Fonctions à plusieurs variables

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices corrigés

Attention : ceci est la version corrigée des exercices.

Exercice 1

Consigne

Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes après avoir précisé l'ensemble sur lequel le calcul est possible :

1) $f(x, y) = \frac{x^2 - xy}{xy^2}$

2) $f(x, y) = \sqrt{x^2y - 2xy + 3}$

3) $f(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x + y^2}\right)$

4) $f(x, y) = x^2 \exp\left(\frac{xy}{y+1}\right)$.

Correction

1) f admet des dérivées partielles premières sur $\mathcal{D} = \{(x,y) \in R^2; x \neq 0 \text{ et } y \neq 0\}$. Sur $\mathcal{D}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y-2x}{y^3}$ (pour faire ce calcul on pourra remarquer que $f(x,y) = \frac{x}{y^2} - \frac{1}{y}$)

2) f admet des dérivées partielles premières sur $\mathcal{D} = \{(x, y) \in R^2; x^2y - 2xy + 3 > 0\}$. Sur $\mathcal{D}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{xy-y}{\sqrt{x^2y-2xy+3}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2-2x}{2\sqrt{x^2y-2xy+3}}$.

3) f admet des dérivées partielles premières sur $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in R^2; x + y^2 > 0 \text{ et } x + \sqrt{x + y^2} > 0\right\}$. Sur $\mathcal{D}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}}{x+\sqrt{x+y^2}} = \frac{1/2+\sqrt{x+y^2}}{x+y^2+x\sqrt{x+y^2}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{y}{\sqrt{x+y^2}}}{x+\sqrt{x+y^2}} = \frac{y}{x+y^2+x\sqrt{x+y^2}}$

4) f admet des dérivées partielles premières sur $\mathcal{D} = \{(x,y) \in R^2 ; y \neq -1\}$. Sur $\mathcal{D}, \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \exp\left(\frac{xy}{y+1}\right) + \frac{x^2 y}{y+1} \exp\left(\frac{xy}{y+1}\right)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{(y+1)^2} \exp\left(\frac{xy}{y+1}\right)$.

Exercice 2

Consigne

Ecrire les différentielles df des fonctions f définies par les expressions suivantes, après avoir précisé l'ensemble des couples (x,y) pour lesquels le calcul est possible :

1) $f(x,y) = x^2 + xy^2$

2) $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x-y+1}$

3) $f(x,y) = x exp\left(1 + \frac{x}{y}\right)$

4) $f(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{x+1}$

Correction

1) Sur IR^2: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$. Donc $df = (2x + y^2)dx + 2xydy$.

2)f est différentiable sur $\mathcal{D} = \{(x,y) \in IR^2 ; x - y + 1 \neq 0\}$. Sur $\mathcal{D}, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x^3y - 3x^2y^2 + 3x^2y}{(x-y+1)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^4 + x^3}{(x-y+1)^2}$, d'où $df = \frac{2x^3y - 3x^2y^2 + 3x^2y}{(x-y+1)^2} dx + \frac{x^4+x^3}{(x-y+1)^2} dy$.

3) f est différentiable sur $\mathcal{D} = \{(x,y) \in IR^2 ; y \neq 0\}$. Sur $\mathcal{D}, \frac{\partial f}{\partial x} = \exp\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} \exp\left(1 + \frac{x}{y}\right)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^2}{y^2} \exp\left(1 + \frac{x}{y}\right)$, d'où $\mathrm{df} = \exp\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} \exp\left(1 + \frac{x}{y}\right) dx + \frac{-x^2}{y^2} \exp\left(1 + \frac{x}{y}\right) dy$.

4) f est différentiable sur $\mathcal{D} = \{(x,y) \in IR^2 ; x \neq -1 \text{ et } (x,y) \neq (0,0)\}$. Sur $\mathcal{D}, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(x+1) - (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(x+1)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{(x^2+y^2)(x+1)}$, d'où $df = \frac{2x(x+1) - (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(x+1)^2} dx + \frac{2y}{(x^2+y^2)(x+1)} dy$.

Exercice 3

Consigne

Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 et au voisinage de (x_0, y_0) dans les cas suivants :

1) $f(x,y) = \sqrt{xy + 2x - y - 1}$ et $(x_0, y_0) = (1, -1)$;

2) $f(x,y) = \frac{\ln(2 + x^2 - 2x + y)}{x^2 y - 2xy + y + x - 2}$ et $(x_0, y_0) = (1,0)$.

Correction

Rappel : pour x voisin de zéro.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x) \quad (m \in R)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

1) Posons $\mathrm{x} = 1 + \mathrm{h}$ et $\mathrm{y} = -1 + \mathrm{k}$.$\mathrm{f(x,y)} = \mathrm{f}(1+\mathrm{h}, -1+\mathrm{k}) = \sqrt{1 + (\mathrm{hk} + \mathrm{h})}$.

$(\mathrm{x,y})$ est voisin de $(1,-1)$ si et seulement si $(\mathrm{h,k})$ est voisin de $(0,0)$.

Donc $\mathrm{hk} + \mathrm{h}$ est voisin de 0 et en utilisant le deuxième DL avec $\mathrm{m} = \frac{1}{2}$, on a $\sqrt{1 + (hk+h)} = 1 + \frac{1}{2}(hk+h) - \frac{1}{8}(hk+h)^2 + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k) \left(\backslash operatornameavec \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0\right)$.

En ne gardant dans la partie régulière que les termes de degré inférieur ou égal à 2 :

$$f(1+h,-1+k) = 1 + \tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{2}hk - \tfrac{1}{8}h^2 + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k).$$

2) Posons $\mathrm{x} = 1 + \mathrm{h}$.$\mathrm{f(x,y)} = \mathrm{f}(1+\mathrm{h},\mathrm{y}) = \frac{\ln\left(1+(\mathrm{y}+\mathrm{h}^2)\right)}{-1+(h+h^2\mathrm{y})}$ et $(\mathrm{x,y})$ est voisin de $(1,0)$ si et seulement si $(\mathrm{h,y})$ est voisin de $(0,0)$.

$\mathrm{y} + \mathrm{h}^2$ et $\mathrm{h} + \mathrm{h}^2\mathrm{y}$ sont donc voisins de 0 et en utilisant le troisième DL,

$$\ln\left(1+(y+h^2)\right) = y + h^2 - \tfrac{1}{2}(y+h^2)^2 + (h^2+y^2)\varepsilon(h,y) \left(avec \lim_{(h,y)\to(0,0)} \varepsilon(h,y) = 0\right).$$

En ne gardant dans la partie régulière que les termes de degré inférieur ou égal à 2 :

$$\ln\left(1+(y+h^2)\right) = y + h^2 - \frac{1}{2}y^2 + (h^2+y^2)\varepsilon(h,y)$$

En utilisant le premier DL :

$$\frac{1}{-1+(h+h^2y)} = -\frac{1}{1-(h+h^2y)} = -\left(1 + (h+h^2y) + (h+h^2y)^2 + (h^2+y^2)\varepsilon(h,y)\right)$$

(avec $\lim_{(\mathrm{h,y})\to(0,0)} \varepsilon(\mathrm{h,y}) = 0\Big)$.

En ne gardant dans la partie régulière que les termes de degré inférieur ou égal à 2 :

$$\frac{1}{-1+(h+h^2y)} = -1-h-h^2+(h^2+y^2)\varepsilon(h,y)$$

En faisant le produit des deux DL (1) et (2) on obtient : $f(1+h,y) = -y-hy-h^2+\frac{1}{2}y^2+(h^2+y^2)\varepsilon(h,y)$.

Exercice 4

Consigne

Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions suivantes :

1) $(x,y,z) \to 3xy^2 - x^3z^2 + xyz - 1$

2) $(x,y,z) \to (x+y)\ \exp\left(\frac{y}{x+z}\right)$

3) $(x,y,z) \to \frac{x}{z}\ln y^2$.

Correction

1) Sur IR^2: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3y^2 - 3x^2z^2 + yz, \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy + xz$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = -2x^3z + xy$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6xz^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 6y+z, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = -6x^2z + y, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x, \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = x \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2x^3$$

2) Sur $\mathrm{D} = (x,y,z) \in \boldsymbol{IR^3}; x+z \neq 0$: $\frac{\partial f}{\partial y} = \exp\left(\frac{y}{x+z}\right) - \frac{y(x+y)}{(x+z)^2}\exp\left(\frac{y}{x+z}\right)$,

$\frac{\partial f}{\partial y} = \exp\left(\frac{y}{x+z}\right) + \frac{x+y}{x+z}\exp\left(\frac{y}{x+z}\right)$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{y(x+y)}{(x+z)^2}\exp\left(\frac{y}{x+z}\right)$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{y}{(x+z)^2}\exp\left(\frac{y}{x+z}\right) + \frac{y(x+2y-z)}{(x+z)^3}\exp\left(\frac{y}{x+z}\right) + \frac{y^2(x+y)}{(x+z)^4}\exp\left(\frac{y}{x+z}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{x+z}\exp\left(\frac{y}{x+z}\right) - \frac{x+2y}{(x+z)^2}\exp\left(\frac{y}{x+z}\right) - \frac{y(x+y)}{(x+z)^3}\exp\left(\frac{y}{x+z}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = -\frac{y}{(x+z)^2}\exp\left(\frac{y}{x+z}\right) + \frac{2y(x+y)}{(x+z)^3}\exp\left(\frac{y}{x+z}\right) + \frac{y(x+y)}{(x+z)^4}\exp\left(\frac{y}{x+z}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{(x+z)}\exp\left(\frac{y}{x+z}\right) + \frac{x+y}{(x+z)^2}\exp\left(\frac{y}{x+z}\right)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = -\frac{y}{(x+z)^2}\exp\left(\frac{y}{x+z}\right) - \frac{x+y}{(x+z)^2}\exp\left(\frac{y}{x+z}\right) - \frac{x+y}{(x+z)^3}\exp\left(\frac{y}{x+z}\right)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2y(x+y)}{(x+z)^3}\exp\left(\frac{y}{x+z}\right) + \frac{y^2(x+y)}{(x+z)^4}\exp\left(\frac{y}{x+z}\right)$.

3) Sur $D = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{IR^3} ; y \neq 0 \text{ et } z \neq 0\}$: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{z}\ln y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{yz}$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{x}{z^2}\ln y^2$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{2}{yz}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = \frac{-1}{z^2}\ln y^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2x}{y^2 z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = \frac{-2x}{yz^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2x}{z^3}\ln y^2$.

Exercice 5

Consigne

Soit $F(x,y) = e^{xy} - x^3 + y$. Montrer qu'au voisinage de $(1,0)$,$F(x,y) = 0$ définit y comme fonction implicite de x. Calculer $\frac{dy}{dx}(1)$.

Correction

Remarquons d'abord que $F(1,0) = 1 - 0 + 1 = 0$. D'autre part F est continue, admet des dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x} = ye^{xy} - 3x^2$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = xe^{xy} + 1$ qui sont continues et $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 2 \neq 0$.Donc d'après le théorème des fonctions implicites, $F(x,y) = 0$ définit bien y comme fonction implicite de x. De plus $\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,0)} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$.

Exercice 6

Consigne

Soit f la fonction définie sur R^2 $par\ f(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{x+1}$

1) Préciser ensemble sur lequel f est différentiable (faire un dessin rapide).

2) La relation $f(x,y) - 2 = 0$ définit-elle, au voisinage de $(0,e)$, une fonction ϕ telle que $y = \phi(x)$? (Citer le théorème utilisé)

3) Calculer $\phi'(0)$.

Correction

1) f est différentiable sur $D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R^2} ; xy + 1 \neq 0 \text{ et } (x,y) \neq (0,0)\}$ (IR^2 privé de $(0,0)$ et de l'hyperbole croissante d'équation $y = -\frac{1}{x}$, de centre $(0,0)$ et d'asymptotes $x = 0$ et $y = 0$).

2) Remarquons d'abord que $f(0,e) - 2 = \frac{2}{1} - 2 = 0$. D'autre part f est continue sur $\mathcal{D}$, donc sur un voisinage de $(0,e)$, y admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{2x}{x^2+y^2}(xy+1) - y\ln(x^2+y^2)}{(xy+1)^2}$ et

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{2y}{x^2+y^2}(xy+1) - x\ln(x^2+y^2)}{(xy+1)^2}$ qui sont continues sur $\mathcal{D}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,e) = \frac{2}{e} \neq 0$. Donc d'après le théorème des fonctions implicites, $\mathrm{f(x,y)} - 2 = 0$ définit bien y comme fonction implicite de x, soit ϕ cette fonction. On a $\phi'(0) = -\frac{\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}(0,\mathrm{e})}{\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}(0,\mathrm{e})} = -\frac{-2\mathrm{e}}{2/\mathrm{e}} = \mathrm{e}^2$.

Exercice 7

Consigne

1) Soit f, une fonction homogène de degré 1 et deux fois continûment différentiable.

Ecrire la formule d'Euler. En déduire que :

(1) $x\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}^2} + \mathrm{y}\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} = 0$. (on pourra dériver partiellement par rapport à x la formule d'Euler)

Trouver une formule analogue liant $\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}^2}$ et $\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}}$. Montrer alors que

(2) $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

2) Soit $f(x,y) = \frac{xy\ln\left(\frac{x}{y}+1\right)}{x+y}$. Déterminer l'ensemble des (x,y) pour lesquels f est deux fois continûment différentiable (faire un dessin). Montrer que f est homogène et déterminer son degré d'homogénéité. Vérifier (1) et (2).

Correction

1) Le relation d'Euler s'écrit : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = f(x,y)$ (3).

Dérivons (3) partiellement par rapport à x: $\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$. D'où la relation (1).

Dérivons (3) partiellement par rapport à y : $x\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial y}$.

D'où $x\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} + \mathrm{y}\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}^2} = 0$

Or $x \times (1) - y \times (4)$ donne : $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} - xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Or f est deux fois continûment différentiable donc d'après le théorème de symétrie de Schwarz : $\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}}$ et (2) est vérifiée.

2) f est définie et continûment différentiable sur D= $\{(x,y) \in \boldsymbol{R^2}; xy+1>0$ et $x+y \neq 0\}$ (réunion des deux sections planes sans leur frontière, d'équation ($x > y$ et $y > 0$) d'une part et ($x < -y$ et $y <$ 0) d'autre part).

Sur $\mathcal{D}$, pour tout $a \neq 0, f(ax, ay) = \frac{a^2 xy \ln\left(\frac{ax}{ay}+1\right)}{ax+ay} = af(x,y)$. Ainsi f est homogène de degré 1.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2 \ln\left(\frac{x}{y}+1\right)+xy}{(x+y)^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2 \ln\left(\frac{x}{y}+1\right)-x^2}{(x+y)^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y\frac{2y-x-2y\ln\left(\frac{x}{y}+1\right)}{(x+y)^3}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-\frac{x^3}{y}-2x^2\ln\left(\frac{x}{y}+1\right)+2x^2}{(x+y)^3}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2xy\ln\left(\frac{x}{y}+1\right)+x^2-2xy}{(x+y)^3}$. On vérifie alors (1) et (2).

Exercice 8

Consigne

Soit f une fonction de R^3 dans R définie par $f(x,y,z) = x^3 \ln\frac{x^2+y^2}{z^2}$.

1) Donner l'ensemble de définition de f et l'ensemble sur lequel f admet des dérivées partielles d'ordre 1.

2) Montrer que f est homogène et préciser son degré d'homogénéité.

3) Calculer les dérivées partielles de f d'ordre 1 et vérifier la relation d'Euler.

Correction

1) f est définie et différentiable sur $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in R^3; (x,y) \neq (0,0)$ et $z \neq 0\}$

2) Sur $\mathcal{D}$ et pour $a \in R^*, f(ax, ay, az) = a^3x^3 \ln \frac{a^2x^2+a^2y^2}{a^2z^2} = a^3 f(x,y,z)$, et f est homogène de degré 3.

3) Sur $\mathcal{D}, \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \ln\frac{x^2+y^2}{z^2} + \frac{2x^4}{x^2+y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2yx^3}{x^2+y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-2x^3}{z}$.

Et $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^3\ln\frac{x^2+y^2}{z^2} + \frac{2x^5}{x^2+y^2} + \frac{2y^2x^3}{x^2+y^2} - 2x^3, x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^3\ln\frac{x^2+y^2}{z^2} + \frac{2x^3(x^2+y^2)}{x2+y^2} - 2x^3 = 3f(x,y,z)$. La relation d'Euler est bien vérifiée.

Exercice 9

Consigne

La fonction de Coog-Douglas :

Soit f: (L,K) → $Q = K^{\alpha}L^{1-\alpha} (0 < \alpha < 1)$

1) Calculer le taux marginal de substitution T de f.

2) En déduire l'élasticité de substitution σ de f.

Correction

1) $T = \left|\frac{dK}{dL}\right| = \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial K}}\right| = \frac{(1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha}}{\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \times \frac{K}{L}$.

2) $\sigma = \frac{d(K/L)}{K/L} \times \frac{1}{dT/T} = \frac{d(K/L)}{dT} \times \frac{T}{K/L}$. Or d'après la question précédente, $\frac{K}{L} = \frac{\alpha}{1-\alpha}T$, donc $\frac{d(K/L)}{dT} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ et $\frac{T}{K/L} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$. D'où $\sigma = 1$.

Remarque : Dans ce cadre $\frac{K}{L}$ est proportionnel à T, c'est un cas simple.

Exercice 10

Consigne

La fonction de production C.E.S

Soit f : (L, K) → $Q = A[\alpha K^{-\gamma} + (1-\alpha)L^{-\gamma}]^{-1/\gamma}$ $(A > 0,\ \gamma > 1$ et $0 < \alpha < 1)$

1) Calculer le taux marginal de substitution T de f.

2) En déduire l'élasticité de substitution σ de f.

Correction

1) $T = \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial K}}\right| = \left|\frac{-(1-\alpha)\gamma L^{-\gamma-1}(\alpha K^{-\gamma} + (1-\alpha)L^{-\gamma})^{-1/\gamma-1}}{-\alpha\gamma K^{-\gamma-1}(\alpha K^{-\gamma} + (1-\alpha)L^{-\gamma})^{-1/\gamma-1}}\right| = \frac{1-\alpha}{\alpha} \times \frac{L^{-\gamma-1}}{K^{-\gamma-1}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K}{L}\right)^{\gamma+1}$.

2) $\sigma = \frac{d(K/L)}{dT} \times \frac{T}{K/L}$. Or ici $\frac{K}{L} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}T\right)^{1/\gamma+1}$ et $\frac{d(K/L)}{dT} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \times \frac{1}{\gamma+1}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}T\right)^{(1/\gamma+1)-1} \cdot \frac{T}{K/L} = T\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}T\right)^{-1/\gamma+1}$.

D'où $\sigma = \frac{\alpha}{1-\alpha} \times \frac{1}{\gamma+1}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}T\right)^{-1} \times T = \frac{1}{\gamma+1}$. σ est donc constant d'où le nom de ces fonctions (C.E.S = constant elasticity subtitution).

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 2, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).