

# L'optimisation revisitée

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

## Exercices corrigés

**Attention** : ceci est la version corrigée des exercices.

**Rappel** : pour  $x$  voisin de zéro

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x) \quad (m \in \mathbb{R})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

### Exercice 1

Consigne

Etudier l'existence et la nature des extrema éventuels des fonctions  $f$  dans les cas suivants :

1)  $f(x, y) = x^3 + 2xy - 2x^2 - 2y^2$

2)  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

3)  $f(x, y) = 2(x^2 + y^2) - 4xy - 5$

4)  $f(x, y) = x^4 - x^2 + 2xy + y^2$

5)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - 4\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$

## Correction

1)  $f(x, y) = x^3 + 2xy - 2x^2 - 2y^2$  est deux fois différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ .

a) Recherche des points stationnaires :  $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y - 4x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 4y$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$  si et seulement si  $3x_0^2 + 2y_0 - 4x_0 = 0$ ,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$  si et seulement si  $2y_0 = x_0$ . Donc  $(x_0, y_0)$  est point stationnaire de  $f$  si et seulement si

$\begin{cases} x_0 = 2y_0 \\ 2y_0^2 - y_0 = 0 \end{cases}$  D'où les deux points stationnaires  $A(0,0)$  et  $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$ .

b) Conditions du second ordre :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 4$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4$ .

$$\delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24x - 12.$$

En  $A(0,0)$ :  $\delta = -12 < 0$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ . D'après le cours  $A$  correspond à un maximum local de  $f$ .

En  $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$ :  $\delta = 12 > 0$ . D'après le cours  $B$  est un point col (ou point selle).

2)  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$  est deux fois différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ .

a) Recherche des points stationnaires :  $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$  si et seulement si  $3x_0^2 + 3y_0^2 - 15 = 0$ ,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$  si et seulement si  $x_0 y_0 = 2$ . Donc  $(x_0, y_0)$  est point stationnaire de  $f$  si et seulement si

$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 5 \\ x_0 y_0 = 2 \end{cases}$ .  $y_0 = 0$  n'est pas solution, on peut donc écrire  $x_0 = \frac{1}{y_0}$  et le système est équivalent à

$\begin{cases} y_0^4 + 5y_0^2 + 4 = 0 \\ x_0 y_0 = 2 \end{cases}$ . L'équation bicarrée  $y_0^4 - 5y_0^2 + 4 = 0$  se résout en posant  $Y = y_0^2$ , on obtient

$Y = 1$  ou  $Y = 4$ . D'où les quatre points stationnaires  $A(2,1)$ ,  $B(-2,-1)$ ,  $C(1,2)$  et  $D(-1,-2)$ .

b) Conditions du second ordre :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$ .

$$\delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 36(y^2 - x^2)$$

En  $A(2,1)$ , et en  $B(-2,-1)$ :  $\delta < 0$ .

En  $A(2,1)$   $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ . D'après le cours  $A$  correspond à un minimum local de  $f$ .

En  $B(-2, -1)$   $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ . D'après le cours A correspond à un maximum local de  $f$ .

En  $C(1, 2)$  et en  $D(-1, -2)$ :  $\Delta > 0$ . D'après le cours C et D sont des points col (ou points selle).

3)  $f(x, y) = 2(x^2 + y^2) - 4xy - 5$  est deux fois différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ .

a) Recherche des points stationnaires :  $\frac{\partial f}{\partial x} = 4(x - y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 4(y - x)$

Donc  $(x_0, y_0)$  est point stationnaire de  $f$  si et seulement si  $x_0 = y_0$ . Ici il y a une infinité de points stationnaires, ce sont les points de la droite d'équation  $y = x$ .

b) Conditions du second ordre :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$ .

$\delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ . On ne peut donc pas conclure et il faut faire une étude directe au voisinage de la droite d'équation  $y = x$ .

$f(x, y) - f(x, x) = 2(x^2 + y^2) - 4xy = 2(x - y)^2 \geq 0$ . Cette droite correspond donc à un ensemble de minima locaux de  $f$ .

4)  $f(x, y) = x^4 - x^2 + 2xy + y^2$  est deux fois différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ .

a) Recherche des points stationnaires :  $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x + 2y$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$  si et seulement si  $4x_0^3 - 2x_0 + 2y_0 = 0$ ,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$  si et seulement si  $y_0 = -x_0$ . Donc  $(x_0, y_0)$  est point stationnaire de  $f$  si et seulement si

$\begin{cases} 4x_0(x_0^2 - 1) = 0 \\ y_0 = -x_0 \end{cases}$ . D'où les trois points stationnaires  $A(0, 0)$  et  $B(1, -1)$  et  $C(-1, 1)$ .

b) Conditions du second ordre :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 2$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ .

$\delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8 - 24x^2$

En  $A(0, 0)$  :  $\delta > 0$ . D'après le cours A correspond à un point col de  $f$ .

En  $B(1, -1)$  et en  $C(-1, 1)$ :  $\delta < 0$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ . D'après le cours B et C correspondent à des minima locaux de  $f$ .

5)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - 4\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$  est deux fois différentiable sur  $\mathbb{R}^2$  (en effet pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $x^2 + y^2 + 1 > 0$ ).

a) Recherche des points stationnaires :  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(1-2\sqrt{x^2+y^2+1})}{x^2+y^2+1}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y(1-2\sqrt{x^2+y^2+1})}{x^2+y^2+1}$ .

Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $x^2 + y^2 + 1 \geq 1$  et  $1 - 2\sqrt{x^2 + y^2 + 1} \leq -1$ .

Donc  $(x_0, y_0)$  est point stationnaire de  $f$  si et seulement si  $x_0 = y_0 = 0$ .  $f$  a donc un seul point stationnaire  $A(0,0)$ .

b) Conditions du second ordre :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2x^2+2y+2}{(x^2+y^2+1)^2} - 4 \frac{y^2+1}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2} + \frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^{3/2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2y^2+2x^2+2}{(x^2+y^2+1)^2} - 4 \frac{x^2+1}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}.$$

En  $A(0,0)$   $\delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 < 0$ .

D'après le cours  $A$  correspond à un maximum local de  $f$ .

**Remarque** : Ici on aurait pu utiliser une méthode plus efficace en faisant une étude directe de  $f(x,y) - f(0,0)$  au voisinage de  $(0,0)$  en utilisant des développements limités.

En effet  $f(x,y) - f(0,0) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - 4\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$  et puisque  $x^2 + y^2$  est voisin de 0 quand  $(x,y)$  est voisin de  $(0,0)$  :

$$\ln(x^2 + y^2 + 1) = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)\varepsilon(x,y) \quad \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(x,y) = 0\right).$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 1} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)\varepsilon(x,y) \quad \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(x,y) = 0\right).$$

D'où  $f(x,y) - f(0,0) = x^2 + y^2 - 4\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + y^2\right) + (x^2 + y^2)\varepsilon(x,y)$  et

$f(x,y) - f(0,0) \approx -2(x^2 + y^2) \leq 0$  au voisinage de  $(0,0)$ . Et on retrouve bien que  $(0,0)$  correspond à un maximum local de  $f$ .

## Exercice 2

### Consigne

Soit  $f(x,y) = -x^3 + xy^2 + 2x - 2y$ .

1) Rechercher les extrema éventuels de la fonction  $f$  et préciser leur nature.

2) Etudier, selon la valeur du paramètre  $m$ , l'existence et la nature des extrema de  $f$  telle que :

$$f(x,y) = y^3 + x^2 - 3my.$$

## Correction

1)  $f$  est deux fois différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ .

a) Recherche des points stationnaires :  $\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + y^2 + 2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - 2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$  si et seulement si  $-3x_0^2 + y_0^2 - 2 = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$  si et seulement si  $x_0 y_0 = 1$ .  $x_0 = 0$

n'est pas solution, on peut donc écrire  $y_0 = \frac{1}{x_0}$  et le système est équivalent à  $\begin{cases} -3x_0^4 + 2x_0^2 + 1 = 0 \\ x_0 y_0 = 1 \end{cases}$ .

L'équation bicarrée  $-3x_0^4 + 2x_0^2 + 1 = 0$  se résoud en posant  $X = x_0^2$ , on obtient  $X = 1$  ou  $X = \frac{-1}{3}$ .

D'où les deux points stationnaires ( $X = \frac{-1}{3} = x_0^2$  n'a pas de solution)  $A(1,1)$  et  $B(-1, -1)$ .

b) Conditions du second ordre :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$ .

$$\delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4y^2 + 12x^2 > 0 \text{ en } A \text{ et } B.$$

D'après le cours  $A$  et  $B$  sont des points col (ou points selle).

2)  $f(x, y) = y^3 + x^2 - 3my$  est deux fois différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ .

a) Recherche des points stationnaires :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3m.$$

Si  $m < 0$ , pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + x^2 > 0$  et  $f$  n'a pas de points stationnaires.

Si  $m = 0$ ,  $A(0,0)$  est le seul point stationnaire.

Si  $m > 0$ ,  $B(0, \sqrt{m})$  et  $C(0, -\sqrt{m})$  sont les deux seuls points stationnaires.

b) Conditions du second ordre :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$ .

$$\delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y > 0.$$

Si  $m > 0$ , en  $B(0, \sqrt{m})$ ,  $\delta < 0$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ . D'après le cours  $B$  correspond à un minimum local de  $f$ . Par contre en  $C(0, -\sqrt{m})$ ,  $\delta > 0$  et  $C$  est un point col de  $f$ .

Si  $m = 0$ ,  $\delta = 0$  et il faut faire une étude directe de  $f(x, y) - f(0,0)$  au voisinage de  $(0,0)$ .  $f(x, y) - f(0,0) = x^2 + y^3$ , quantité qui change de signe sur tout voisinage de  $(0,0)$ . En effet de tels voisinages contiennent des points de la forme  $(0, y)$  avec  $y$  de signe quelconque et  $f(0, y) - f(0,0) = y^3$  est de signe quelconque. Ainsi  $A$  est un point col.

## Exercice 3

### Consigne

Etudier l'existence et la nature des extrema des fonctions  $f$  suivantes définies sur  $\mathbb{R}^2$  par :

1)  $f(x, y) = (x + y^2 + 2y)e^{2x}$ .

2)  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \exp(x^2 - y^2)$ .

### Correction

1)  $f(x, y) = (x + y^2 + 2y)e^{2x}$  est deux fois différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ .

a) Recherche des points stationnaires :  $\frac{\partial f}{\partial x} = (2x + 2y^2 + 4y + 1)e^{2x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = (2y + 2)e^{2x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ si et seulement si } 2x_0 + 2y_0^2 + 4y_0 + 1 = 0,$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$  si et seulement si  $2y_0 + 2 = 0$ . Donc  $(x_0, y_0)$  est point stationnaire de  $f$  si et seulement

$$\text{si } \begin{cases} y_0 = -1 \\ 2x_0 - 1 = 0 \end{cases}. \text{ D'où le seul point stationnaire } A\left(\frac{1}{2}, -1\right).$$

b) Conditions du second ordre :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (4x + 4y^2 + 8y + 4)e^{2x}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (4y + 4)e^{2x}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{2x}$ .  $\delta =$

$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4e^2$  en  $A\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ . Or  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$  en  $A\left(\frac{1}{2}, -1\right)$  et  $A$  correspond à un minimum local de  $f$ .

2)  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \exp(x^2 - y^2)$  est deux fois différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ .

a) Recherche des points stationnaires :  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(x^2 + y^2 + 1) \exp(x^2 - y^2)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y(x^2 + y^2 - 1) \exp(x^2 - y^2)$

1)  $\exp(x^2 - y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ si et seulement si } 2x_0(x_0^2 + y_0^2 + 1) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \text{ si et seulement si } 2y_0(x_0^2 + y_0^2 - 1) = 0. \text{ Or pour tous réels } x_0 \text{ et } y_0,$$

$x_0^2 + y_0^2 + 1 > 0$ . Donc  $(x_0, y_0)$  est point stationnaire de  $f$  si et seulement si  $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0(y_0^2 - 1) = 0 \end{cases}$ . D'où les points stationnaires  $A(0,0)$ ,  $B(0,1)$  et  $C(0,-1)$ .

b) Conditions du second ordre :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (10x^2 + 2y^2 + 2 + 4x^4 + 4x^2y^2) \exp(x^2 - y^2)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4xy(x^2 + y^2) \exp(x^2 - y^2)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (-2x^2 - 10y^2 + 2 + 4y^4 + 4x^2y^2) \exp(x^2 - y^2)$ .

En  $A(0,0)$ :  $\delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$ .  $f$  atteint donc un minimum local en  $A(0,0)$ .

En  $B(0,1)$  et  $C(0,-1)$ :  $\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 16e^{-2} > 0$ .  $B(0,1)$  et  $C(0,-1)$  sont donc des points col (ou points selle) de  $f$ .

## Exercice 4

### Consigne

Soit  $f(x, y) = (x + y)e^{(x+y)}$ .

- 1) Calculer les dérivées partielles de  $f$  et en déduire les points stationnaires de  $f$ .
- 2) Que donne la condition du second ordre quant à l'existence d'un extremum pour  $f(x,y)$ .
- 3) Rappeler le développement limité de  $e^u$  au voisinage de 0.

Etudier alors la différence  $f(x,y) - f(x_0, y_0)$  au voisinage de tout point stationnaire  $(x_0, y_0)$  de  $f$ .

Conclure quant aux extrema de  $f(x, y)$ .

- 4) Pouvait-on trouver ce résultat plus simplement ? (Justifier)

### Correction

1)  $f(x, y) = (x + y)e^{(x+y)}$  admet des dérivées partielles sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\frac{\partial f}{\partial x} = (x + y + 1)e^{(x+y)}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = (x + y + 1)e^{(x+y)}$

Donc  $(x_0, y_0)$  est point stationnaire de  $f$  si et seulement si  $x_0 + y_0 + 1 = 0$ . Il y a donc une infinité de points stationnaires, ce sont les points de la droite  $D$  d'équation  $x + y + 1 = 0$ .

2) Conditions du second ordre :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (x + y + 2)e^{(x+y)}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (x + y + 2)e^{(x+y)}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (x + y + 2)e^{(x+y)}$ .

Donc  $\delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$  et on ne peut pas conclure.

3)  $e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + u^n \varepsilon(u)$  avec  $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$ .

$f(x,y) - f(x_0, y_0) = (x + y)e^{x+y} - (x_0 + y_0) \exp(x_0 + y_0)$ . Or  $x_0 + y_0 + 1 = 0$ , donc  $f(x,y) - f(x_0, y_0) = (x + y)e^{x+y} + e^{-1}$ . Posons  $x + y = -1 + h$ , si  $(x,y)$  est voisin de  $D$ ,  $h$  est voisin de 0 et  $f(x,y) - f(x_0, y_0) =$

$$(-1 + h)e^{-1+h} + e^{-1} = (-1 + h) \left[ e^{-1} \left( 1 + h + \frac{h^2}{2} + h^2 \varepsilon(h) \right) \right] + e^{-1}.$$

$f(x,y) - f(x_0,y_0) = e^{-1} \left( \frac{h^2}{2} + h^2 \varepsilon(h) \right)$  avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ .  $f(x,y) - f(x_0,y_0) \geq 0$  au voisinage de  $D$  et la droite  $D$  d'équation  $x + y + 1 = 0$  correspond donc à des minima locaux de  $f$ .

4) En posant  $v = x + y$ ,  $f(x, y) = ve^v = F(v)$ .

$F'(v) = e^v + ve^v$  et  $F'(v)$  change de signe en  $v = -1$ .

Si  $v < -1$ ,  $F'(v) < 0$  et si  $v > -1$ ,  $F'(v) > 0$ .  $F$  atteint donc un minimum local en  $-1$  et ce minimum vaut  $-e^{-1}$ . On retrouve alors le résultat précédent :  $f$  atteint un minimum local pour  $x + y = -1$ .

## Exercice 5

### Consigne

Soit  $f(x, y, z) = x^3 + x^2y - 4 \ln(y^2 + z) + z^2 + 2z + 6y - 2yz$ .

1) Préciser l'ensemble sur lequel  $f$  est deux fois différentiable.

2) Montrer que  $(0,1,1)$  est un point stationnaire de  $f$ .

3) Déterminer la nature de ce point stationnaire.

### Correction

1)  $f$  est deux fois différentiable sur  $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; y^2 + z \neq 0\}$ .

2)  $(0,1,1) \in \mathcal{D}$  et  $\operatorname{operatornamesur} \mathcal{D}, \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy, \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - \frac{8y}{y^2+z} + 6 - 2z$  et  $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{4}{y^2+z} + 2z + 2 - 2y$ .

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,1) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(0,1,1) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,1) = 0$ .  $(0,1,1)$  est donc bien un point stationnaire de  $f$ .

3)  $f$  est une fonction de trois variables, il faut donc étudier  $\Delta = f(x,y,z) - f(0,1,1)$  au voisinage de  $(0,1,1)$ . "Posons  $y = 1 + k$  et  $z = 1 + t$ .  $(\operatorname{dr}\{x\}, \operatorname{dr}\{y\}, \operatorname{dr}\{z\})$  est voisin de  $(0,1,1)$  si et seulement si  $(x,k,t)$  est voisin de  $(0,0,0)$ .

$$\Delta = f(x, 1 + k, 1 + t) - f(0,1,1),$$

$$\Delta = x^3 + x^2(1 + k) - 4 \ln(2 + (2k + k^2 + t)) + 1 + 2t + t^2 + 2(1 + t) + 6(1 + k) - 2(1 + k)(1 + t) - (-4 \ln 2 + 7).$$

Il faut faire un développement limité de  $\ln(2 + (2k + k^2 + t))$  au voisinage  $(0,0,0)$ .

$\ln(2 + (2k + k^2 + t)) = \ln 2 + \ln\left(1 + \left(k + \frac{k^2}{2} + \frac{t}{2}\right)\right)$  et  $\left(k + \frac{k^2}{2} + \frac{t}{2}\right)$  est voisin de 0.

Donc  $\ln(2 + (2k + k^2 + t)) = \ln 2 + \left(k + \frac{k^2}{2} + \frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(k + \frac{k^2}{2} + \frac{t}{2}\right)^2 + \text{reste}$ .

Le terme "reste" désigne une quantité négligeable devant les termes d'ordre inférieur ou égal à deux quand  $(k, t)$  est voisin de  $(0,0)$ .

$\ln(2 + (2k + k^2 + t)) = \ln 2 + k + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}kt - \frac{1}{8}t^2 + \text{reste}$ . D'où  $\Delta = x^2 - 4\left(k + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}kt - \frac{1}{8}t^2\right) + 2t + t^2 + 2t + 6k - 2k - 2t - 2kt + \text{reste}$ ,  $\Delta = x^2 + \frac{3}{2}t^2 + \text{reste}$ . Donc  $\Delta \geq 0$  pour  $(x,k,t)$  voisin de  $(0,0,0)$  et  $(0,1,1)$  correspond à un minimum local de  $f$ .

## Exercice 6

### Consigne

Déterminer et préciser la nature des extrema éventuels de la fonction  $f$  définie par :  $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2z(x - y) - 2x - 4y$ .

### Correction

$f$  admet des dérivées partielles sur  $\mathbb{R}^3$ .

a) Recherche des points stationnaires :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2z - 2, \frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 2z - 4 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z} = 4z + 2(x - y).$$

$(x_0, y_0)$  est point stationnaire de  $f$  si et seulement si  $\begin{cases} x_0 + z_0 = 1 \\ 2y_0 - z_0 = 2 \\ x_0 - y_0 + 2z_0 = 0 \end{cases}$ . D'où le point stationnaire

$A(1,1,0)$ .

b) Nature du point stationnaire  $A$  :

Ici encore, il faut donc étudier  $\Delta = f(x,y,z) - f(1,1,0)$  au voisinage de  $(1,1,0)$ . "Posons  $x = 1 + h$  et  $y = 1 + k$ .  $(x, y, z)$  est voisin de  $(1,1,0)$  si et seulement si  $(h,k,z)$  est voisin de  $(0,0,0)$ .

$\Delta = f(1 + h, 1 + k, z) - f(1,1,0) = (1 + h)^2 + 2(1 + k)^2 + 2z^2 + 2z(h - k) - 2(1 + h) - 4(1 + k) + 3$ ,  $\Delta = h^2 + 2k^2 + 2z^2 + 2zh - 2zk = (h + z)^2 + (z + k)^2 \geq 0$ . On en déduit donc que  $f$  atteint un minimum local en  $A(1,1,0)$ .

## Exercice 7

### Consigne

Soit  $f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{y}{x} - \frac{z}{y} - \frac{1}{z}$ .

- 1) Déterminer l'ensemble sur lequel  $f$  est différentiable.
- 2) Montrer que  $(1, 1, -1)$  est un point stationnaire de  $f$ .
- 3) Déterminer la nature de ce point stationnaire (faire une étude locale en faisant une translation pour se ramener à un voisinage de  $(0, 0, 0)$  et des développements limités à l'ordre 2 si nécessaire)

### Correction

**N.B. :** On pourra remarquer que  $:\frac{3}{2}h^2 - hk + k^2 + tk + t^2 = \left(k - \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}t\right)^2 + \frac{5}{4}\left(h + \frac{1}{5}t\right)^2 + \frac{7}{10}t^2$ .

1)  $f$  est deux fois différentiable sur  $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \neq 0, y \neq 0 \text{ et } z \neq 0\}$ ,  $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xyz \neq 0\}$ .

2)  $(1, 1, -1) \in \mathcal{D}$  et sur  $\mathcal{D}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x} = x - \frac{y}{x^2}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} + \frac{z}{y^2}$  et  $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{z^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, -1) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, -1) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, -1) = 0$ .  $(1, 1, -1)$  est donc bien un point stationnaire de  $f$ .

3)  $f$  est une fonction de trois variables, il faut donc étudier  $\Delta = f(x, y, z) - f(1, 1, -1)$  au voisinage de  $(1, 1, -1)$ . "Posons  $x = 1 + h, y = 1 + k$  et  $z = -1 + t$ .  $(x, y, z)$  est voisin de  $(1, 1, -1)$  si et seulement si  $(h, k, t)$  est voisin de  $(0, 0, 0)$ .

$$\Delta = f(1 + h, 1 + k, -1 + t) - f(1, 1, -1) = \frac{1}{2}(1 + h)^2 + \frac{1+k}{1+h} - \frac{-1+t}{1+k} - \frac{1}{-1+t} - \frac{7}{2},$$

$$\Delta = \frac{1}{2} + h + \frac{h^2}{2} + (1 + k)\left(\frac{1}{1+h}\right) - (-1 + t)\left(\frac{1}{1+k}\right) - \frac{1}{-1+t} - \frac{7}{2}.$$

Il faut faire des développements limités des trois termes  $\frac{1}{1+h}$ ,  $\frac{1}{1+k}$  et  $\frac{1}{-1+t}$ .

On a  $\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 + \text{reste}$ ,  $\frac{1}{1+k} = 1 - k + k^2 + \text{reste}$  et  $\frac{1}{-1+t} = -1 - t - t^2 + \text{reste}$ .

Le terme "reste" désigne une quantité négligeable devant les termes d'ordre inférieur ou égal à deux quand la variable est voisine de 0.

$\Delta = \frac{1}{2} + h + \frac{h^2}{2} + (1 + k)(1 - h + h^2) - (-1 + t)(1 - k + k^2) - (-1 - t - t^2) - \frac{7}{2} + \text{reste}$ ,  $\Delta = \frac{3}{2}h^2 - hk + k^2 + tk + t^2 + \text{reste} = \left(k - \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}t\right)^2 + \frac{5}{4}\left(h + \frac{1}{5}t\right)^2 + \frac{7}{10}t^2 + \text{reste}$  (la dernière égalité est donnée par l'énoncé). Donc  $\Delta \geq 0$  pour  $(h, k, t)$  voisin de  $(0, 0, 0)$  et  $f$  atteint un minimum local en  $A(1, 1, -1)$ .

## Exercice 8

### Consigne

Soit la fonction de satisfaction :  $S = 58x + 76y - 5x^2 - 2xy + 10y^2$  où  $x$  et  $y$  sont des quantités demandées des biens X et Y. Soit  $p_x = 22$  et  $p_y = 57$  les prix de X et de Y. Quelles quantités doit-on acheter de X et de Y pour maximiser sa satisfaction lorsque le budget consacré à ces deux biens est  $P = 136$  ?

### Correction

On a donc la contrainte budgétaire (C)  $22x + 57y = 136$ .

Et on veut optimiser  $S = 58x + 76y - 5x^2 - 2xy + 10y^2$  sous la contrainte budgétaire (C).

Ici le Lagrangien n'est pas utile puisque  $x = \frac{13-57y}{22}$  et il suffit d'optimiser :

$$\begin{cases} -8897y^2 + 35588y + 8056 = 0 \\ x = \frac{13-57y}{22} \end{cases} . \text{ On obtient } y = 2 \text{ et } x = 1. \text{ La satisfaction est optimisée avec un}$$

bien X et 2 biens Y.

## Exercice 9

### Consigne

Déterminer et préciser la nature des extrema éventuels de la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :  $f(x,y) = \frac{x^2}{9} + (y-1)^2$  sous la contrainte  $x^2 + 2y = 3$  par la méthode la plus simple.

### Correction

$f$  et la contrainte (C)  $x^2 + 2y = 3$  sont différentiables sur  $\mathbb{R}^2$ . D'autre par ici  $y = \frac{1}{2}(3 - x^2)$  et il suffit

$$\text{d'optimiser } \begin{cases} \varphi(x) = -\frac{x^2}{9} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2\right)^2 \\ y = \frac{1}{2}(3 - x^2) \end{cases} . \varphi(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{18}x^2 + \frac{1}{4} \text{ et } \varphi'(x) = x\left(x^2 - \frac{7}{9}\right).$$

D'où le tableau de variation :

$x$	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{7}}{3}$	$0$	$\frac{\sqrt{7}}{3}$	$+\infty$			
$\varphi'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$\varphi$		↘		↗	↘		↗	

On en déduit que  $\varphi$  atteint un maximum local en  $x = 0$  et deux minima locaux en  $x = -\frac{\sqrt{7}}{3}$  et  $x = \frac{\sqrt{7}}{3}$ . Donc  $f$  atteint, sous la contrainte (C) un maximum local en  $(0, \frac{3}{2})$  et deux minima locaux en  $(-\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{10}{9})$  et en  $(\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{10}{9})$ .

## Exercice 10

### Consigne

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies par  $f(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2$  et  $g(x,y,z) = f(x,y,z) + x^3$ .

1)  $f$  admet-elle un maximum global ? Un minimum global ? un maximum local ? un minimum local ? (Justifier les réponses)

2) Mêmes question pour  $g$ .

### Correction

1) Quand  $x$ , ou  $y$  ou  $z$  tend vers l'infini  $f$  tend vers  $+\infty$ , donc  $f$  n'a pas de maximum global. D'autre part pour tout  $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \geq 0 = f(0,1,2)$ . Donc  $f$  atteint un minimum global en  $(0,1,2)$  qui vaut 0. C'est aussi un minimum local de  $f$ .  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-1)$  et  $\frac{\partial f}{\partial z} = 2(z-2)$ . Donc  $(0,1,2)$  est le seul point stationnaire de  $f$  est c'est le seul minimum local de  $f$ .

2) De même quand  $x$  tend vers  $+\infty, g$  tend vers  $+\infty$ , donc  $g$  n'a pas de maximum global.

Quand  $x$  tend vers  $-\infty, g$  tend vers  $-\infty$ , donc  $g$  n'a pas de minimum global.

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x + 3x^2, \frac{\partial g}{\partial y} = 2(y-1)$  et  $\frac{\partial g}{\partial z} = 2(z-2)$ .  $g$  a donc deux points stationnaires  $(0,1,2)$  et  $(-\frac{2}{3}, 1, 2)$

$g(x,y,z) - g(0,1,2) = x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 + x^3 \approx x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2$  au voisinage de  $(0,1,2)$  (en effet au voisinage de 0,  $x^3$  est négligeable devant  $x^2$ ). Donc  $g(x,y,z) - g(0,1,2) \geq 0$  au voisinage de  $(0,1,2)$  et  $g$  atteint un minimum local en  $(0,1,2)$ .

$\Delta = g(x,y,z) - g(-\frac{2}{3}, 1, 2) = x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 + x^3 - \frac{44}{27}$ .

Posons  $x = -\frac{2}{3} + h, y = 1 + k$  et  $z = 2 + t$ .  $(x,y,z)$  est voisin de  $(-\frac{2}{3}, 1, 2)$  si et seulement si  $(h,k,t)$  est voisin de  $(0,0,0)$ .

$\Delta = (-\frac{2}{3} + h)^2 + k^2 + t^2 + (-\frac{2}{3} + h)^3 - \frac{44}{27} = -\frac{14}{9}h^2 + k^2 + t^2 + h^3 \approx -\frac{14}{9}h^2 + k^2 + t^2$  au voisinage de  $(0,0,0)$ . Sur tout voisinage de  $(0,0,0)$  on peut avoir  $h = 0$  et  $\Delta \geq 0$ . Sur tout voisinage de

$(0,0,0)$  on peut aussi avoir  $k = t = 0$  et  $\Delta \leq 0$ . Ainsi  $\Delta$  change de signe pour  $(h,k,t)$  voisin de  $(0,0,0)$ . Ainsi  $(-\frac{2}{3}, 1, 2)$  est un point col de  $g$ .  $g$  a donc seulement un minimum local et pas de maximum local.

## Exercice 11

### Consigne

Soient  $f$  et  $g$  des fonctions de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  définies par :

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + \ln|z| \text{ et } g(x, y, z) = x + z + 2.$$

- 1) Préciser l'ensemble sur lequel  $f$  et  $g$  admettent des dérivées partielles d'ordre 2.
- 2) Déterminer le plus simplement possible les extrema de  $f$  sous la contrainte  $g(x,y,z) = 0$ .

### Correction

1)  $f$  et  $g$  admettent des dérivées partielles d'ordre 2 sur  $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z \neq 0\}$ .

2) Ici on peut écrire  $x = -z - 2$  et optimiser  $f$  sous la contrainte (C)  $x + z + 2 = 0$  revient à optimiser

$$\begin{cases} \varphi(y, z) = \frac{1}{2}(z+2)^2 + y^2 + \ln|z| \\ x = -z - 2 \\ (x, y, z) \in \mathcal{D} \end{cases} . \text{ Si } z \neq 0, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial z} = z + 2 + \frac{1}{z} = \frac{z^2 + 2z + 1}{z} = \frac{(z+1)^2}{z}. \varphi \text{ a donc pour}$$

unique point stationnaire  $A(0, -1)$  ( $-1 \neq 0$ ).

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 0$  et  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 1 - \frac{1}{z^2}$  et  $\delta = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) = -2\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) = 0$ . On ne peut pas conclure et il faut faire une étude directe de  $\varphi(y,z) - \varphi(0, -1)$  au voisinage de  $(0, -1)$ . Posons  $z = -1 + t$ ,  $(y,z)$  est voisin de  $(0, -1)$  si et seulement si  $(y,t)$  est voisin de  $(0,0)$  et  $-1 + t < 0$  donc  $|z| = |-1 + t| = 1 - t$ .

$$\varphi(y,z) - \varphi(0, -1) = \frac{1}{2}(1+t)^2 + y^2 + \ln(1-t) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + t + \frac{t^2}{2} + y^2 + \left(-t - \frac{1}{2}t^2 + \text{reste}\right) - \frac{1}{2}.$$

Le terme "reste" désigne une quantité négligeable devant les termes d'ordre inférieur ou égal à deux quand  $t$  est voisin de 0.  $\varphi(y,z) - \varphi(0, -1) = t^2 + y^2 + \text{reste}$ .

Donc  $\varphi(y,z) - \varphi(0, -1) \geq 0$  pour  $(y,t)$  voisin de  $(0,0)$  et  $\varphi$  atteint un minimum en  $(0, -1)$ .

Donc  $f$  sous la contrainte (C) atteint un minimum local en  $(-1, 0, -1)$ .

## Exercice 12

### Consigne

Déterminer et préciser la nature des extrema éventuels des fonctions  $f$  suivantes, les variables  $x$  et  $y$  étant liées par une contrainte :

1)  $f(x, y) = 3x - 5y, (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2.$

2)  $f(x, y) = 2x + y, x^2 + y^2 = 5$

### Correction

1)  $f$  et la contrainte (C)  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$  admettent des dérivées partielles à tous les ordres sur  $\mathbb{R}^2$ .

Ici il faut utiliser le Lagrangien  $L(x, y, \lambda) = 3x - 5y + \lambda((x - 1)^2 + (y + 1)^2 - 2).$

a) Recherche des points stationnaires du Lagrangien :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 3 + 2\lambda(x - 1), \frac{\partial L}{\partial y} = -5 + 2\lambda(y + 1) \text{ et } \frac{\partial L}{\partial \lambda} = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 - 2.$$

$(x_0, y_0)$  est un point stationnaire de  $L$  pour la valeur  $\lambda_0$  de  $\lambda$  si et seulement si

$$\begin{cases} 2\lambda_0(x_0 - 1) = -3 \\ 2\lambda_0(y_0 + 1) = 5 \\ (x_0 - 1)^2 + (y_0 + 1)^2 = 2 \end{cases} . \lambda_0 = 0. \text{ n'est pas solution et } x_0 = 1 + \frac{-3}{2\lambda_0} \text{ et } y_0 = -1 + \frac{5}{2\lambda_0} \text{ En reportant dans}$$

la dernière équation on obtient  $\lambda_0 = \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$ . Et on a deux points stationnaires :

$$A\left(1 - \frac{3\sqrt{17}}{17}, -1 + \frac{5\sqrt{17}}{17}\right) \text{ pour } \lambda = \frac{\sqrt{17}}{2} \text{ et } B\left(1 + \frac{3\sqrt{17}}{17}, -1 - \frac{5\sqrt{17}}{17}\right) \text{ pour } \lambda = -\frac{\sqrt{17}}{2}$$

b) Etude de  $\Delta = f(x, y) - f(x_0, y_0)$  au voisinage de  $(x_0, y_0)$  sous (C).

Pour  $A\left(1 - \frac{3\sqrt{17}}{17}, -1 + \frac{5\sqrt{17}}{17}\right)$  :

Posons  $x = 1 - \frac{3\sqrt{17}}{17} + h$  et  $y = -1 + \frac{5\sqrt{17}}{17} + k$ .  $(x, y)$  est voisin de  $\left(1 - \frac{3\sqrt{17}}{17}, -1 + \frac{5\sqrt{17}}{17}\right)$  si et seulement si

$$(h, k) \text{ est voisin de } (0, 0). \text{ On a } \begin{cases} \Delta = 3h - 5k \\ h^2 - \frac{6\sqrt{17}}{17}h + k^2 + \frac{10\sqrt{17}}{17}k = 0 \end{cases} .$$

La dernière équation (contrainte) donne  $3h - 5k = \frac{\sqrt{17}}{2}(h^2 + k^2)$ . Donc  $\Delta = \frac{\sqrt{17}}{2}(h^2 + k^2) \geq 0$  pour  $(h, k)$  voisin de  $(0, 0)$  et, sous la contrainte (C),  $f$  atteint un minimum local en  $A$ .

Pour  $B\left(1 + \frac{3\sqrt{17}}{17}, -1 - \frac{5\sqrt{17}}{17}\right)$  :

Posons  $x = 1 + \frac{3\sqrt{17}}{17} + h$  et  $y = -1 - \frac{5\sqrt{17}}{17} + k$ .  $(x,y)$  est voisin de  $(1 + \frac{3\sqrt{17}}{17}, -1 - \frac{5\sqrt{17}}{17})$  si et seulement si

$(h,k)$  est voisin de  $(0,0)$ . On a 
$$\begin{cases} \Delta = 3h - 5k \\ h^2 + \frac{6\sqrt{17}}{17}h + k^2 - \frac{10\sqrt{17}}{17}k = 0 \end{cases}$$

La dernière équation (contrainte) donne  $3h - 5k = -\frac{\sqrt{17}}{2}(h^2 + k^2)$ . Donc  $\Delta = -\frac{\sqrt{17}}{2}(h^2 + k^2) \leq 0$  pour  $(h,k)$  voisin de  $(0,0)$  et, sous la contrainte (C),  $f$  atteint un maximum local en B.

2)  $f$  et la contrainte (C)  $x^2 + y^2 = 5$  admettent des dérivées partielles à tous les ordres sur  $\mathbb{R}^2$ . Ici il faut utiliser le Lagrangien  $L(x, y, \lambda) = 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$ .

a) Recherche des points stationnaires du Lagrangien :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2 + 2\lambda x, \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y \text{ et } \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5.$$

$(x_0, y_0)$  est un point stationnaire de  $L$  pour la valeur  $\lambda_0$  de  $\lambda$  si et seulement si 
$$\begin{cases} \lambda_0 x_0 = -1 \\ 2\lambda_0 y_0 = -1 \\ x_0^2 + y_0^2 = 5 \end{cases}$$

$\lambda_0 = 0$ , n'est pas solution et  $x_0 = \frac{-1}{\lambda_0}$  et  $y_0 = \frac{-1}{2\lambda_0}$ . En reportant dans la dernière équation on obtient

$\lambda_0 = \pm \frac{1}{2}$ . Et on a deux points stationnaires : A(-2, -1) pour  $\lambda = \frac{1}{2}$  et B(2,1) pour  $\lambda = -\frac{1}{2}$ .

b) Etude de  $\Delta = f(x,y) - f(x_0, y_0)$  au voisinage de  $(x_0, y_0)$  sous (C).

Pour A(-2, -1) :

Posons  $x = -2 + h$  et  $y = -1 + k$ .  $(x,y)$  est voisin de  $(-2, -1)$  si et seulement si  $(h,k)$  est voisin de  $(0,0)$ .

On a 
$$\begin{cases} \Delta = 2h + k \\ h^2 - 4h + k^2 - 2k = 0 \end{cases}$$
. La dernière équation (contrainte) donne  $2h + k = -\frac{1}{2}(h^2 + k^2)$ . Donc

$\Delta = -\frac{1}{2}(h^2 + k^2) \leq 0$  pour  $(h,k)$  voisin de  $(0,0)$  et, sous la contrainte (C),  $f$  atteint un maximum local en B.

## Exercice 13

### Consigne

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x,y) = \frac{1}{1+xy} - x^2 + 2x$  que l'on cherche à optimiser sous la contrainte  $e^{xy} = 2y^2 + 1$ .

1) Déterminer l'ensemble sur lequel  $f$  est différentiable.

2) Montrer que  $(1,0)$  est un point stationnaire du Lagrangien.

## Correction

1)  $f$  est différentiable sur  $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; xy \neq -1\}$ . La contrainte est différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ .

2)  $(1,0) \in \mathcal{D}$  et sur  $\mathcal{D}$  et pour  $\lambda \in \mathbb{R}, L(x,y,\lambda) = \frac{1}{1+xy} - x^2 + 2x + \lambda(e^{xy} - 2y^2 - 1)$ .

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{-y}{(1+xy)^2} - 2x + 2 + \lambda y e^{xy}, \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{-x}{(1+xy)^2} + \lambda(xe^{xy} - 4y) \text{ et}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = e^{xy} - 2y^2 - 1$$

$\frac{\partial L}{\partial x}(1,0) = 0, \frac{\partial L}{\partial y}(0,1) = -1 +$  et  $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ . Donc  $(1,0)$  est bien un point stationnaire du Lagrangien  $L$  correspondant à la valeur 1 du multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ .

## Exercice 14

### Consigne

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1$ . On considère  $f$  sous la contrainte (C)  $4x^2 - y^2 = 0$ .

1) Montrer que  $A = \left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$  est un point stationnaire du Lagrangien.

2)  $A$  est-il un extrema de  $f$  sous la contrainte (C) ?

### Correction

1)  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2$  ainsi que (C).

Le Lagrangien est  $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 + \lambda(4x^2 - y^2)$ .

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 4 + 8\lambda x, \frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2 - 2\lambda y \text{ et } \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 4x^2 - y^2.$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}\left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right) = \frac{12}{5} - \frac{32}{5}\lambda, \frac{\partial L}{\partial y}\left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right) = \frac{6}{5} - \frac{16}{5}\lambda \text{ et } \frac{\partial L}{\partial \lambda}\left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right) = 0.$$

Donc si  $\lambda = \frac{3}{8}, \frac{\partial L}{\partial x}\left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right) = 0, \frac{\partial L}{\partial y}\left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right) = 0$  et  $\frac{\partial L}{\partial \lambda}\left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right) = 0$ . Et  $A\left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$  est bien un point stationnaire de  $L$  correspondant à  $\lambda = \frac{3}{8}$ .

2) Nature de  $A\left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$  :

Etudions le signe de  $\Delta = f(x,y) - f\left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$  au voisinage de  $\left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$  sous (C).

Posons  $x = -\frac{4}{5} + h$  et  $y = \frac{8}{5} + k$ .  $(x,y)$  est voisin de  $(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$  si et seulement si  $(h,k)$  est voisin de  $(0,0)$ .

$$\text{On a } \begin{cases} \Delta = \left(-\frac{4}{5} + h\right)^2 + \left(\frac{8}{5} + k\right)^2 + 4\left(-\frac{4}{5} + h\right) - 2\left(\frac{8}{5} + k\right) + 1 \\ \left(-\frac{4}{5} + h\right)^2 - \left(\frac{8}{5} + k\right)^2 = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} \Delta = \frac{12}{5}h + \frac{6}{5}k + h^2 + k^2 \\ -\frac{32}{5}h - \frac{6}{5}k + 4h^2 - k^2 = 0 \end{cases}$ . Donc  $\frac{12}{5}h + \frac{6}{5}k = \frac{3}{8}(4h^2 - k^2)$  et  $\Delta = \frac{5}{2}h^2 + \frac{5}{8}k^2 \geq 0$ .  $A\left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$  correspond donc à un minimum de  $f$  sous la contrainte (C).

## Exercice 15

### Consigne

Un fabricant de gravier pour cours de maison en produit 2 catégories : du gravier grossier et du gravier fin. Une tonne de gravier grossier nécessite 2 heures de broyage, 5 heures de criblage et 8 heures de séchage. Une tonne de gravier fin exige 6 heures de broyage, 3 heures de criblage et 2 heures de séchage. La marge de profit est de 40€ pour le gravier grossier et de 50€ pour le gravier fin. Le fabricant dispose de 36 heures pour le broyage, 30 pour le criblage et de 40 heures pour le séchage.

Déterminer la combinaison des produits qui maximisera les profits.

### Correction

Soit  $\Pi$  le profit du fabricant. Si  $x$  est la quantité de gravier grossier (en tonnes) et  $y$  celle de gravier

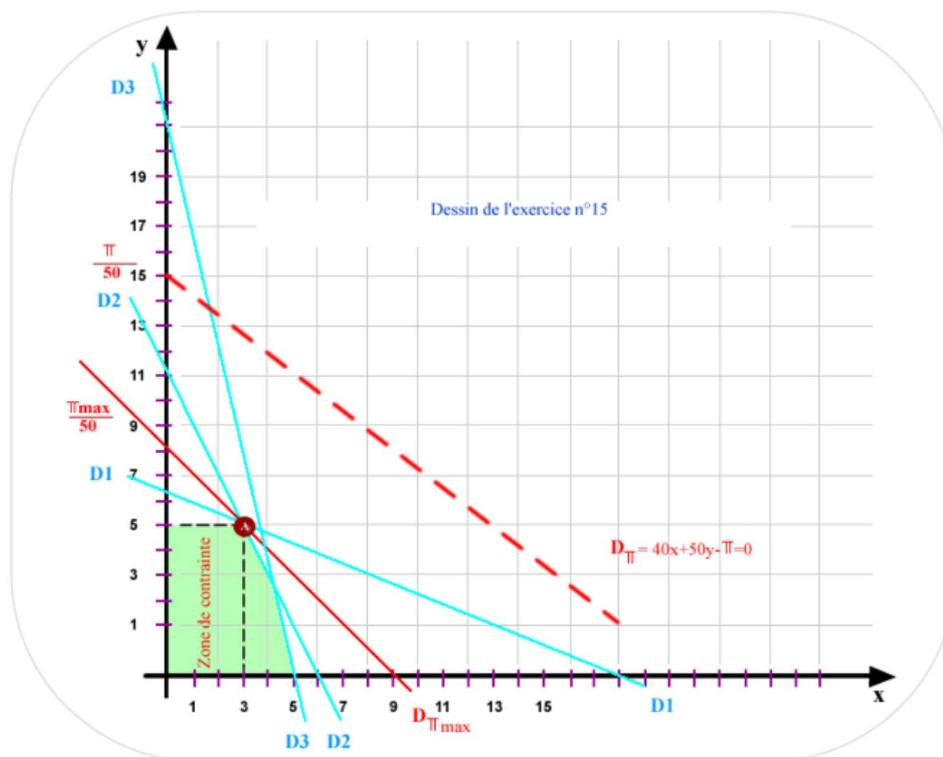
fin (en tonnes). On a :  $\Pi = 40x + 50y$  et les contraintes  $\begin{cases} 2x + 6y \leq 36 \text{ (broyage)} \\ 5x + 3y \leq 30 \text{ (criblage)} \\ 8x + 2y \leq 40 \text{ (séchage)} \\ x \in \mathbb{N} \text{ et } y \in \mathbb{N} \end{cases}$

On représente les droites  $D_1, D_2$  et  $D_3$  d'équations respectives,  $2x + 6y = 36, 5x + 3y = 30$  et  $8x + 2y = 40$ .

La zone de contrainte est dans le premier quadrant (car  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ ) et à l'intersection des trois demi-plans définis par les inégalités ci-dessus et délimités par ces trois droites (zone verte du dessin). Soit  $D_\Pi$ , les droites d'équation

$40x + 50y - \Pi = 0$  ( $\Pi$  joue le rôle de paramètre). Plus la droite  $D_\Pi$  est éloignée de l'origine, plus  $\Pi$  est grand ( $\frac{\Pi}{50}$  est l'ordonnée à l'origine). Le point cherché correspondant au profit maximum est à l'intersection de la zone de contrainte et de la droite  $D_\Pi$  la plus éloignée de 0 (droite rouge).

C'est le point A(3,5). Le profit maximum correspond à 3 tonnes de gravier grossier et 5 tonnes de gravier fin. Et le profit maximum vaut  $\Pi_{\max} = 3 \times 40 + 5 \times 50 = 370\text{€}$ .



## Exercice 16

### Consigne

La société anonyme des fonderies de Bretagne fabrique, entre autres produits, deux articles  $P_1$  et  $P_2$  qu'elle vend à des grossistes aux prix respectifs de 320€ et 500€. La fabrication des produits  $P_1$  et  $P_2$  nécessite l'utilisation, dans un ordre quelconque de 3 types de machines notées  $M_1, M_2$  et  $M_3$ , pendant des temps exprimés en minutes dans le tableau suivant :

	Machines	$M_1$	$M_2$	$M_3$
Produits				
$P_1$		20	50	10
$P_2$		30	50	40

Pour cette fabrication, ces machines sont disponibles au cours d'un mois :

300h pour les machines  $M_1$ , 500h pour les machines  $M_2$  et 200h pour les machines  $M_3$ . Les marges sur coûts variables, en pourcentage du prix de vente, s'élèvent à 25% pour  $P_1$ , 20 % pour  $P_2$ .

- 1) Préciser un programme de production permettant d'obtenir la marge sur coût variable maximale et le résoudre par la méthode graphique.
- 2) En déduire le chiffre d'affaire prévisionnel mensuel.
- 3) Une société  $X$  propose de louer l'ensemble des heures disponibles de  $M_1, M_2$  et  $M_3$  aux fonderies de Bretagne. On cherche à déterminer le prix de la location d'une minute de  $M_1$ , d'une minute de  $M_2$  et d'une minute de  $M_3$ . Le marché ne peut se traiter bien-sûr que dans la mesure où la location du temps machine équivalent à la production d'une unité de  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) "rapporte" davantage qu'une unité de  $P_1$  (resp.  $P_2$ ). Il s'agit ici du problème dual au précédent. Poser le problème sans le résoudre.

### Correction

1) Si on fabrique  $x$  produits  $P_1$  et  $y$  produits  $P_2$ , on a les contraintes suivantes :

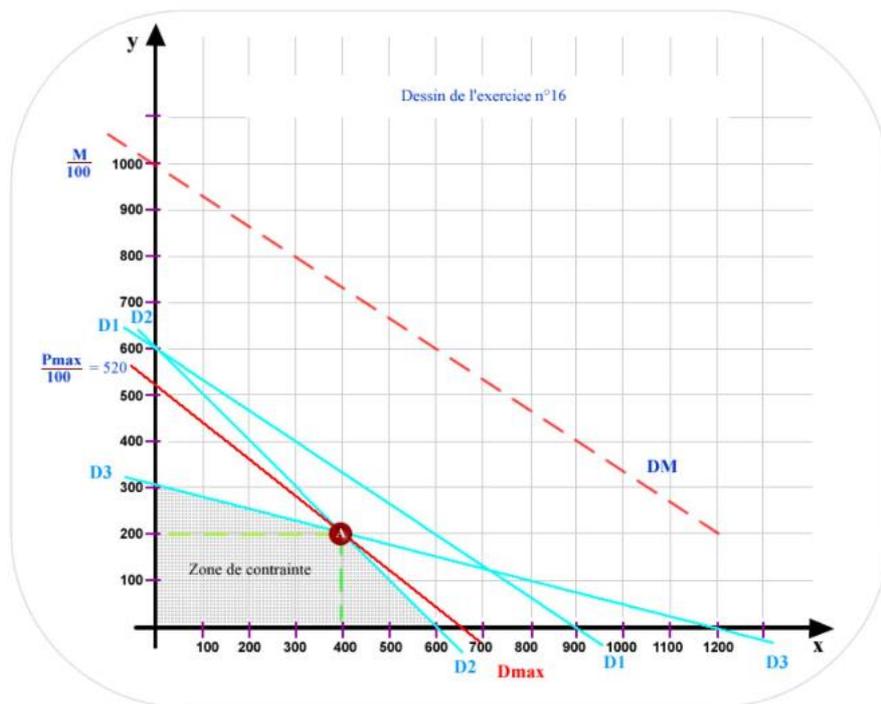
$$\begin{cases} 20x + 30y \leq 300 \times 60 \text{ (pour } M_1) \\ 50x + 50y \leq 500 \times 60 \text{ (pour } M_2) \\ 10x + 40y \leq 200 \times 60 \text{ (pour } M_3) \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 2x + 3y \leq 1800 \\ x + y \leq 600 \\ x + 4y \leq 1200 \end{cases} \cdot \\ x \in \mathbf{N} \text{ et } y \in \mathbf{N}$$

La marge  $M$  sera alors  $M = 25\%(320x) + 20\%(500y)$ . On veut donc optimiser  $M = 80x + 100y$  (ou  $\frac{M}{100} = \frac{4}{5}x + y$ ). La zone de contrainte est la zone grisée, dans le premier quadrant (car  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ ) et à l'intersection des trois demi-plans définis par les inégalités si dessus et délimités par les  $D_1(2x + 3y = 1800)$ ,  $D_2(x + y = 600)$  et  $D_3(x + 4y = 1200)$ . On cherche la droite  $D_M(4x + 5y = \frac{M}{20})$  située dans cette zone, d'ordonnée à l'origine  $(\frac{M}{100})$  maximum (la plus éloignée de 0). La droite cherchée  $D_{\max}$  (droite rouge) rencontre la zone de contrainte en  $A(400,200)$ . Le maximum de  $M$  est donc atteint pour  $x = 400$  et  $y = 200$  et  $M_{\max} = 80 \times 400 + 100 \times 200 = 52000\text{€}$

2) Le chiffre d'affaire prévisionnel mensuel sera alors de  $320 \times 400 + 500 \times 200 = 228000 \text{€}$ .

3) Soit  $x$  le prix de la minute de  $M_1$ ,  $y$  celui de  $M_2$  et  $z$  celui de  $M_3$ . Pour  $P_1$  le prix de revient est  $20x + 50y + 40z$ , et  $P_1$  rapporte  $80 \text{€}$ . De même le prix de revient de  $P_2$  est  $30x + 50y + 40z$ , et  $P_2$  rapporte  $100 \text{€}$ .  $X$  veut bien sûr minimiser le coût global de l'opération soit rendre  $300 \times 60x +$

$$500 \times 60y + 200 \times 60z \text{ minimum sous les contraintes } \begin{cases} 20x + 50y + 10z \geq 80 \\ 30x + 50y + 40z \geq 100 \\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \text{ et } z \geq 0 \end{cases}$$



## Exercice 17

### Consigne

Dans une exploitation agricole, on doit choisir entre deux types d'engrais A et B pour fertiliser les terres. Celles-ci requièrent au moins  $60\text{kg}$  de potassium,  $120\text{g}$  de calcium et  $90\text{g}$  de sodium par hectare.

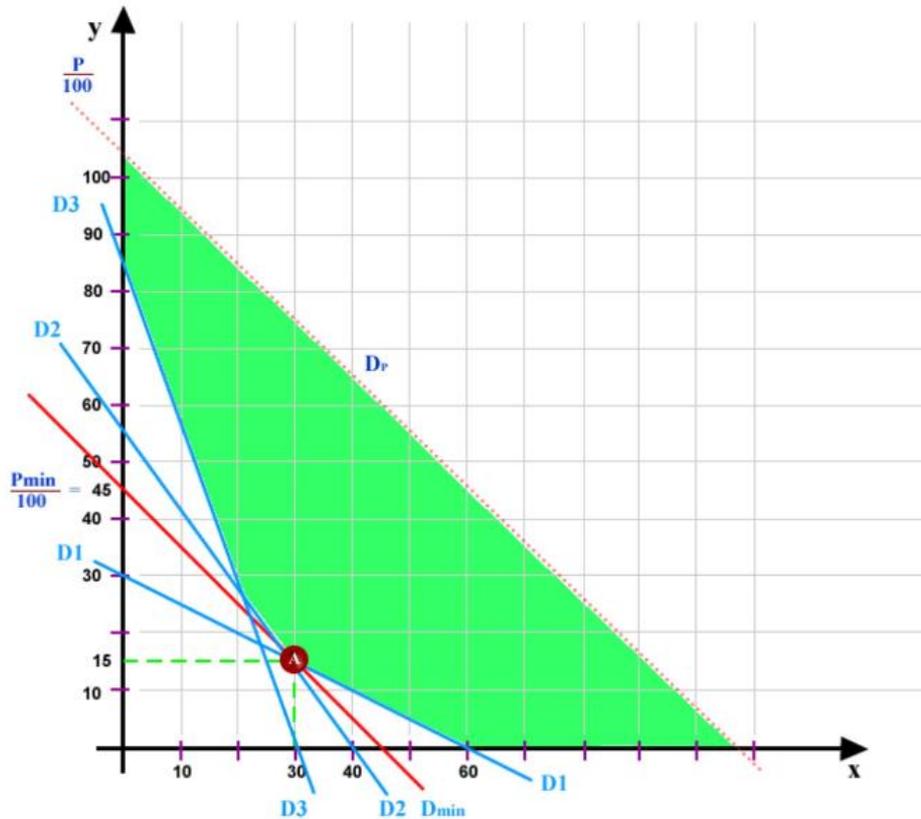
Dans un paquet d'engrais A, il y a  $1\text{kg}$  de potassium,  $3\text{kg}$  de calcium et  $3\text{kg}$  de sodium. Dans un paquet B, il y a  $2\text{kg}$  de potassium,  $2\text{kg}$  de calcium et  $1\text{kg}$  de sodium. Quelles sont les quantités optimales de A et de B à utiliser par hectare, si le prix des paquets est de  $100\text{€}$  pour A et pour B.

### Correction

Soit  $x$  le nombre de paquets A et  $y$  le nombre de paquets B. On a les contraintes 
$$\begin{cases} x + 2y \geq 60 \\ 3x + 2y \geq 120 \\ 3x + y \geq 90 \\ x \in \mathbf{N} \text{ et } y \in \mathbf{N} \end{cases}$$

et on doit minimiser le prix des paquets,  $P = 100x + 100y$  (soit  $\frac{P}{100} = x + y$ ). La zone de contrainte est la zone verte, dans le premier quadrant (car  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ ) et à l'intersection des trois demi-plans définis par les inégalités si dessus et délimités par les  $D_1(x + 2y = 60)$ ,  $D_2(3x + 2y = 120)$  et  $D_3(3x + y = 90)$ . On cherche la droite  $D_p(x + y = \frac{P}{100})$  située dans cette zone et d'ordonnée à l'origine  $(\frac{P}{100})$  minimum. La droite cherchée  $D_{\min}$  (droite rouge) rencontre la zone

de contrainte en A(30,15). Le minimum de P est donc atteint pour  $x = 30$  et  $y = 15$  et  $P_{\min} = 100 \times 30 + 100 \times 15 = 4500\text{€}$  par hectare.



## Références

### Comment citer ce cours ?

Mathématiques 2, Odile Brandière, AUNEGe (<http://auneg.fr>), CC – BY NC ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).



Cette œuvre est mise à disposition dans le respect de la législation française protégeant le droit d'auteur, selon les termes du contrat de licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>). En cas de conflit entre la législation française et les termes de ce contrat de licence, la clause non conforme à la législation française est réputée non écrite. Si la clause constitue un élément déterminant de l'engagement des parties ou de l'une d'elles, sa nullité emporte celle du contrat de licence tout entier.