  et  $t$  constantes réelles données)

Si  $t \neq a$  une solution particulière est sous la forme :  $u_n^* = Kt^n$  ( $K$  constante à déterminer)

Si  $t = a$  une solution particulière est sous la forme  $u_n^* = Kna^n$  (phénomène de résonance)

**Remarque** : on peut remplacer  $C$  par un polynôme de degré  $k$ ,  $K$  est alors remplacé par un polynôme quelconque de degré  $k$ .

\*Si  $u_n^*$  est solution particulière de  $u_{n+1} = au_n + g_1(n)$  et si  $w_n^*$  est une solution particulière de  $u_{n+1} = au_n + g_2(n)$  alors  $u_n^* + w_n^*$  est une solution particulière de  $u_{n+1} = au_n + g_1(n) + g_2(n)$ .

Exemples :

Equation	Solution de l'équation homogène associée	Forme de la solution particulière
$u_{n+1} = 2u_n + 3 \cdot 5^n$	$v_n = v_0 \cdot 2^n$	$u_n^* = C \cdot 5^n$
$u_{n+1} = 2u_n + n^2 - n$	$v_n = v_0 \cdot 2^n$	$u_n^* = an^2 + bn + c$
$u_{n+1} = 2u_n + 3 \cdot 2^n$	$v_n = v_0 \cdot 2^n$	$u_n^* = Cn \cdot 2^n$
$u_{n+1} = u_n + n^2 - n$	$v_n = v_0$	$u_n^* = n(an^2 + bn + c)$

Il y a résonance pour les deux dernières équations.

## Suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants

### Définitions

Ces suites sont définies par  $u_0$  et  $u_1$  et une relation de la forme :

$$\begin{cases} u_0, u_1 \\ u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = g(n), b \in \mathbf{R}^*, c \in \mathbf{R}^* \end{cases} \quad (1)$$

L'équation homogène associée à (1) est :  $v_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n = 0$  (2)

**Théorème** : Si  $u^*$  est une solution particulière de (1) et si  $v$  est la solution générale de (2), la solution générale de (1) est :  $u = u^* + v$ .

Même démonstration que pour les suites récurrentes linéaires du 1<sup>er</sup> ordre.

### Solution générale de l'équation homogène (2)

L'équation caractéristique de (2) est :  $r^2 + br + c = 0$  (3).

Si  $\Delta > 0$  (3) a deux solutions distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , et

$$v_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n \text{ est la solution générale de (2).}$$

(  $\lambda$  et  $\mu$  sont des réels dépendant des conditions initiales  $u_0$  et  $u_1$  )

Si  $\Delta = 0$  (3) a une solution double  $r_0$ , et

$$v_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n \text{ est la solution générale de (2).}$$

(  $\lambda$  et  $\mu$  sont des réels dépendant des conditions initiales  $u_0$  et  $u_1$  )

Le cas  $\Delta < 0$  n'est pas étudié dans le cadre de ce cours et sera traité dans le cours de L3 après l'introduction des nombres complexes.

## Recherche de solution particulière de (1)

\*Cas où  $g(n) = P(n)$  avec P est un polynôme de degré k.

Si 1 n'est pas racine de (3), on cherche une solution particulière  $u^*$  de (1) sous la forme d'un polynôme Q de degré k:  $u_n^* = Q(n)$ .

Si 1 est racine simple de (3),  $u^*$  est de la forme :  $u_n^* = nQ(n)$  (résonance).

Si 1 est racine double de (3),  $u^*$  est de la forme :  $u_n^* = n^2Q(n)$  (double résonance).

\* Cas où  $g(n) = Ct^n$  (C et t sont des réels non nuls donnés).

Si t n'est pas racine de (3), une solution particulière  $u^*$  de (1) est de la forme  $u_n^* = kt^n$  (k constante réelle à déterminer).

Si t est racine simple de (3), une solution particulière  $u^*$  de (1) est de la forme  $u_n^* = knt^n$  (résonance). k constante réelle à déterminer.

Si t est racine double de (3), une solution particulière  $u^*$  de (1) est de la forme  $u_n^* = kn^2t^n$  (double résonance). k constante réelle à déterminer.

\*Si  $u_n^*$  est solution particulière de  $u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = g_1(n)$  et si  $w_n^*$  est une solution particulière de  $u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = g_2(n)$  alors  $u_n^* + w_n^*$  est une solution particulière de  $u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = g_1(n) + g_2(n)$ .

Exemples :

Équation	Racines de l'équation caractéristique	Solution de l'équation homogène	Forme de la solution particulière
$u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 3.5^n$	2 et 3	$v_0 = \lambda 2^n + \mu 3^n$	$u_n^* = C.5^n$
$u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = n^2 - n$	2 et 3	$v_0 = \lambda 2^n + \mu 3^n$	$u_n^* = an^2 + bn + c$
$u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 3.5^n$	2, racine double	$v_0 = \lambda 2^n + \mu n 2^n$	$u_n^* = C.5^n$
$u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 3.2^n$	2 et 3	$v_0 = \lambda 2^n + \mu 3^n$	$u_n^* = Cn.2^n$
$u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = n^2 - n$	1 et 2	$v_0 = \lambda + \mu 2^n$	$u_n^* = n(an^2 + bn + c)$
$u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 3.2^n$	2, racine double	$v_0 = \lambda 2^n + \mu n 2^n$	$u_n^* = Cn^2.2^n$
$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = n^2 - n$	1, racine double	$v_0 = \lambda + \mu n$	$u_n^* = n^2(an^2 + bn + c)$

## Références

### Comment citer ce cours ?

Mathématiques 2, Odile Brandière, AUNEGe (<http://auneg.fr>), CC – BY NC ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).



Cette œuvre est mise à disposition dans le respect de la législation française protégeant le droit d'auteur, selon les termes du contrat de licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>). En cas de conflit entre la législation française et les termes de ce contrat de licence, la clause non conforme à la législation française est réputée non écrite. Si la clause constitue un élément déterminant de l'engagement des parties ou de l'une d'elles, sa nullité emporte celle du contrat de licence tout entier.