

# Fonctions à plusieurs variables

---

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

---

## Table des matières

<b>Introduction</b> .....	<b>2</b>
<b>Rappels</b> .....	<b>3</b>
Les dérivées partielles premières .....	3
Différentielle.....	3
Les dérivées partielles secondes .....	4
<b>Formules d'approximation locale par un polynôme</b> .....	<b>4</b>
Développements limités .....	4
<b>Fonctions implicites</b> .....	<b>6</b>
Fonctions implicites dans le cas de deux variables .....	6
Dérivées des fonctions implicites dans le cas de trois variables .....	7
<b>Fonctions homogènes</b> .....	<b>8</b>
<b>Applications économiques</b> .....	<b>9</b>
Elasticités croisées de la demande.....	9
Elasticité de substitution .....	9
<b>Références</b> .....	<b>11</b>

## Introduction

**Objectif de la leçon** : Cette leçon a pour but de fournir les principaux outils nécessaires à l'étude des fonctions à plusieurs variables (parmi lesquels les dérivées partielles, les différentielles ...). L'emploi de ces outils est récurrent dans le domaine des sciences économiques, notamment lors des déterminations des différentes élasticités ou de la nature des rendements d'échelles. Cette leçon est un prérequis nécessaire à la leçon fondamentale 3 (Optimisation). Elle reprend rapidement beaucoup de notions introduites en L1. Il est bon de se reporter à la leçon 8 du cours de Mathématiques1 en cas de difficulté.

# Rappels

## Les dérivées partielles premières

Soit  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  une fonction numérique à plusieurs variables définie sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ .

La dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x_i$  au point  $X_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}, \dots, x_{0n})$ , notée  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$  ou  $f'_{x_i}(X_0)$  est la dérivée en  $x_{0i}$  de la fonction de la seule variable  $x_i$  définie par  $x_i \rightarrow f(x_{01}, \dots, x_i, \dots, x_{0n})$  les  $n - 1$  autres variables étant fixées.

Elle a toutes les propriétés des dérivées.

## Différentielle

Nous admettrons que si une fonction est continue et possède des dérivées partielles continues, alors elle est différentiable.

Nous ne fournirons pas de plus amples explications théoriques, c'est la généralisation de la notion de différentielle à une variable. Et nous écrirons :  $df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$

Cette formulation est assez simple à retenir lorsqu'on se souvient que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  représente la façon dont  $f$  est modifiée à la suite d'une "légère" variation de  $x$  ( $x$  donne  $x + dx$ ),  $y$  restant inchangé et que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  représente la façon dont  $f$  est modifiée à la suite d'une légère variation de  $y$  ( $y$  donne  $y + dy$ ),  $x$  restant inchangé.

$df$  est donc la somme de deux composantes, l'une qui concerne  $x$  ( $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx$ ) et l'autre qui concerne  $y$  ( $\frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$ ).

On s'attachera, comme pour les fonctions à une variable, à ne pas confondre  $df(x_0, y_0)$  et  $\Delta f = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0)$ . Plus  $dx$  et  $dy$  sont petits, plus ces deux quantités sont voisines. Mais elles sont en général distinctes et approximer l'une par l'autre demande quelques précautions.

Etant donné la forme de  $df$ , les règles de différentiation que nous avons rencontrées pour une variable restent vraies pour plusieurs variables :

$$d(f + g) = df + dg, d(kf) = kdf \text{ (k constante réelle)} \quad d(fg) = gdf + fdg \text{ etc}$$

On peut généraliser ce résultat à  $n$  variables ( $n \geq 2$ ) : Si  $f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est continue et si ses dérivées partielles sont toutes continues,  $f$  est différentiable et  $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n$

## Les dérivées partielles secondes

Soit  $f$  une fonction numérique à  $n$  variables  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  définie sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^n$  admettant  $n$  dérivées partielles premières continues sur  $D$

On appelle dérivée partielle seconde de  $f$  par rapport à  $x_i x_k$  au point  $X_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}, \dots, x_{0n})$ , notée  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(X_0)$  ou  $f_{x_i x_k}(X_0)$  est la dérivée en  $x_{0k}$  de la fonction  $x_k \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{01}, \dots, x_k, \dots, x_{0n})$  de la seule variable  $x_k$ , les  $n - 1$  autres étant fixées.

Elle a toutes les propriétés des dérivées.

## Formules d'approximation locale par un polynôme

### Développements limités

Pour établir des développements limités, on peut utiliser une **formule de Taylor**.

A l'ordre 1, on a :

Si une fonction  $f$  de deux variables  $x$  et  $y$  a des dérivées partielles continues au voisinage  $V$  de  $A = (x_0, y_0)$  : si on pose  $B = (x_0 + h, y_0 + k)$

$$\forall B \in V : f(B) = f(A) + h \frac{\partial f}{\partial x}(A) + k \frac{\partial f}{\partial y}(A) + o(h, k)$$

$o(h, k)$  est le reste, il est de la forme  $:\sqrt{h^2 + k^2} \varepsilon(h, k)$  avec  $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h, k) = 0$ , et est négligeable devant les termes qui le précèdent (sauf si  $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(A)$  sont nuls).

### Remarques :

1) Cette formule n'a d'intérêt que pour  $(h, k)$  voisin de  $(0, 0)$  puisque la seule information sur le reste concerne son comportement au voisinage de  $(0, 0)$ .

2) La formule précédente s'écrit aussi :

$$\forall (x, y) \in V : f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o((x - x_0), (y - y_0))$$

$o((x - x_0), (y - y_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \varepsilon(h, k)$  avec  $\lim_{(h, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \varepsilon(x - x_0, y - y_0) = 0$

A l'ordre 2, on a :

Si  $f$  a des dérivées partielles du second ordre continues sur un voisinage  $V$  de  $A = (x_0, y_0)$ : si on pose  $B = (x_0 + h, y_0 + k), \forall B \in V$ ,

$$f(B) = f(A) + h \frac{\partial f}{\partial x}(A) + k \frac{\partial f}{\partial y}(A) + \frac{1}{2} \left[ h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \right] + o(h^2, k^2)$$

$o(h^2, k^2)$  est le reste, il est de la forme :  $(h^2 + k^2)\varepsilon(h, k)$  avec  $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h, k) = 0$  et est négligeable devant les termes qui le précèdent (sauf s'ils sont nuls).

### Remarques :

Ici encore cette formule n'a d'intérêt que pour  $(h, k)$  voisin de  $(0, 0)$  puisque la seule information sur le reste concerne son comportement au voisinage de  $(0, 0)$ .

Ce qu'il faut retenir sur le reste est qu'il est négligeable devant les termes qui le précèdent.

La formule précédente s'écrit aussi :

$$\forall (x, y) \in V : f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) +$$

$$\frac{1}{2} \left[ (x - x_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + (y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right]$$

$$+ o((x - x_0)^2, (y - y_0)^2)$$

$$o((x - x_0)^2, (y - y_0)^2) = ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)\varepsilon(x - x_0, y - y_0) \text{ avec } \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \varepsilon(x - x_0, y - y_0) = 0$$

On peut aussi, si c'est possible, utiliser les techniques mises en place pour les fonctions à une variable.

**Rappel :** Voici les différents développements limités vus en L1. Il est bon de les savoir par cœur, ces formules sont très utiles dans les exercices. Néanmoins si nécessaire elles seront données à l'examen.

Dans toutes ces formules  $\varepsilon$  désigne une fonction qui tend vers zéro en zéro ( $\varepsilon$  est différente à chaque ligne bien sûr). Etant donnée la seule information que l'on a sur  $\varepsilon$ , ces développements limités n'ont un intérêt que pour  $x$  voisin de zéro.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x) \quad (m \in \mathbb{R})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

On a aussi :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n} \varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

**Remarque :** Ces six formules s'appliquent pour toute quantité  $u$  qui est voisine de 0 , pour cela il suffit de remplacer  $x$  par  $u$  dans la formule.

## Fonctions implicites

### Fonctions implicites dans le cas de deux variables

Tout d'abord expliquons ce qu'est une **fonction implicite**. Lorsqu'on étudie une fonction  $x \rightarrow y = f(x)$ ,  $y$  est explicitement fonction de  $x$ , c'est à dire que, connaissant les différentes valeurs de  $x$ , on peut calculer directement  $y$ .

Il arrive que  $y$  ne puisse pas être calculé explicitement et que  $y$  soit tout de même une fonction de  $x$ .

Exemple :  $\cos y + x - \frac{1}{2} = 0$  et  $y \in [0, \pi]$ .

Cela définit bien une fonction  $f: x \rightarrow y$  puisque si  $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ ,  $\left(\frac{1}{2} - x\right) \in [-1, 1]$  et l'équation  $\cos y = \frac{1}{2} - x$  a une solution et une seule dans  $[0, \pi]$ ,  $y$  apparaît comme l'image de  $x$  par  $f$ , mais on ne sait pas écrire  $f(x)$ .  $f$  est une fonction implicite.

On est donc amené à se poser la question suivante :

Existe-t-il toujours une fonction  $x \rightarrow y$  définie implicitement par une équation de la forme  $F(x, y) = 0$  ?

La réponse est non, bien sûr, car il peut y avoir, par exemple, plusieurs valeurs de  $y$  correspondant à une même valeur de  $x$ . Mais nous allons admettre un théorème (la démonstration est difficile et dépasse le cadre du programme de Licence) qui nous permettra de répondre positivement à cette question sous certaines conditions :

**Théorème d'existence et d'unicité d'une fonction implicite** : Etant donné une fonction  $F : (x,y) \rightarrow F(x,y)$  continue, telle que  $F(x_0, y_0) = 0$  et qui possède en  $(x_0, y_0)$  des dérivées partielles  $\frac{\partial F}{\partial x}$  et  $\frac{\partial F}{\partial y}$  continues (avec  $\frac{\partial F}{\partial y}$  non nulle en  $(x_0, y_0)$ ), sur un voisinage de  $(x_0, y_0)$ , il existe une fonction  $f: x \rightarrow y = f(x)$  unique définie et continue dans un voisinage de  $x_0$ , telle que  $F(x, f(x)) = 0$ .

On peut alors se demander si  $f$  est dérivable au voisinage de  $x_0$ .  $\frac{\partial F}{\partial x}$  et  $\frac{\partial F}{\partial y}$  sont continues donc  $F$  est différentiable et :  $dF = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy$  et puisque  $F(x,y) = 0, dF = 0$  et  $\frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy = 0$ .

$$\text{D'où : } \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

La fonction  $f: x \rightarrow y = f(x)$  définie implicitement par  $F(x,y) = 0$ , est alors dérivable en  $x_0$  et

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x}{F'_y}(x_0, y_0).$$

Exemple : Reprenons le cas de la droite de budget d'un consommateur, sa formulation générale est :  $R = p_x \cdot x + p_y \cdot y$  (c.f chapitre continuité - dérivée - différentielle Licence 1 ère année).

Ici  $F(x, y) = p_x \cdot x + p_y \cdot y - R$  ( $p_x$  et  $p_y$  sont des constantes) et  $\frac{\partial F}{\partial x} = p_x, \frac{\partial F}{\partial y} = p_y$  et on retrouve que

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{p_x}{p_y}$$

## Dérivées des fonctions implicites dans le cas de trois variables

On peut généraliser le théorème énoncé pour deux variables. On obtient que si  $F: (x,y,z) \rightarrow F(x,y,z)$  est continue et telle que  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$  et si  $F$  admet des dérivées partielles continues au voisinage de  $(x_0, y_0, z_0)$  (avec  $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ) alors il existe une unique fonction  $f: (x,y) \rightarrow z = f(x,y)$  définie et continue au voisinage de  $(x_0, y_0)$  et telle que  $F(x,y,f(x,y)) = 0$ .

De plus  $f$  a des dérivées partielles qui vérifient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{F'_x}{F'_z}(x_0, y_0, z_0) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{F'_y}{F'_z}(x_0, y_0, z_0)$$

Ceci se généralise de façon analogue à 4,5 ... n variables.

# Fonctions homogènes

**Définition** : Une fonction  $f : (x,y) \rightarrow f(x,y)$  est dite homogène de degré  $k$  ssi : pour tout  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f$  soit définie en  $(ax, ay)$  et  $(x,y)$ ,  $f(ax, ay) = a^k f(x, y)$ .

Cette définition se généralise naturellement à 3,4,5 ... n variables.

**Exemple** : Donnons une application économique qui permettra d'illustrer la notion de fonction homogène : Fonctions homogènes et rendements d'échelle.

Considérons une fonction de production  $Q = f(K,L)$ . Si nous décidons de doubler les facteurs  $K$  et  $L$ , qu'en résulte-t-il pour la production  $Q$  ?

Tout dépend de la façon dont les nouveaux inputs peuvent participer au processus de production. La production peut doubler comme elle peut augmenter de 30% ou au contraire tripler. La notion qui traduit l'ampleur de la variation de la production s'appelle "rendements d'échelle".

- Lorsque la fonction de production est à rendements constants, cela signifie qu'en multipliant les inputs  $K$  et  $L$  par  $a$ , l'output  $Q$  est multiplié aussi par  $a$  :  $f(aK,aL) = af(K,L)$ .  $f$  apparaît ainsi comme une fonction homogène de degré 1.
- On définit de même les rendements croissants par le fait qu'une augmentation des inputs  $K$  et  $L$  entraîne une augmentation plus forte de la production  $Q$  telle que :  $\forall a > 1, f(aK,aL) = a^k f(K,L)$  avec  $k < 1$ .
- Enfin les rendements décroissants correspondent à une baisse de l'efficacité. On augmente les inputs et l'output augmente de façon moindre :  $\forall a > 1, f(aK,aL) = a^k f(K,L)$  avec  $k < 1$ .

**Propriété 1** : Si une fonction homogène est de degré  $k$ , ses dérivées partielles, si elles existent, sont homogènes de degré  $k - 1$ .

**Démonstration** : soit  $f : (x,y) \rightarrow f(x,y)$  homogène de degré  $k$  et  $f'_x$  et  $f'_y$  ses dérivées partielles.  $\forall a \in \mathbb{R} : f(ax, ay) = a^k f(x, y)$ . Dérivons partiellement les deux membres de cette équation :

$$a \cdot f'_x(ax, ay) = a^k f'_x(x, y) \quad \text{d'où} \quad f'_x(ax, ay) = a^{k-1} f'_x(x, y).$$

De même :  $a \cdot f'_y(ax, ay) = a^k f'_y(x, y)$  d'où  $f'_y(ax, ay) = a^{k-1} f'_y(x, y)$ .

Et la propriété est démontrée.

**Attention** :  $f'_x(ax, ay)$  désigne la valeur de  $f_{xx}$  en  $(ax, ay)$ , ce n'est pas la dérivée partielle par rapport à  $x$  de  $(x,y) \rightarrow f(ax, ay)$  qui elle est  $f'_x(ax, ay) \cdot a$  (dérivée d'une fonction composée).



**Propriété 2** : Si  $f$  est une fonction homogène de degré  $k$ , les fonctions moyennes  $g: (x,y) \rightarrow \frac{f(x,y)}{x}$  et  $h: (x,y) \rightarrow \frac{f(x,y)}{y}$  sont homogènes de degré  $k - 1$ .

**Démonstration** : en effet  $g(ax, ay) = \frac{f(ax, ay)}{ax} = \frac{a^k f(x, y)}{ax} = a^{k-1} \frac{f(x, y)}{x} = a^{k-1} g(x, y)$ . On ferait un raisonnement analogue pour  $h$ .

**Relation d'Euler** : Soit  $f: (x,y) \rightarrow f(x,y)$ , homogène de degré  $k$  et admettant des dérivées partielles. Alors :  $x \cdot f_x(x,y) + y \cdot f_y(x,y) = kf(x,y)$ .

**Démonstration** : Dérivons par rapport à  $a$  la relation  $f(ax, ay) = a^k f(x, y)$ . On obtient

$$f'_x(ax, ay) \cdot x + f'_y(ax, ay) \cdot y = ka^{k-1} f(x, y)$$

Or, d'après la propriété 1,  $f'_x$  et  $f'_y$  sont homogènes de degré  $k - 1$ , la relation précédente devient,  $a^{k-1} f'_x(x, y) \cdot x + a^{k-1} f'_y(x, y) \cdot y = ka^{k-1} f(x, y)$ .

Et en simplifiant par  $a^{k-1}$ , on obtient bien  $x \cdot f'_x(x,y) + y \cdot f'_y(x,y) = kf(x,y)$ .

## Applications économiques

### Elasticités croisées de la demande

Lorsque la fonction de demande fait intervenir plusieurs variables comme le prix de plusieurs biens, on introduit la notion d'élasticité croisée.

L'idée est simple. Par exemple, soient deux biens, pneumatiques et voiture. Si le prix des voitures augmente, la demande diminuera entraînant la baisse de la demande de pneumatiques. On voit alors, que la demande d'un bien peut dépendre du prix d'un autre bien.

Si  $q_1$  est la fonction de demande d'un premier bien (ici les pneumatiques) et  $p_2$  le prix d'un deuxième bien (ici les voitures), la formule de l'élasticité croisée est la suivante :

$$\varepsilon_{q_1, p_2} = \frac{\partial q_1}{\partial p_2} \times \frac{p_2}{q_1}$$

Si  $z = f(x, y)$ ,  $\varepsilon_{zx} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{x}{f(x,y)}$ , de même  $\varepsilon_{zy} = \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{y}{f(x,y)}$ .

### Elasticité de substitution

Nous étudierons cette notion d'élasticité dans le cas d'une fonction de production  $Q: (K,L) \rightarrow f(K,L)$ .

On se place à production constante  $Q_0$  et on suppose que  $f(K,L) - Q_0 = 0$  permet de définir implicitement  $K$  comme fonction de  $L$  et que le théorème des fonctions implicites s'applique.

Le taux marginal de substitution (TMS) capital-travail est le rapport de la quantité de capital  $dK$  cédée et de la quantité supplémentaire de travail  $dL$  obtenue, sachant qu'on reste au même niveau de production  $Q_0$ . D'après la formule de dérivation des fonctions implicites :

$$\text{TMS} = T = \left| \frac{dK}{dL} \right| = \left| \frac{f'_{L_L}}{f'_{K_K}} \right|$$

Le taux  $T$  varie au fur et à mesure que se poursuit la substitution capital-travail et on souhaiterait connaître les modifications du rapport capital/travail en fonction des variations de  $T$ .

On suppose ici encore qu'implicitement le rapport  $k = K/L$  est une fonction de  $T$  et on s'intéresse à l'élasticité  $\sigma$  de cette fonction :

$$T \rightarrow k(T) = \frac{K}{L}$$

$\sigma$  s'appelle **l'élasticité de substitution**.

Appliquons la formule qui donne l'élasticité de la fonction  $k$  :

$$\sigma = \frac{dk}{dT} \cdot \frac{T}{k} = \frac{dk/k}{dT/T} \quad \text{avec } k = K/L \text{ et } T = \left| \frac{dK}{dL} \right|$$

Exemples :

1) Si  $Q = K^\alpha L^{1-\alpha}$  ( $0 < \alpha < 1$ ) (fonction de Cobb-Douglas), nous montrerons en exercice le résultat suivant :

L'élasticité de substitution d'une fonction de Cobb-Douglas :

$$(K,L) \rightarrow Q = K^\alpha L^{1-\alpha} \text{ est égale à } 1. \quad \sigma = \frac{dk/k}{dT/T} = 1 \quad \left( \text{avec } k = \frac{K}{L} \text{ et } T = \left| \frac{dK}{dL} \right| \right)$$

2) On s'intéresse depuis quelques années à des fonctions de production dont l'élasticité de substitution est constante (mais pas forcément égale à 1), de telles fonctions sont appelées C.E.S (constant elasticity of substitution) et leur expression est :

$$Q = f(K,L) = A[\alpha K - \gamma + (1 - \alpha)L^\gamma]^{-1/\gamma} \quad (A > 0, \gamma > 1 \text{ et } 0 < \alpha < 1)$$

Le paramètre  $\gamma$  est appelé paramètre de substitution et il intervient dans l'expression l'élasticité de substitution  $\sigma$  de la fonction de production C.E.S.

Nous montrerons en exercice que  $\sigma = \frac{1}{1+\gamma}$ .

## Références

### Comment citer ce cours ?

Mathématiques 2, Odile Brandière, AUNEGe (<http://auneg.fr>), CC – BY NC ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).



Cette œuvre est mise à disposition dans le respect de la législation française protégeant le droit d'auteur, selon les termes du contrat de licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>). En cas de conflit entre la législation française et les termes de ce contrat de licence, la clause non conforme à la législation française est réputée non écrite. Si la clause constitue un élément déterminant de l'engagement des parties ou de l'une d'elles, sa nullité emporte celle du contrat de licence tout entier.