Fonctions à plusieurs variables

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices

Exercice 1

Consigne

Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes après avoir précisé l'ensemble sur lequel le calcul est possible :

1) $f(x,y) = \frac{x^2 - xy}{xy^2}$

2) $f(x,y) = \sqrt{x^2y - 2xy + 3}$

3) $f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x + y^2}\right)$

4) $f(x,y) = x^2 \exp\left(\frac{xy}{y+1}\right)$.

Exercice 2

Consigne

Ecrire les différentielles df des fonctions f définies par les expressions suivantes, après avoir précisé l'ensemble des couples (x,y) pour lesquels le calcul est possible :

1) $f(x,y) = x^2 + xy^2$

2) $f(x,y) = \frac{x^3y}{x-y+1}$

3) $f(x,y) = xexp\left(1 + \frac{x}{y}\right)$

4) $f(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{x+1}$

Exercice 3

Consigne

Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 et au voisinage de (x_0, y_0) dans les cas suivants :

1) $f(x, y) = \sqrt{xy + 2x - y - 1}$ et $(x_0, y_0) = (1, -1)$;

2) $f(x, y) = \frac{\ln(2+x^2-2x+y)}{x^2y-2xy+y+x-2}$ et $(x_0, y_0) = (1,0)$.

Exercice 4

Consigne

Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions suivantes :

1) $(x, y, z) \to 3xy^2 - x^3z^2 + xyz - 1$

2) $(x, y, z) \to (x + y)\ \exp\left(\frac{y}{x+z}\right)$

3) $(x, y, z) \to \frac{x}{z} \ln y^2$.

Exercice 5

Consigne

Soit $F(x,y) = e^{xy} - x^3 + y$. Montrer qu'au voisinage de $(1,0)$,$F(x,y) = 0$ définit y comme fonction implicite de x. Calculer $\frac{dy}{dx}(1)$.

Exercice 6

Consigne

Soit f la fonction définie sur R^2 par $f(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{x+1}$

1) Préciser ensemble sur lequel f est différentiable (faire un dessin rapide).

2) La relation $f(x,y) - 2 = 0$ définit-elle, au voisinage de $(0,e)$, une fonction ϕ telle que $y = \phi(x)$? (Citer le théorème utilisé)

3) Calculer $\phi'(0)$.

Exercice 7

Consigne

1) Soit f, une fonction homogène de degré 1 et deux fois continûment différentiable.

Ecrire la formule d'Euler. En déduire que :

(1) $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$. (on pourra dériver partiellement par rapport à x la formule d'Euler)

Trouver une formule analogue liant $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Montrer alors que

(2) $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

2) Soit $f(x,y) = \frac{xy\ln\left(\frac{x}{y}+1\right)}{x+y}$. Déterminer l'ensemble des (x,y) pour lesquels f est deux fois continûment différentiable (faire un dessin). Montrer que f est homogène et déterminer son degré d'homogénéité. Vérifier (1) et (2).

Exercice 8

Consigne

Soit f une fonction de R^3 dans R définie par $f(x,y,z) = x^3 \ln \frac{x^2+y^2}{z^2}$.

1) Donner l'ensemble de définition de f et l'ensemble sur lequel f admet des dérivées partielles d'ordre 1.

2) Montrer que f est homogène et préciser son degré d'homogénéité.

3) Calculer les dérivées partielles de f d'ordre 1 et vérifier la relation d'Euler.

Exercice 9

Consigne

La fonction de Coog-Douglas :

Soit $f: (L,K) \rightarrow Q = K^{\alpha}L^{1-\alpha} (0 < \alpha < 1)$

1) Calculer le taux marginal de substitution T de f.

2) En déduire l'élasticité de substitution σ de f.

Exercice 10

Consigne

La fonction de production C.E.S

Soit f : $(L, K) \rightarrow Q = A[\alpha K^{-\gamma} + (1-\alpha)L^{-\gamma}]^{-1/\gamma} \quad (A > 0,\ \gamma > 1$ et $0 < \alpha < 1)$

1) Calculer le taux marginal de substitution T de f.

2) En déduire l'élasticité de substitution σ de f.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 2, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).