Matrices 2

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices

Exercice 1

Consigne

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont inversibles :

A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ D=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Consigne

Soit A=$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 = 0$ et en déduire A^{-1}.

Exercice 3

Consigne

Résoudre $\begin{cases} 8x + 5y = a \\ 5x + 3y = b \end{cases}$, en déduire l'inverse de $B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Résoudre enfin $BX = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Consigne

1) Soient dans la base canonique b de R^3, les vecteurs v de matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, w de matrice Y=$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, et l'application linéaire f de matrice A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les trois les vecteurs v_1 de matrice $\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, v_2 de matrice $\mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et v_3 de matrice $\mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\{\mathrm{v}_1; \mathrm{v}_2; \mathrm{v}_3\}$ forment une base b' de R^3 et écrire les matrices de v et w dans b'. Donner la matrice de f dans b'.

2) Soit g l'application linéaire qui a pour matrice A dans b', donner la matrice de g dans b.

Exercice 5

Consigne

On considère la matrice M=$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où A=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, D=$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et M1=$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Indiquer toutes les façons de choisir la division de M_1 en quatre blocs pour effectuer, par blocs, le produit M. M_1 avec les blocs A,B,C et D.

2) Parmi les résultats de la question précédente, retenir celui où A_1 est une matrice colonne et effectuer le produit M. M_1.

Exercice 6

Consigne

Inverser par blocs, la matrice : A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, en utilisant $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$=$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$=$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 7

Consigne

Soit J=$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & J_k \end{pmatrix}$avec $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$.

En remarquant que $\mathrm{J_i} = \lambda_i \mathrm{I} + \mathrm{N}$ et en calculant $\mathrm{N}^2, \mathrm{N}^3$, et en remarquant $\lambda_i \mathrm{I}$ et N commutent que calculer J_i^n, puis J^n. On pourra utiliser l'exercice 10 de la leçon 4.

Exercice 8

Consigne

Déterminer les valeurs propres puis les vecteurs propres de A dans les cas suivants. Puis diagonaliser A et expliquer le calcul de A^n (le calcul de l'inverse des matrices de passage n'est pas demandé) :

1) A=$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ 2) A=$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Consigne

On considère l'application linéaire f de IR^3 dans IR^3 définie par

$f(x,y,z) = (x + ky, y + tz, x + y + z)$, où k et t sont des paramètres réels.

1) Ecrire les matrices de f dans la base canonique, puis dans la base $b = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$.

2) Etudier le rang de ces matrices suivant les valeurs de k et t.

3) On choisit $k = 0$ et $t = 1$. Déterminer kerf et en donner une base. f est-elle diagonalisable? Si oui préciser la base dans laquelle f est représentée par une matrice diagonale et préciser cette matrice.

Exercice 10

Consigne

1) Soit P=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

2) Soit J=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de J. **Montrer** que J est diagonalisable. Montrer que $J = PDP^{-1}$, avec D diagonale que l'on explicitera.

3) Expliquer comment on peut calculer J^n (justifier les formules utilisées et ne pas faire le calcul explicite des produits matriciels).

4) Soient les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) vérifiant les relations de récurrence :

$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \end{cases}$. Expliquer le calcul de $(u_n), (v_n)$ et (w_n) en fonction de u_0, v_0 et w_0. Etudier la convergence de ces suites.

Exercice 11

Consigne

Soit A=$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ et soit f l'application linéaire de R^3 dans R^3 ayant A pour matrice représentative dans la base canonique b.

1) Calculer f(x,y,z) pour (x,y,z) ∈ IR^3. f est-elle bijective ?

2) Chercher les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.

3) A est-elle diagonalisable ? (Justifier). Si oui donner une matrice diagonale D (on ordonnera les valeurs propres par ordre croissant, de gauche à droite) semblable à A et la matrice de passage P correspondante telle que $P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la relation qui lie A, D et P ?

4) Calculer A^n.

5) Soient les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) vérifiant les relations de récurrence : $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n \\ v_{n+1} = 5v_n - 6w_n \\ w_{n+1} = 3v_n - 4w_n \\ u_0 = v_0 = 1 \text{ et } w_0 = -1 \end{cases}$

Pour $n \in N$, calculer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 12

Consigne

Soit J=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $J^2 = 2I + J$, où I désigne la matrice identité d'ordre 3. En déduire J^{-1}

2) Déterminer les valeurs propres de J. Montrer que J est diagonalisable.

Déterminer la matrice de passage P de première ligne $(1 \quad 0 \quad 1)$ et telle que $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et vérifiant $J = PDP^{-1}$, avec D diagonale (on ordonnera les valeurs propres par ordre croissant).

3) Calculer J^n (justifier les formules utilisées).

4) Soient les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) vérifiant les relations de récurrence :

$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n) \end{cases}$. Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de u_0, v_0 et w_0.

Exercice 13

Consigne

On considère IR^3 muni de la base canonique b.

1) Montrer que si $b' = \{(1,1,0); (1,0,-1); (1,1,1)\}$, b' est aussi une base de IR^3.

2) Un vecteur V de IR^3 a pour coordonnées X=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans b et X'=$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans b'. Donner la matrice P de passage de b à b' et la matrice P^{-1} de passage de b' à b. En déduire X en fonction de x', y' et z' et X' en fonction de x,y et z.

3) Soit f l'application linéaire de IR^3 dans IR^3 définie par :

$f(x, y, z) = (4x - 5y + 4z, 4x - 5y + 4z, 3x - 3y + 3z)$. Déterminer la matrice de f dans b et puis la matrice de f dans b'.

Déterminer alors Imf et kerf ainsi que les vecteurs propres et les valeurs propres de f.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 2, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).