Matrices 2

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices corrigés

Attention : ceci est la version corrigée des exercices.

Exercice 1

Consigne

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont inversibles :

A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ D=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Correction

détA= $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$ A est donc inversible

détB= $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$=0. Donc B n'est pas inversible

détC=$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$ Donc C n'est pas inversible

détD=$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$ Donc D est inversible

Exercice 2

Consigne

Soit A=$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 = 0$ et en déduire A^{-1}.

Correction

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 12 & -6 \\ -6 & 13 & -6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix},$$

$\mathrm{A}^3 = \mathrm{A}^2\mathrm{A}=\begin{pmatrix} -5 & 12 & -6 \\ -6 & 13 & -6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 30 & -18 \\ -14 & 31 & -18 \\ -7 & 16 & -10 \end{pmatrix}$ et on vérifie que $A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 =$ $\begin{pmatrix} -13 & 30 & -18 \\ -14 & 31 & -18 \\ -7 & 16 & -10 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -5 & 12 & -6 \\ -6 & 13 & -6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On déduit que $\mathrm{A}(\mathrm{A}^2 - 2\mathrm{A} - \mathrm{I}_3) = -2\mathrm{I}_3$ et $\mathrm{A}\left[-\frac{1}{2}(\mathrm{A}^2 - 2\mathrm{A} - \mathrm{I}_3)\right] = \mathrm{I}_3$.

D'où $A^{-1} = -\frac{1}{2}(A^2 - 2A - I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1/2 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Consigne

Résoudre $\begin{cases} 8x + 5y = a \\ 5x + 3y = b \end{cases}$, en déduire l'inverse de $B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Résoudre enfin $BX = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Correction

S$\begin{cases} 8x + 5y = a \\ 5x + 3y = b \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 40x + 25y = 5a \\ 40x + 24y = 8b \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = 5a - 8b \\ x = \frac{1}{5}(b - 3y) \end{cases}$ ou S'$\begin{cases} x = -3a + 5b \\ y = 5a - 8b \end{cases}$.

Or matriciellement S s'écrit $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, ce qui équivaut à $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Et S' donne $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$

BX=$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ équivaut à X=$B^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ (en multipliant à gauche chaque membre de l'équation par B^{-1}).

D'où X =$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -16 \\ 23 & 26 \end{pmatrix}$

Exercice 4

Consigne

1) Soient dans la base canonique b de R^3, les vecteurs v de matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, w de matrice Y=$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, et l'application linéaire f de matrice A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les trois les vecteurs v_1 de matrice $\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, v_2 de matrice $\mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et v_3 de matrice $\mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\{\mathrm{v}_1; \mathrm{v}_2; \mathrm{v}_3\}$ forment une base b' de R^3 et écrire les matrices de v et w dans b'. Donner la matrice de f dans b'.

2) Soit g l'application linéaire qui a pour matrice A dans b', donner la matrice de g dans b.

Correction

1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, les trois vecteurs de IR^3 v_1, v_2 et v_3 sont donc libres et forment une base de IR^3.

Si $v = (x_1, x_2, x_3) = \mathrm{a}\mathrm{v}_1 + b v_2 + \mathrm{c}\mathrm{v}_3$,v a pour matrice $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base b'.

Or $(x_1, x_2, x_3) = a_1 + b_2 + \mathrm{c}\mathrm{v}_3$ équivaut $\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = 2b + c \\ x_3 = a + c \end{cases}$. d'où $\begin{cases} a = x_1 \\ b = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3) \\ c = -x_1 + x_3 \end{cases}$. D'où les coordonnées de v dans b' : $X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3) \\ -x_1 + x_3 \end{pmatrix}$ (1)

Par un calcul analogue, w a pour matrice Y'=$\begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3) \\ -y_1 + y_3 \end{pmatrix}$ dans $\boldsymbol{b'}$.

Si P est la matrice de passage de b vers b', d'après le cours, les colonnes de P sont les coordonnées des vecteurs de b' dans b, donc P=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'autre part $\mathrm{X} = \mathrm{PX}'$ et $\mathrm{X}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}, \mathrm{P}^{-1}$

est la matrice de passage de b' vers b. Et d'après le calcul précédent, (1) donne P^{-1} $=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Toujours d'après le cours si B est la matrice de f dans b',

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Si C est la matrice de g dans b : $\mathrm{C} = \mathrm{PAP}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Consigne

On considère la matrice M$=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où A$=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, C$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, D$=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M}_1=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Indiquer toutes les façons de choisir la division de M_1 en quatre blocs pour effectuer, par blocs, le produit $\mathrm{M}.\,\mathrm{M}_1$ avec les blocs A,B,C et D.

2) Parmi les résultats de la question précédente, retenir celui où A_1 est une matrice colonne et effectuer le produit $\mathrm{M}.\,\mathrm{M}_1$.

Correction

1) Pour faire le produit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$, il faut faire les produits $AA_1, BC_1, C_1, D_1, AB_1$, BD_1,CB_1 et DD_1.

On doit donc avoir :

nombre de colonnes de A = nombre de lignes de $\mathrm{A}_1 = 3$,

nombre de colonnes de B = nombre de lignes de $\mathrm{C}_1 = 1$,

nombre de colonnes de C = nombre de lignes de $\mathrm{A}_1 = 3$,

nombre de colonnes de D = nombre de lignes de $\mathrm{C}_1 = 1$,

nombre de colonnes de A = nombre de lignes de $\mathrm{B}_1 = 3$, nombre de colonnes de B = nombre de lignes de $\mathrm{D}_1 = 1$,

nombre de colonnes de C = nombre de lignes de $\mathrm{B}_1 = 3$,

nombre de colonnes de D = nombre de lignes de $\mathrm{D}_1 = 1$.

Ce sont les seuls impératifs. Les nombre de colonnes de $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1$ et D_1 sont au choix, mais A_1 et C_1, ainsi que B_1 et D_1, ont le même nombre de colonnes.

1er choix : $\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{C}_1 = (-1)$, $\mathrm{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2ème choix : $\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{C}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

3ème choix : $\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{C}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D}_1 = (1)$

2) Cela correspond au 3eme choix de la question 1) : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA_1 + BC_1 & AB_1 + BD_1 \\ CA_1 + DC_1 & CB_1 + DD_1 \end{pmatrix}$

$AA_1 + BC_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $AB_1 + BD_1 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $CA_1 + DC_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $CB_1 + DD_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 11 & 9 \end{pmatrix}$ d'où

$\mathrm{M}.\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 4 \\ 5 & -5 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 11 & 9 \end{pmatrix}$

Exercice 6

Consigne

Inverser par blocs, la matrice : A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, en utilisant $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

Correction

A=$\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$ avec B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, D=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et E=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

On est alors amené à chercher 4 matrices (2,2) X,Y,Z et T telles que $\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$, (0 désigne la matrice nulle carrée d'ordre 2).

On a alors à résoudre le système $\begin{cases} BX + CZ = I_2(1) \\ BY + CT = 0(2) \\ DX + EZ = 0(3) \\ DY + ET = I_2(4) \end{cases}$.

(1) équivaut à $\mathrm{BX} = \mathrm{I}_2 - \mathrm{CZ} = \mathrm{I}_2$, et $X = B^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ d'après l'énoncé.

(2) équivaut à $\mathrm{BY} = -\mathrm{CT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $\mathrm{Y} = \mathrm{B}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) équivaut à $E\,Z = -D\,X$ et $Z = -E^{-1}DX$. D'où $Z = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix}$.

(4) équivaut à $\mathrm{ET} = \mathrm{I}_2 - \mathrm{DY} == \mathrm{I}_2$. D'où $\mathrm{T} = \mathrm{E}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

D'où $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -2 & -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Exercice 7

Consigne

Soit J=$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & J_k \end{pmatrix}$ avec $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$.

En remarquant que $\mathrm{J_i} = \lambda_i\mathrm{I} + \mathrm{N}$ et en calculant $\mathrm{N}^2, \mathrm{N}^3$, et en remarquant $\lambda_i\mathrm{I}$ et N commutent que calculer J_i^n, puis J^n. On pourra utiliser l'exercice 10 de la leçon 4.

Correction

N=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, N^2=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et N^3=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$=0.

$\mathrm{J_i} = \lambda_i\mathrm{I} + \mathrm{N}$ et $\lambda_i\mathrm{I}$ et N commutent, on peut donc appliquer la formule du Binôme de Newton (c.f. la correction de l'exercice 10 de la leçon 4) et $J_i^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k (\lambda_i I_3)^{n-k}$, $\mathrm{J}_i^n = (\lambda_i\mathrm{I}_3)^n + n\mathrm{N}(\lambda_i\mathrm{I}_3)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\mathrm{N}^2(\lambda_i\mathrm{I}_3)^{n-2}$. En effet la formule s'arrête à ce terme car toutes les puissances de N supérieures ou égales à 3 sont nulles.

$$J_i{}^n = \begin{pmatrix} (\lambda_i)^n & 1 & 0 \\ 0 & (\lambda_i)^n & 1 \\ 0 & 0 & (\lambda_i)^n \end{pmatrix} + n(\lambda_i)^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}(\lambda_i)^{n-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$J_i{}^n = \begin{pmatrix} (\lambda_i)^n & \mathrm{n}(\lambda_i)^{\mathrm{n}-1} & \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)}{2}(\lambda_i)^{\mathrm{n}-2} \\ 0 & (\lambda_i)^n & \mathrm{n}(\lambda_i)^{\mathrm{n}-1} \\ 0 & 0 & (\lambda_i)^n \end{pmatrix}. \text{ Et } J^n = \begin{pmatrix} J_1{}^n & 0 & . & . & 0 \\ 0 & J_2{}^n & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & J_k{}^n \end{pmatrix}$$

Exercice 8

Consigne

Déterminer les valeurs propres puis les vecteurs propres de A dans les cas suivants. Puis diagonaliser A et expliquer le calcul de A^n (le calcul de l'inverse des matrices de passage n'est pas demandé) :

1) A=$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ 2) A=$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction

1) $P_A(\lambda) = d\acute{e}t(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = (\lambda+1)(\lambda-9)$. D'après le cours, les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(\lambda)$; A a donc deux valeurs propres distinctes (A est donc diagonalisable), $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 9$.

$V_1 = \binom{x}{y}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 si et seulement si $\begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ V_1 \neq 0 \end{cases}$ (0 désigne la matrice colonne nulle), soit $\begin{cases} 3x - 4y = -x \\ -6x + 5y = -y \\ V_1 \neq 0 \end{cases}$ soit $x = y \neq 0$. $V_1 = \binom{1}{1}$ convient. $V_2 = \binom{x}{y}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_2 si et seulement si $\begin{cases} AV_2 = \lambda_2 V_2 \\ V_2 \neq 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} 3x - 4y = 9x \\ -6x + 5y = 9y \\ V_2 \neq 0 \end{cases}$, soit $3x + 2y = 0$ et $V_2 \neq 0$. $V_2 = \binom{-2}{3}$ convient.

Si P=$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,D=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$,$A = PDP^{-1}$.

$A^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots\dots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$ et D^n=$\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 9^n \end{pmatrix}$.

2) $P_A(\lambda) = d\acute{e}t(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 10 & 5 \\ -1 & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-1)$. D'après le cours, les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(\lambda)$; A a donc trois valeurs propres distinctes (A est donc diagonalisable), $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$.

$V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 si et seulement si $\begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ V_1 \neq 0 \end{cases}$ (on note 0 la matrice colonne nulle), soit $\begin{cases} 10y + 5z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ V_1 \neq 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x = -8y \\ z = -2y \\ V_1 \neq 0 \end{cases}$, $V_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ convient.

Remarque utile : Un vecteur propre associé à la valeur propre 0 est toujours un vecteur du noyau de l'application linéaire de matrice A dans une base quelconque et réciproquement.

$V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_2 si et seulement si $\begin{cases} AV_2 = \lambda_2 V_2 \\ V_2 \neq 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} 10y + 5z = 2x \\ -x + 2y + 5z = y \\ 2y + z = z \\ V_2 \neq 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x = 5z \\ y = 0 \\ V_2 \neq 0 \end{cases}$, $V_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

$V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_3 si et seulement si $\begin{cases} AV_3 = \lambda_3 V_3 \\ V_3 \neq 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} 10y + 5z = 2x \\ -x + 2y + 5z = 2y \\ 2y + z = 2z \\ V_2 \neq 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x = 5z \\ y = \frac{1}{2} z \\ V_3 \neq 0 \end{cases}$, $V_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ convient.

Si $P = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 10 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A = PDP^{-1}$.

$A^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \ldots \ldots PDP^{-1} = PD^nP^{-1} et D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Consigne

On considère l'application linéaire f de IR^3 dans IR^3 définie par

$f(x,y,z) = (x + ky, y + tz, x + y + z)$, où k et t sont des paramètres réels.

1) Ecrire les matrices de f dans la base canonique, puis dans la base $b = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$.

2) Etudier le rang de ces matrices suivant les valeurs de k et t.

3) On choisit $k = 0$ et $t = 1$. Déterminer kerf et en donner une base. f est-elle diagonalisable? Si oui préciser la base dans laquelle f est représentée par une matrice diagonale et préciser cette matrice.

Correction

1) Par définition, f a pour matrice A=$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Si B est la matrice de f dans $\boldsymbol{b}$, $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$, où P est la matrice de passage de la base canonique vers $\boldsymbol{b}$. Et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

P^{-1} a pour colonnes les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans $\boldsymbol{b}$. Si $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$, et $\mathrm{v_1} = (1,1,1), \mathrm{v_2} = (1,1,0)$ et $\mathrm{v_3} = (1,0,0)$, $(1,0,0) = \mathrm{av_1} + \mathrm{bv_2} + \mathrm{cv_3} = (\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c,a} + \mathrm{b,a})$, c'est à dire : $\begin{cases} 1 = a + b + c \\ 0 = a + b \\ 0 = a \end{cases}$. D'où a=0, b=0 et c=1. De même $(0,1,0) = \mathrm{dv_1} + \mathrm{ev_2} + \mathrm{fv_3} = (\mathrm{d} + \mathrm{e} + \mathrm{f,d} + \mathrm{e,d})$, c'est à dire : $\begin{cases} 0 = d + e + f \\ 1 = d + e \\ 0 = d \end{cases}$. D'où d=0, e=1 et f=-1. De même $(0,0,1) = \mathrm{gv_1} + \mathrm{hv_2} + \mathrm{iv_3} = (\mathrm{g} + \mathrm{h} + \mathrm{i,g} + \mathrm{h,g})$, c'est à dire : $\begin{cases} 0 = g + h + i \\ 0 = g + h \\ 1 = g \end{cases}$. D'où g=1, h=-1 et i=0

Donc $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et B=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ (t-2) & -1 & -1 \\ (k-t) & k & 1 \end{pmatrix}$

2) A et B sont de même rang puisqu'elles représentent la même application linéaire dans deux bases différentes.

détA=$\begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + \mathrm{kt} - \mathrm{t}$. Si $1 + \mathrm{kt} - \mathrm{t} \neq 0$, A et B sont de rang $3(= rang(\mathrm{f}))$.

Si $1 + \mathrm{kt} - \mathrm{t} = 0$, rangA ≤ 2. Or quelque soit la valeur de k, les deux premières colonnes de A ne sont pas proportionnelles. A est donc de rang 2 et $rang\mathrm{A} = rangB = rang(\mathrm{f}) = 2$.

3) A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et d'après le résultat précédent $rang(\mathrm{f}) = 2$ et dimkerf$= 1$ (théorème des dimensions). $v = (x, y, z)$ kerf si et seulement si $\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$ et $\mathrm{v} = (0,\mathrm{y}, -\mathrm{y}) = \mathrm{y}(0,1,-1)$.

Donc kerf $= \langle(0,1,-1)\rangle$. $\{(0,1,-1)\}$ est une base de kerf. D'après une remarque de la correction de l'exercice 8, $\lambda_1 = 0$ est une valeur propre de f et $\mathrm{V_1} = (0,1,-1)$ est un vecteur propre de f associé à cette valeur propre. Cherchons les autres valeurs propres de f : $\mathrm{P_A}(\lambda) = d\acute{e}t(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I_3}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-1)$. D'après le cours, les valeurs propres de

A sont les racines de $P_A(\lambda)$; A a donc trois valeurs propres distinctes, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$. A a trois valeurs propres distinctes donc A (ou f) est diagonalisable.

$V_2 = (x,y,z)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_2 si et seulement si $\begin{cases} f(V_2) = \lambda_2 V_2 \\ V_2 \neq 0 \end{cases}$

(on note 0 le vecteur nul (0,0,0)) soit $\begin{cases} x = x \\ y + z = y \\ x + y + z = z \\ V_2 \neq 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} z = 0 \\ y = -x \\ V_2 \neq 0 \end{cases}$, $V_2 = (1,-1,0)$ convient.

$V_3 = (x,y,z)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_3 si et seulement si $\begin{cases} f(V_3) = \lambda_3 V_3 \\ V_3 \neq 0 \end{cases}$

(on note 0 le vecteur nul (0,0,0)) soit $\begin{cases} x = 2x \\ y + z = 2y \\ x + y + z = 2z \\ V_3 \neq 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ V_3 \neq 0 \end{cases}$, $V_3 = (0,1,1)$ convient.

Si P=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, D=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A = PDP^{-1}$. D est la matrice de f dans la base $\{V_1, V_2, V_3\}$.

Exercice 10

Consigne

1) Soit P=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

2) Soit J=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de J. **Montrer** que J est diagonalisable. Montrer que $J = PDP^{-1}$, avec D diagonale que l'on explicitera.

3) Expliquer comment on peut calculer J^n (justifier les formules utilisées et ne pas faire le calcul explicite des produits matriciels).

4) Soient les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) vérifiant les relations de récurrence :

$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \end{cases}$. Expliquer le calcul de $(u_n), (v_n)$ et (w_n) en fonction de u_0, v_0 et w_0. Etudier la convergence de ces suites.

Correction

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Donc $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

2) $P_J(\lambda)= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2) = -\lambda(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2})$. J a donc 3 valeurs propres distinctes (J est donc diagonalisable), $\lambda_1 = -\sqrt{2}, \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = \sqrt{2}$. Pour montrer que $J = PDP^{-1}$, il suffit de montrer que les colonnes de P sont les coordonnées de vecteurs propres associés aux valeurs propres précédentes.

$J\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}=-\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J associé à la valeur propre $\lambda_1 = -\sqrt{2}$.

$J\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J associé à la valeur propre $\lambda_2 = 0$.

$J\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}=\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J associé à la valeur propre $\lambda_3 = \sqrt{2}$.

Et $J = PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

3) $J^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \ldots .PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$

$$J^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-\sqrt{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{2})^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Soit S $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \end{cases}$. Matriciellement S s'écrit $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}J\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. En itérant cette dernière formule : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2}J\right)^2\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2}J\right)^3\begin{pmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \\ w_{n-2} \end{pmatrix}=\ldots=\left(\frac{1}{2}J\right)^{n+1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$. Ainsi en décalant d'un rang $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2}J\right)^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$. Donc, étant donnée la formule donnant J^n, dans les expressions de $u_n; v_n$ et w_n il y a en général des combinaisons linéaires de $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$. Ces quantités tendent vers 0 en valeur absolue quand n tend vers l'infini. Donc u_n, v_n et w_n convergent.

Exercice 11

Consigne

Soit A=$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ et soit f l'application linéaire de R^3 dans R^3 ayant A pour matrice représentative dans la base canonique b.

1) Calculer f(x,y,z) pour (x,y,z) ∈ IR^3. f est-elle bijective ?

2) Chercher les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.

3) A est-elle diagonalisable ? (Justifier). Si oui donner une matrice diagonale D (on ordonnera les valeurs propres par ordre croissant, de gauche à droite) semblable à A et la matrice de passage P correspondante telle que P^{-1}=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la relation qui lie A, D et P ?

4) Calculer A^n.

5) Soient les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) vérifiant les relations de récurrence : $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n \\ v_{n+1} = 5v_n - 6w_n \\ w_{n+1} = 3v_n - 4w_n \\ u_0 = v_0 = 1 \text{ et } w_0 = -1 \end{cases}$

Pour $n \in N$, calculer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Correction

1) D'après le cours $f(x,y,z) = (3x, 5y - 6z, 3y - 4z)$ (en effet $f(x,y,z)$ a pour coordonnées dans la base canonique A$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$). Ici pour que f soit bijective, il suffit que f soit injective, c'est à dire que kerf $= \{(0,0,0)\}$. En effet, dans ce cas, d'après le théorème des dimensions on a $dimImf = 3 = dimIR^3$ et $Imf = IR^3$. Déterminons kerf.

v = (x,y,z) kerf si et seulement si $\begin{cases} 3x = 0 \\ 5y - 6z = 0 \\ 3y - 4z = 0 \end{cases}$, soit $x = y = z = 0$. f est donc bien injective et donc bijective d'après la remarque précédente.

2) Les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(\lambda)$=$\begin{vmatrix} (3-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (5-\lambda) & -6 \\ 0 & 3 & (-4-\lambda) \end{vmatrix}$.

$P_A(\lambda) = (3 - \lambda)(5 - \lambda)(-4 - \lambda) + 18(3 - \lambda) = (3 - \lambda)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$. A a donc 3 valeurs propres distinctes (A est donc diagonalisable): $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$.

$V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$ si et seulement si $\begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ V_1 \neq 0 \end{cases}$ si on note 0 la matrice colonne nulle, d'où $\begin{cases} 3x = -x \\ 5y - 6z = -y \\ 3y - 4z = -z \\ V_1 \neq 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ V_1 \neq 0 \end{cases}$, $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}$ avec $y \neq 0$.

$V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ si et seulement si $\begin{cases} AV_2 = \lambda_2 V_2 \\ V_2 \neq 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} 3x = 2x \\ 5y - 6z = 2y \\ 3y - 4z = 2z \\ V_2 \neq 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2z, \\ V_1 \neq 0 \end{cases}$ $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ z \end{pmatrix}$ avec $z \neq 0$.

$V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_3 = 3$ si et seulement si $\begin{cases} AV_3 = \lambda_3 V_3 \\ V_3 \neq 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} 3x = 3x \\ 5y - 6z = 3y \\ 3y - 4z = 3z \\ V_3 \neq 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x \neq 0 \\ y=z=0 \end{cases}$, $V_3 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $x \neq 0$.

3) Etant donné l'ordre imposé par l'énoncé $P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ y & 2z & 0 \\ y & z & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $x = 1, -y + 2z = 1$ et $2y - z = 1$. D'où $x = y = z = 1$ et $P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A = PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4) $A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$.

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (2^{n+1} - (-1)^n) & (2(-1)^n - 2^{n+1}) \\ 0 & (2^n - (-1)^n) & (2(-1)^n - 2^n \end{pmatrix}$$

5) Soit S $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \end{cases}$. Matriciellement S s'écrit $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. En itérant cette dernière formule : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \\ w_{n-2} \end{pmatrix} = \dots = A^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$. Ainsi en décalant d'un rang

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (2^{n+1} - (-1)^n) & (2(-1)^n - 2^{n+1}) \\ 0 & (2^n - (-1)^n) & (2(-1)^n - 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n \\ (2^{n+2} - 3(-1)^n) \\ (2^{n+1} - 3(-1)^n) \end{pmatrix}.$$

Exercice 12

Consigne

Soit J=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $J^2 = 2I + J$, où I désigne la matrice identité d'ordre 3. En déduire J^{-1}

2) Déterminer les valeurs propres de J. Montrer que J est diagonalisable.

Déterminer la matrice de passage P de première ligne $(1 \quad 0 \quad 1)$ et telle que $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et vérifiant $J = PDP^{-1}$, avec D diagonale (on ordonnera les valeurs propres par ordre croissant).

3) Calculer J^n (justifier les formules utilisées).

4) Soient les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) vérifiant les relations de récurrence :

$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n) \end{cases}$. Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de u_0, v_0 et w_0.

1) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 + J$.

Donc $I_3 = \frac{1}{2}(J^2 - J) = J\left[\frac{1}{2}(J - I_3)\right]$ et on en déduit que $J^{-1} = \frac{1}{2}(J - I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2) $P_J(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$.

J a donc deux valeurs propres, $\lambda_1 = -1$, d'ordre de multiplicité 2 et $\lambda_2 = 2$. Pour montrer que J est diagonalisable, il faut trouver une base de vecteurs propres de J.

Pour $V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J associé à la valeur propre λ_1 si et seulement si $\begin{cases} JV_1 = \lambda_1 V_1 \\ V_1 \neq 0 \end{cases}$

(on note 0 la matrice colonne nulle) soit $\begin{cases} y + z = -x \\ x + z = -y \\ x + y = -z \\ V_1 \neq 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ V_1 \neq 0 \end{cases}$, $V_1 =$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}$=x$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$+y$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $W_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs propres de J indépendants et associés à la valeur propre λ_1. Tout vecteur propre de J associé à la valeur propre λ_1 est une combinaison linéaire de ces vecteurs.

$V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J associé à la valeur propre λ_2 si et seulement si $\begin{cases} JV_2 = \lambda_2 V_2 \\ V_2 \neq 0 \end{cases}$, soit

$\begin{cases} y+z=2x \\ x+z=2y \\ x+y=2z \\ V_2 \neq 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=y=z \\ V_2 \neq 0 \end{cases}$, $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

$\{V_1, W_1, V_2\}$ est une base de IR^3 formée de vecteurs propres de J (en effet $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$).

J est donc bien diagonalisable. Et J = PDP^{-1} avec P=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et D=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On vérifie que $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $J^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \ldots PDP^{-1} = PD^nP^{-1} =$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$J^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}.$$

4) S$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n) \end{cases}$. S s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}J\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

En itérant cette dernière formule : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}J\right)^2\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}J\right)^3\begin{pmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \\ w_{n-2} \end{pmatrix} = \ldots = \left(\frac{1}{4}J\right)^{n+1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$. Ainsi en décalant d'un rang : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}J\right)^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$

: $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$. Ainsi

$$u_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n [(2(-1)^n + 2^n)u_0 + ((-1)^{n+1} + 2^n)v_0 + ((-1)^{n+1} + 2^n)w_0]$$

$v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n [((-1)^{n+1} + 2^n)u_0 + (2(-1)^n + 2^n)v_0 + ((-1)^{n+1} + 2^n)w_0],$

$\mathrm{w_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{n}} [((-1)^{\mathrm{n}+1} + 2^{\mathrm{n}})u_0 + ((-1)^{\mathrm{n}+1} + 2^{\mathrm{n}})\mathrm{v_0} + (2(-1)^{\mathrm{n}} + 2^{\mathrm{n}})\mathrm{w_0}]$

On remarque que quelque soit $u_0, \mathrm{v_0}$ et $\mathrm{w_0}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{w_n} = 0.$

Exercice 13

Consigne

On considère IR^3 muni de la base canonique b.

1) Montrer que si $b' = \{(1,1,0); (1,0,-1); (1,1,1)\}$, b' est aussi une base de IR^3.

2) Un vecteur V de IR^3 a pour coordonnées X=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans b et X'=$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans b'. Donner la matrice P de passage de b à b' et la matrice P^{-1} de passage de b' à b. En déduire X en fonction de x', y' et z' et X' en fonction de x,y et z.

3) Soit f l'application linéaire de IR^3 dans IR^3 définie par :

$f(x, y, z) = (4x - 5y + 4z, 4x - 5y + 4z, 3x - 3y + 3z)$. Déterminer la matrice de f dans b et puis la matrice de f dans b'.

Déterminer alors Imf et kerf ainsi que les vecteurs propres et les valeurs propres de f.

Correction

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$. Les vecteurs de b' sont donc 3 vecteurs indépendants de IR^3, ils forment une base de IR^3.

2) Par définition P=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Les colonnes de P^{-1} sont les coordonnées des vecteurs de b dans b '. Notons dans l'ordre, $\mathrm{v_1}, \mathrm{v_2}$ et $\mathrm{v_3}$, les vecteurs de b'.

Si $(1,0,0) = \mathrm{av_1} + \mathrm{bv_2} + \mathrm{cv_3}$, $(1,0,0)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans b'. Or $(1,0,0) = \mathrm{av_1} + \mathrm{bv_2} + \mathrm{cv_3}$ équivaut à $\begin{cases} 1 = a + b + c \\ 0 = a + c \\ 0 = -b + c \end{cases}$, d'où $\mathrm{a} = -1$ et $\mathrm{b} = \mathrm{c} = 1$. La première colonne de P^{-1} est donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si $(0,1,0) = av_1 + bv_2 + cv_3$, $\begin{cases} 0 = a+b+c \\ 1 = a+c \\ 0 = -b+c \end{cases}$ d'où $a = 2$ et $b = c = -1$. La deuxième colonne de P^{-1} est donc $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Si $(0,0,1) = av_1 + bv_2 + cv_3$, $\begin{cases} 0 = a+b+c \\ 0 = a+c \\ 1 = -b+c \end{cases}$ d'où $a = -1$ et $b = 0$ et $c = 1$. La deuxième colonne de P^{-1} est donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. D'autre part d'après le cours $X = PX'$ et $X' = P^{-1}X$ donc

X=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+y'+z' \\ x'+z' \\ -y'+z' \end{pmatrix}$ et X'=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y-z \\ x-y \\ x-y+z \end{pmatrix}$

3) Par définition la matrice de f dans b est A=$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 4 \\ 4 & -5 & 4 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et celle de f dans b' est $B = P^{-1}AP$, soit

B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -5 & 4 \\ 4 & -5 & 4 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

B est très parlante en effet, on peut en déduire que $f(v_1) = -v_1, f(v_2) = (0,0,0)$ et $f(v_3) = 3v_3$. Ainsi f admet pour vecteurs propres les vecteurs de la base b' et les valeurs propres associées sont respectivement $-1,0$ et 3. On en déduit aussi que $\ker f = \langle v_2 \rangle$ (c.f. la correction de l'exercice 8) et $Imf = \langle -v_1, 3v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle$.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 2, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).