

Matrices 1

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices

Exercice 1

Consigne

$$\text{Calculer } 4 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Consigne

On appelle matrice stochastique suivant les lignes, une matrice dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls, et tels que leur somme sur chaque ligne égale 1. On définit de même une matrice stochastique suivant les colonnes.

Construire une matrice stochastique d'ordre 4 suivant les lignes et les colonnes.

Exercice 3

Consigne

$$\text{Trouver deux matrices } X \text{ et } Y \text{ telles que : } \begin{cases} X - Y = A \\ 2X + Y = B \end{cases} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Consigne

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ calculer $(A + B)^2$ et $A^2 + 2A \cdot B + B^2$. Expliquer la différence des résultats.

Exercice 5

Consigne

Soit f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(x,y,z,t) = (2x - y + t, 3z, 2y + z - t)$.

1) Donner la matrice de f dans $b = \{(1,1,0,0); (0,1,0,-1); (1,1,1,0); (0,0,0,1)\}$ et la base canonique de \mathbb{R}^3 .

2) Soit g l'application linéaire de \mathbb{R}^3 par \mathbb{R}^3 ayant pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Donner la matrice de $g \circ f$ dans b et la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Exercice 6

Consigne

Effectuer les produits de matrices suivants :

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3) \text{ Soit } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ calculer } A^3$$

$$4) \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

5) Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer X^n ($n \in \mathbb{N}^*$)

Exercice 7

Consigne

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ écrire toutes les matrices qui commutent avec A .

Exercice 8

Consigne

- 1) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ trouver une matrice X non nulle telle que $A \cdot X = 0$ et une matrice Y telle que $Y \cdot A = 0$ (où 0 est la matrice nulle d'ordre 2).
- 2) Trouver une matrice B non nulle d'ordre 2 telle que $B^2 = 0$.

Exercice 9

Consigne

Montrer que si A et B sont des matrices carrées d'ordre n : $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Exercice 10

Consigne

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. En posant $A = B + 2I_2$, calculer B^2 . Calculer A^n (remarquer que B et $2I_2$ commutent et donc que la formule du binôme de Newton s'applique).

Exercice 11

Consigne

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculer N^n . En déduire un moyen de calculer A^n , si $A = \begin{pmatrix} -3 & a & b \\ 0 & -3 & c \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. (On remarquera que $-3I_3$ et N commutent).

Exercice 12

Consigne

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}; 4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 2, Odile Brandière, AUNEGe (<http://auneg.fr>), CC – BY NC ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).



Cette œuvre est mise à disposition dans le respect de la législation française protégeant le droit d'auteur, selon les termes du contrat de licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>). En cas de conflit entre la législation française et les termes de ce contrat de licence, la clause non conforme à la législation française est réputée non écrite. Si la clause constitue un élément déterminant de l'engagement des parties ou de l'une d'elles, sa nullité emporte celle du contrat de licence tout entier.