Matrices 2

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Introduction *2*

Inversion de matrices *3*

Définition de l'inverse d'une matrice carrée 3

Propriétés de l'inverse d'une matrice carrée 3

Application aux systèmes linéaires 3

Calcul de l'inverse d'une matrice régulière 3

Changement de bases *4*

Matrices de changement de bases 4

Matrices semblables 5

Produit de matrices par blocs *6*

Exposé du principe 6

Application 7

Diagonalisation d'une matrice *7*

Définitions 7

Méthode 9

Application 10

Références *11*

Introduction

Objectif de la leçon : On doit être capable de maîtriser la notion de matrice inverse et matrice de changement de base (définition et calcul). On aborde aussi la notion de diagonalisation dans le cadre le plus simple ou celle-ci est possible. Il faut aussi savoir montrer qu'une matrice n'est pas diagonalisable.

Cette leçon se place dans la continuité de la leçon 4 et joue le rôle d'outil pour d'autres matières. Elle sera approfondie dans le cadre du cours de L3 (Mathématiques 3).

Inversion de matrices

Définition de l'inverse d'une matrice carrée

On cherche s'il existe un inverse pour la multiplication des matrices.

Si A est une matrice carrée d'ordre n régulière (de rang n), il existe une et une seule matrice notée A^{-1} telle que : $\mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}_{\mathrm{n}}$, A^{-1} est la **matrice inverse** de A. Et si une matrice A d'ordre n est **inversible** (admet une matrice inverse), A est de rang n.

Ainsi par exemple si A et B sont deux matrices données d'ordre n et si X est une matrice d'ordre n vérifiant $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$, on peut calculer X dès que A est inversible. En effet si on multiplie les 2 membres de l'inégalité précédente à gauche par A^{-1}, on obtient :

$A^{-1}AX = A^{-1}B$, soit $I_n X = A^{-1}B$ ou $X = A^{-1}B$.

Remarque : Une matrice carrée d'ordre n est **inversible** dès que son rang est égal à n, c'est à dire dès que son **déterminant est non nul**.

Propriétés de l'inverse d'une matrice carrée

- $(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B})^{-1} = \mathrm{B}^{-1} \cdot \mathrm{A}^{-1}$ Démonstration en exercice,
- ${}^{t}(\mathrm{A})^{-1} = {}^{t}(\mathrm{A}^{-1})$.

Application aux systèmes linéaires

Un système linéaire de n d'équations à n inconnues $(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ s'écrit :

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = u_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = u_2 \\ \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = u_n \end{cases}$. On peut l'écrire matriciellement sous la forme : A.X=U,

Avec A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et U=$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$.

Et si A est inversible, on obtient une solution unique en multipliant les 2 membres de l'égalité $\mathrm{AX} = \mathrm{U}$ à gauche par A^{-1}. Ainsi $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{U}$

Calcul de l'inverse d'une matrice régulière

On ne donnera pas ici de méthode systématique de calcul de l'inverse d'une matrice. Ce calcul est souvent fastidieux et est souvent faisable à l'aide d'une simple calculette.

Changement de bases

On a vu qu'une même application linéaire f, peut être représentée par des matrices différentes suivant les bases choisies. De telles matrices sont alors dites équivalentes. Des matrices équivalentes ont évidemment même rang, celui de l'application linéaire qu'elles représentent.

Dans les paragraphes qui suivent, on considère les applications linéaires de l'espace vectoriel E dans lui-même. Les matrices de telles applications linéaires sont alors carrées. Et on supposera E muni de la même base au départ et à l'arrivée.

Dans le cas particulier où les bases au départ et à l'arrivée sont les mêmes les matrices équivalentes sont dites **semblables**.

Nous allons essayer de voir comment on peut passer d'une matrice semblable à une autre.

Matrices de changement de bases

Soit V, un vecteur d'un espace vectoriel réel E de dimension n et deux bases b et b de E. $b = \{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}, b' = \{\mathrm{e}_1^{'}, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}^{'}\}$.

Supposons que l'on ait : $e_j' = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$ (1), c'est à dire que dans b, le vecteur colonne des coordonnées de e e $\mathrm{e}_\mathrm{j}^{'}$ est $\begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \dots \\ p_{nj} \end{pmatrix}$

V s'écrit de deux manières différentes dans b et dans b '.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des coordonnées de V dans b et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$ celui des coordonnées de V dans b '. Cherchons une relation entre X et X '.

Donc $\mathrm{V} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{x}_\mathrm{j}^{'} \mathrm{e}_\mathrm{j}^{'}$, soit en utilisant (1),$\mathrm{V} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{n} \mathrm{x}_\mathrm{j}^{'} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}_\mathrm{ij} \mathrm{e}_\mathrm{i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{p}_\mathrm{ij} \mathrm{x}_\mathrm{j}^{'} \right) \mathrm{e}_\mathrm{i}$.

Or $\mathrm{V} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{x}_\mathrm{i} \mathrm{e}_\mathrm{i}$. Les coordonnées dans une même base sont uniques donc :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j' \text{ pour } i = 1,2, \dots, n.$$

Ce qui peut s'écrire matriciellement :

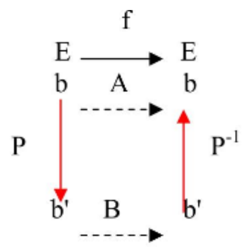
$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = PX'$$

Si P est la matrice formée des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base b' dans l'ancienne base b. P est la matrice de passage de b à b '.

Si P est la matrice de passage de la base b à la base b' (les colonnes de P sont les coordonnées des vecteurs de b' dans b), si X est la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur V dans b et si X' est celle des coordonnées de ce même vecteur dans b' : $X = PX'$.

Remarque importante : P est une matrice régulière c'est à dire de rang n, puisque les vecteurs de b ' sont libres. Or $X = PX'$ équivaut à $P^{-1}X = (P^{-1}P)X'$. Soit $X' = P^{-1}X$. P^{-1} apparait donc comme la matrice de passage de b' à b.

On peut faire le schéma suivant pour mieux mémoriser le résultat précédent :



Matrices semblables

Soit f une application linéaire de E dans E, b et b' deux bases de E et V un vecteur quelconque de E.

On note :

P la matrice de passage de b vers b' (1)

A la matrice de f dans b (au départ et à l'arrivée) (2)

X la matrice de V dans b (3)

Y la matrice de $f(V)$ dans b (4)

B la matrice de f dans b ' (au départ et à l'arrivée) (5)

X' la matrice de V dans b' (6)

Y' la matrice de f(V) dans b' (7)

D'après le cours :

(2), (3) et (4) impliquent $Y = AX$ (8)

(5), (6) et (7) impliquent $Y' = BX'$ (9)

(1), (3) (4) (6) et (7) impliquent $X = PX'$ et $Y = PY'$,

Ou en multipliant à gauche par P^{-1} : $P^{-1}X = X'$ et $P^{-1}Y = Y'$ (10)

(9) et (10) impliquent $P^{-1}Y = BP^{-1}X$, et en multipliant à gauche par P, on obtient $(PP^{-1})Y = PBP^{-1}X$ soit $Y = (PBP^{-1})X$ (11)

(8) et (11) sont vraies quelque soit X puisque V est quelconque, on en déduit donc

$$A = PBP^{-1}$$

D'où le **résultat à retenir** :

Soit A la matrice d'une application linéaire f dans une base b de E et B la matrice de la même application linéaire dans une autre base b' de E. Si P est la matrice de passage de b vers b' (coordonnées des vecteurs de b' dans b) alors $A = PBP^{-1}$.

Remarque : En multipliant la relation $A = PBP^{-1}$, à gauche par P^{-1} et à droite par P, on obtient $P^{-1}AP = (P^{-1}P)B(P^{-1}P)$, soit $B = P^{-1}AP$.

Produit de matrices par blocs

Ce paragraphe a un but très pratique qui permet de simplifier les calculs dans certains cas.

Exposé du principe

Soit A une matrice (n,p) et B une matrice (p,r).

On peut par exemple décomposer A en deux sous-matrices A_1 et A_2 ayant le même nombre de lignes que A et ayant respectivement p_1 et p_2 colonnes ($p_1 + p_2 = p$). On écrira symboliquement que : $A = (A_1 A_2)$.

De même on peut décomposer B en deux sous-matrices B_1 et B_2 ayant le même nombre de colonnes que B et ayant p_1 et p_2 lignes respectivement.

On écrira alors : $B = \binom{B_1}{B_2}$ et pour faire le produit A.B, on pourra faire :

$(A_1 \quad A_2)\binom{B_1}{B_2} = A_1B_1 + A_2B_2$ étant donné les procédés pour calculer un tel produit.

On peut généraliser et décomposer deux matrices en plusieurs blocs (éventuellement plus de deux) cohérents (nombres de lignes et de colonnes compatibles avec les produits) avant de faire le produit :

A=$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_r & \dots & \dots & A_{r+p} \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_p & \dots & \dots & B_{p+n} \end{pmatrix}$si A_1 a k colonnes, B_1 a k lignes etc...

$$\text{et } A.B = \begin{pmatrix} A_1.B_1+\ldots+A_p.B_p & . & . \\ . & . & . \\ . & . & A_r.B_n+\ldots+A_{r+p}.B_{p+n} \end{pmatrix}$$

Application

Ce procédé peut servir pour calculer plus simplement des produits de matrices, surtout lorsqu'il y a des zéros. Une application en sera donnée dans le cours de L3 avec les blocs de Jordan. On peut aussi l'utiliser pour inverser une matrice (n, n).

Si A=$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$ avec P de format (p,p) et S de format (s,s)(n=p+s). Q et R ne sont en général pas carrées Q est de format ($n-s, n-p$) et $R(n-p, n-s)$.

Posons A^{-1}=$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ et de format (p,p) et $T(s,s)$ et vérifient :

$\begin{cases} P.X + Q.Z = I_p \\ P.Y + Q.T = 0 \\ X.R + Z.S = 0 \\ R.Y + S.T = I_s \end{cases}$. (0 désignant la matrice nulle de format convenable)

On est donc ramené à résoudre ce système de matrices inconnues X, Y, Z et T. Ce qui dans certains cas donne des calculs simples. (En effet on peut remarquer que si Q et R sont des matrices nulles $X = P^{-1}$,$Y = 0$,$Z = 0$ et $T = S^{-1}$ et A^{-1}=$\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix}$.

Diagonalisation d'une matrice

Définitions

La diagonalisation d'une matrice est un outil très important du calcul matriciel, elle permet entre autres, d'élever facilement une matrice à une puissance.

Soit f une application linéaire de E dans E et A sa matrice dans une base b et Id l'application identique sur E (pour tout v de E $Id(\mathrm{v}) = \mathrm{v}$), de matrice I_n.

Diagonaliser la matrice A, c'est trouver, quand c'est possible, une base de E dans laquelle f est représentée par une matrice diagonale D. Si $p = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{v}_\mathrm{n}\}$ est la base dans laquelle la matrice de f est diagonale, $\mathrm{f}(\mathrm{v_i}) = \lambda_\mathrm{i}\mathrm{v_i}$ pour $\mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n}$ et les λ_i sont les éléments de la diagonale de D. Les vecteurs v_i sont alors dits **vecteurs propres** de f (ou de A) et chaque réel λ_i est appelé **valeur propre** associée à v_i. L'ensemble des valeurs propres λ_i s'appelle le **spectre** de A.

Remarque : **Un vecteur propre v_i n'est jamais nul** puisque p est une base de E, et si $\mathrm{V_i}$ est la matrice colonne des coordonnées de $\mathrm{v_i}$ dans la base b:$\mathrm{AV_i} = \lambda_\mathrm{i}\mathrm{V_i}$.

Reprenons l'égalité $\mathrm{f}(\mathrm{v_i}) = \lambda_\mathrm{i}\mathrm{v_i}$ avec $\mathrm{v_i} \neq 0$, elle s'écrit aussi $(\mathrm{f} - \lambda_\mathrm{i}\mathrm{II})(\mathrm{v_i}) = 0$. On en déduit donc qu'il existe un vecteur propre v_i associé à λ_i, si et seulement si $Ker(\mathrm{f} - \lambda_\mathrm{i}\mathrm{Id}) \neq 0$. Et d'après le théorème des dimensions, λ_i et $\mathrm{v_i}$ existent ssi rang $(\mathrm{f} - \lambda_\mathrm{i}\mathrm{Id}) < \mathrm{n}$ (ou rang $(\mathrm{A} - \lambda_\mathrm{i}\mathrm{I_n}) < \mathrm{n}$ ou $(\mathrm{A} - \lambda_\mathrm{i}\mathrm{I_n})$ n'est pas inversible). C'est ainsi que l'on peut trouver les valeurs propres λ_i et les vecteurs propres v_i (ou V_i) de $f(o\,u$ de $A)$. Donc λ_i est valeur propre de A si et seulement si $det(\mathrm{A} - \lambda_\mathrm{i}\mathrm{I_n}) = 0$.

$det(A - \lambda I_n)$ est un polynôme de degré n appelé polynôme caractéristique de f (ou de A).

Les **valeurs propres** apparaissent donc comme les **racines du polynôme** caractéristique de degré n en λ: $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$.

D'autre part si P est la matrice de passage de p vers b (les colonnes de P sont donc les V_i) d'après le résultat du paragraphe 2. :

Résultat à savoir : Une matrice A est diagonalisable si et seulement si, il existe une base p de vecteurs propres $\{\mathrm{v_i}\}$ vérifiant : $\mathrm{AV_i} = \lambda_\mathrm{i}\mathrm{V_i}$($\mathrm{V_i}$ matrice colonne des coordonnées de $\mathrm{v_i}$ dans b, base de départ) et si P est la matrice de passage de b vers p (les colonnes de P sont les $\mathrm{V_i}$): $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ et D est la matrice diagonale semblable à A, sa diagonale est formée des λ_i, valeurs propres de A. dans la base p.

D'autre part les valeurs propres λ_i sont telles que rang $(A - \lambda_i\mathrm{I_n}) < \mathrm{n}$ (si n est l'ordre de A et I_n la matrice unité d'ordre n) elles sont donc les racines du polynôme caractéristique $\mathrm{P_A}(\lambda) = det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I_n})$.

Diagonaliser A revient à trouver les valeurs propres λ_i, c'est à dire D, et la matrice P, c'est à dire les $\mathrm{V_i}$.

<u>Exemple</u> : Diagonaliser A=$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$.

Pour simplifier les explications, supposons que A est la matrice d'une application f de IR^2 dans IR^2 dans la base canonique de IR^2. Utilisons les mêmes notations que plus haut.

1ère étape : calcul des valeurs propres

Ce sont les racines du polynôme caractéristique $\mathrm{P}_A(\lambda) = det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_2) = \begin{vmatrix} (-4-\lambda) & 3 \\ -6 & (5-\lambda) \end{vmatrix}$

$\mathrm{P}_\mathrm{A}(\lambda) = (-4-\lambda)(5-\lambda) + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$.

A a donc deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$.

2ème étape : recherche des vecteurs propres

- $\mathrm{V} = \binom{x}{y}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda 1 = -1$ si et seulement si $AV = \lambda_1 V$, ce qui donne $\binom{-4x+3y}{-6x+5y} = \binom{-x}{-y}$ soit $\begin{cases} -4x + 3y = -x \\ -6x + 5y = -y \end{cases}$ ou $x = y$ et $V = \binom{x}{x} = x\binom{1}{1}$ Tous les vecteurs propres associés à λ_1 sont proportionnel à $\mathrm{V1} = \binom{1}{1}$.
- $\mathrm{V} = \binom{x}{y}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ si et seulement si $\mathrm{AV} = \lambda_2 V$, ce qui donne $\binom{-4x+3y}{-6x+5y} = \binom{2x}{2y}$ soit $\begin{cases} -4x + 3y = 2x \\ -6x + 5y = 2y \end{cases}$ ou $y = 2\,x$ et $V = \binom{x}{2x} = x\binom{1}{2}$ Tous les vecteurs propres associés à λ_2 sont proportionnel à $V_2 = \binom{1}{2}$.

3ème étape : réduction de A

D'après les calculs précédents $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$ est une base de IR^2 dans laquelle la matrice de f est la matrice diagonale D=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage de la base canonique de IR^2 vers $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$ est P=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (par définition les colonnes de P sont les coordonnées de v1 et v2 dans la base canonique de $\boldsymbol{IR^2}$ c'est-à-dire V_1 et V_2). On a : $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$.

Méthode

Pour diagonaliser une matrice A, on commencera par chercher les valeurs propres en résolvant $det(A - \lambda I_n) = 0$ (pour cette année $n = 2$ ou 3).

Ensuite pour chaque valeur propre λ_i, on déterminera les vecteurs propres v_i qui lui est associé (attention un vecteur propre est toujours différent de 0) en écrivant $\mathrm{AV_i} = \lambda_i \mathrm{V_i}$($\mathrm{V_i}$ désignant la matrice colonne des coordonnées de $\mathrm{v_i}$ dans la base b de départ). Cette équation a toujours une infinité de solutions. Si λ_i est une racine simple du polynôme caractéristique les solutions sont toutes proportionnelles.

On fera attention à mettre les vecteurs propres dans P dans le même ordre que les valeurs propres dans D (la i ième colonne de P représente les coordonnées d'un vecteur propre associé à la valeur propre situé sur la $i^{ème}$ colonne de D).

On peut montrer que, pour que A soit diagonalisable il faut que pour toute valeur propre λ_i, racine du polynôme caractéristique d'ordre de multiplicité $m(\lambda_i)$,$AV_i = \lambda_i V_i$ ait $m(\lambda_i)$ solutions (en V_i) indépendantes, A n'est pas diagonalisable. On peut aussi montrer que **si A a n valeurs propres distinctes, A est diagonalisable** (c'est le cas de l'exemple précédent). Ces résultats seront justifiés dans une année ultérieure mais peuvent être utilisés dès à présent dans les exercices.

Application

Soit A une matrice diagonalisable et D une matrice diagonale semblable à A, telle que : $A = PDP^{-1}$ (P matrice de passage de la base de départ vers la base des vecteurs propres de A). Si on veut calculer A^n (produit de n matrices égales à A), on peut remarquer que :

D est diagonale, D=$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & . \\ . & . & . & . \\ . & . & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ donc D^n=$\begin{pmatrix} (\lambda_1)^n & 0 & . & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^n & 0 & . \\ . & . & . & . \\ . & . & 0 & (\lambda_n)^n \end{pmatrix}$. ($D^n$ désigne le produit de n matrices égales à D).

Donc $A^n = PDP^{-1^{-1}}PDP^{-1}P \dots \dots . P^{-1}PDP^{-1}$. Or $P^{-1}P = I_n$ et $I_nD = D$.

D' où $A^n = PD^nP^{-1}$, ce qui rend le calcul de A^n possible simplement.

Remarque : Si A=$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, où A_1 et A_2 sont des matrices carrées. Diagonaliser A revient à diagonaliser A_1 et A_2 d'après le paragraphe précédent.

En effet si $A_1 = P_1D_1P_1^{-1}$ et si $A_2 = P_2A_2P_2^{-1}$,

$A = PDP^{-1}$ avec P=$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}\left(P^{-1} = A = \begin{pmatrix} {P_1}^{-1} & 0 \\ 0 & {P_2}^{-1} \end{pmatrix}\right)$.

On peut évidemment généraliser à 3,4 … matrices carrées (ces matrices n'étant pas nécessairement de même ordre) sur la diagonale et des zéros ailleurs.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 2, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).