Suites

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices corrigés

Attention : ceci est la version corrigée des exercices.

Exercice 1

Consigne

Etudier la convergence des suites ci-dessous définies par leur terme général :

1) $u_n = \frac{2n^3-5n+1}{n^2+3}$ 2) $u_n = \frac{2n^2-7n-5}{-n^5-1}$ 3) $u_n = \sqrt{4n^2+n} - 2n$

4) $u_n = \frac{\ln n^2}{\sqrt{n+1}}$ 5) $u_n = \frac{n^4}{e^n}$

Correction

1) A l'infini, une fraction rationnelle se comporte comme le quotient des termes de plus haut degré, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^3}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\,n = +\infty$. u diverge mais a une limite infinie.

2) De même $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{-n^5} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{-n^3} = 0$. u converge.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\,n\left(\sqrt{1+\frac{1}{4n}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\,n\left(1 + \frac{1}{8n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) = \frac{1}{4}$ u converge.

N.B. : Ici on a fait un D.L. de $\sqrt{1+\frac{1}{4n}}$ au voisinage de $+\infty$ en posant $u = \frac{1}{4n}$ (u est voisin de 0 quand n tend vers l'infini) et en utilisant le D.L. de $\sqrt{1+u}$ au voisinage de 0 .

4) On remarque que $lnn^2 = 2ln$ et que si x tend vers l'infini, $x + 1$ se comporte comme x et « toute puissance de x $(\text{ici } x^{1/2})$ l'emporte sur $\ln x$ ».

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{lnn^2}{\sqrt{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2lnn}{\sqrt{n}}$=0. u converge.

5) De même à l'infini « l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x » (ici x^4), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{n}^4}{\mathrm{e}^\mathrm{n}} = 0$. u converge.

Exercice 2

Consigne

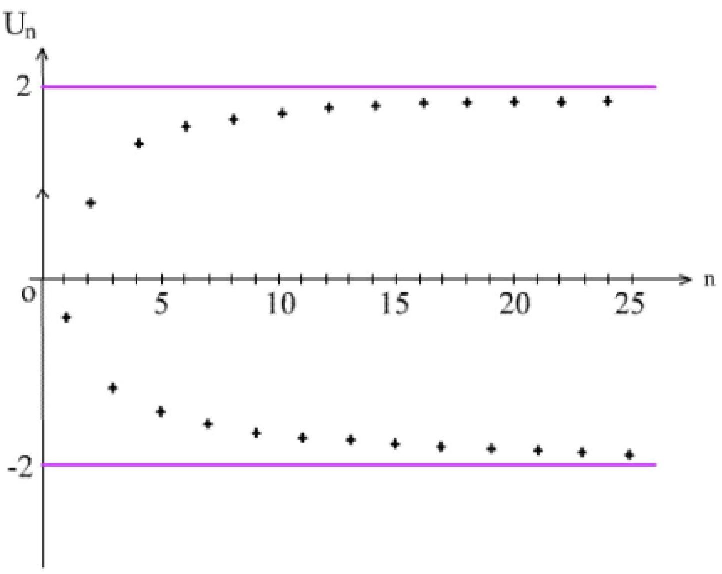
Montrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n \frac{2n-1}{n+1}$ est bornée. Est-elle convergente ? Est-elle monotone ?(représenter u graphiquement).

Correction

$|u_n| = \left|\frac{2n-1}{n+1}\right| = \left|2 - \frac{3}{n+1}\right| \leq 2$. D'après le cours u est donc bornée (par -2 et 2).

On remarque que pour $n > 0$ $\frac{2n-1}{n+1} > 0$et u_n est alternativement positif et négatif.

D'autre part quand n tend vers $+\infty$, $|\mathrm{u_n}|$ tend vers 2. Donc quand tend vers $+\infty$, $\mathrm{u_n}$ se rapproche alternativement de 2 et -2. Or si la limite existe, elle est unique (théorème du cours). u n'a donc pas de limite quand n tend vers l'infini. u diverge.



Exercice 3

Consigne

Soit u la suite définie par $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

1) Montrer qu'à partir d'un certain rang u est décroissante.

2) Etudier la convergence de u.

Correction

Pour tout entier $n, u_n > 0$ $(0! = 1$ par convention$)$. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{n+1} < 1$ dès que $n > 1$ et vaut 1 pour $\mathrm{n} = 1$.

Donc pour $\mathrm{n} \geq 1, \mathrm{u}_{\mathrm{n}+1} \leq \mathrm{u}_{\mathrm{n}}$ et u est décroissante à partir du rang 1.

2) u est minorée par 0 et décroissante, u converge donc.

Exercice 4

Consigne

Soit u la suite définie pour tout n par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \exp(-u_n) \end{cases}$

1) Montrer que pour tout n, u_n est positif.

2) Etudier la monotonie de u_n.

3) Etudier la convergence de u.

Correction

1) $\mathrm{u}_0 > 0$ et si $\mathrm{u}_\mathrm{n} > 0$ alors $\mathrm{u}_\mathrm{n} \exp(-\mathrm{u}_\mathrm{n}) > 0$, soit $\mathrm{u}_{\mathrm{n}+1} > 0$. D'après les axiomes du raisonnement par récurrence $u_n > 0$ sur N.

2) $\mathrm{u}_{\mathrm{n}+1} - \mathrm{u}_\mathrm{n} = \mathrm{u}_\mathrm{n}(\exp(-\mathrm{u}_\mathrm{n}) - 1) < 0(\exp(-\mathrm{u}_\mathrm{n}) < 1$ puisque $\mathrm{u}_\mathrm{n} > 0)$. u est donc décroissante sur N.

3) u est minorée par 0 et décroissante, u converge donc.

Exercice 5

Consigne

1) Soit $f(x) = \sqrt{3x+4}$ pour $x \geq 0$.

a) Montrer que pour tout x et y positifs :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4}|x - y|$$

b) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$|f(x) - 4| \leq \frac{3}{4}|x - 4|$$

2) Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Montrer, en utiliser le résultat de la première question que : $|u_n - 4| \leq 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction

1) f est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et $\mathrm{f}'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$.

a) Si $x \in \left[0; +\infty\right[, 3x + 4 \geq 4, \sqrt{3x+4} \geq 2, \frac{1}{\sqrt{3x+4}} \leq \frac{1}{2}$ et $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$.

D'après le cours de L1, on en déduit que pour tous x et y strictement positifs, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4}|x - y|$. On remarque que l'inégalité reste vraie si x ou y ou les deux sont nuls.

b) En remarquant que $\mathrm{f}(4) = 4$ et en utilisant la dernière inégalité à $\mathrm{x} = 4$, on obtient $|f(x) - 4| \leq \frac{3}{4}|x - 4|$.

2) $u_0 = 0$ et de proche en proche $u_n \geq 0$. Donc $|f(u_n) - 4| \leq \frac{3}{4}|u_n - 4|$, soit $|u_{n+1} - 4| \leq \frac{3}{4}|u_n - 4|$. Et en itérant au rang précédent $|u_n - 4| \leq \frac{3}{4}|u_{n-1} - 4|$, en itérant on a $|u_n - 4| \leq \frac{3}{4}|u_{n-1} - 4| \leq \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}|u_{n-2} - 4|\right)$, c'est à dire $|u_n - 4| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^2 |u_{n-2} - 4|$ et ainsi de suite. On obtient au bout de n itérations $|u_n - 4| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - 4|$. Soit $|u_n - 4| \leq 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

D'après les résultats sur les suites géométriques $\lim\limits_{\mathrm{n}\to+\infty} 4\left(\frac{3}{4}\right)^{\mathrm{n}} = 0$ et on a $0 \leq |u_n - 4| \leq 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$, et d'après le théorème « des gendarmes », $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 4| = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Exercice 6

Consigne

Soit u la suite définie pour tout entier n par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = ln(1 + u_n) \end{cases}$

1) Après avoir étudié le sens de variation de $g: x \to \ln(1+x) - x$ sur $]\,0\,;+\infty[$, montrer que pour tout $x > 0$:

$$0 < \ln(1+x) < x$$

2) Montrer que pour tout entier n, u_n est strictement positif.

3) Déduire de ce qui précède que u converge.

Correction

1) Soit $g(x) = \ln(1+x) - x$.

g est définie et dérivable sur $]\,0\,;+\infty[$. et $\mathrm{g}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{1+\mathrm{x}} - 1 < 0$ sur $]\,0\,;+\infty[$.

g est donc strictement décroissante sur $]\,0\,;+\infty[$ et pour tout $\mathrm{x} \in]\,0\,;+\infty[$ $\mathrm{g}(\mathrm{x}) < \mathrm{g}(0)$.

Soit $\mathrm{g}(\mathrm{x}) < 0$ et $\ln(1+\mathrm{x}) < \mathrm{x}$. D'autre part $\ln(1+\mathrm{x}) > 0$ sur $]\,0\,;+\infty[$. D'où $0 < \ln(1+x) < x$ " sur $]\,0\,;+\infty[$.

2) $u_0 = 2 > 0$. Et si $u_n > 0$ alors $\ln(1+u_n) > 0$ et $u_{n+1} > 0$. D'après les axiomes du raisonnement par récurrence $\mathrm{u_n} > 0$ sur N.

3) Puisque $u_n > 0$, on peut appliquer l'inégalité de 1) et $\ln(1+u_n) < u_n$, soit $u_{n+1} < u_n$. u est donc décroissante sur N.

u est minorée par 0 et décroissante, u converge donc.

Exercice 7

Consigne

Soit u la suite définie pour tout entier n par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n} \end{cases}$.

1) Montrer que pour tout réel x de $]-\infty; 3[$, on a $\frac{9}{6-x} < 3$. Et en déduire que pour tout entier $\mathrm{n}, \mathrm{u_n}$ est définie.

2) Soit v la suite définie par $v_n = \frac{1}{u_n-3}$. Montrer que v est arithmétique.

3) En déduire u_n en fonction de n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Correction

1) Si $x < 3, 6 - x > 3$ et $\frac{1}{6-x} < \frac{1}{3}$, soit $\frac{9}{6-x} < 3$.

$\mathrm{u_0} < 3$, et si $\mathrm{u_n} < 3$, $\mathrm{u_{n+1}}$ est défini et d'après le résultat précédent $\frac{9}{6-\mathrm{u_n}} < 3$, soit $\mathrm{u_{n+1}} < 3$. On en déduit donc que $\mathrm{u_n}$ est bien définie sur N et que $\mathrm{u_n} < 3$.

2) D'après la question précédente $\mathrm{v_n}$ est bien définie.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6 - u_n} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{6 - u_n}{-9 + 3u_n} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{6 - u_n - 3}{3u_n - 9} = -3$$

$\mathrm{v_n}$ est donc une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $\mathrm{v_0} = \frac{1}{\mathrm{u_0}-3} = -\frac{1}{4}$.

3) $v_n = -\frac{1}{4} - 3n$ et $u_n = \frac{1+3v_n}{v_n} = \frac{1-3/4-9n}{-1/4-3n} = \frac{36n-1}{12n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{36n}{12n} = 3$.

Exercice 8

Consigne

Montrer par récurrence que :

1) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. (somme des n premiers nombres impairs)

3) $n! > 2^{n-1}$ à partir du rang 3.

Correction

1) Si $\mathrm{n} = 0$, on obtient $0^2 = 0$, c'est vrai. Si $\mathrm{n} = 1$, on a $1^2 = \frac{1\times2\times3}{6}$, c'est vrai.

Supposons l'égalité vraie au rang n: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, et montrons qu'alors elle est au rang $n+1$, c'est à dire : $1^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

Si $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $1^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$.

Soit $1^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$, d'où $1^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

Or $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$ et on obtient bien le résultat attendu

D'après les axiomes du raisonnement par récurrence :

$$\forall \mathrm{n} \in N, 1^2 + 2^2 + \cdots + \mathrm{n}^2 = \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)(2\mathrm{n}+1)}{6}$$

2) Si $\mathrm{n} = 1$, on a $1 = 1^2$, c'est vrai.

Supposons l'égalité vraie au rang n: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$, et montrons qu'alors elle est au rang $\mathrm{n}+1$, c'est à dire :

$1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$, soit $1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$.

Si $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$,

$1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

On obtient bien le résultat attendu.

D'après les axiomes du raisonnement par récurrence : $\forall \mathrm{n} \in N, 1 + 3 + 5 + \cdots + (2\mathrm{n}-1) = \mathrm{n}^2$

3) Au rang 3, l'inégalité s'écrit $3! > 2^2$, soit $6 > 4$, c'est vrai.

Supposons l'égalité vraie au rang n:$\mathrm{n}! > 2^{\mathrm{n}-1}$, et montrons qu'alors elle est au rang

$\mathrm{n}+1$, c'est à dire : $(\mathrm{n}+1)! > 2^{(\mathrm{n}+1)-1}$ soit $(\mathrm{n}+1)! > 2^{\mathrm{n}}$.

$(n+1)! = (n+1)n!$ et si $n! > 2^{n-1}$, $(n+1)! > (n+1)2^{n-1}$ et puisque $n \geq 3, n+1 \geq 4$ et à fortiori $\mathrm{n} + 1 > 2$. La dernière inégalité implique donc que $(\mathrm{n}+1)! > 2 \times 2^{\mathrm{n}-1}$, soit $(\mathrm{n}+1)! > 2^{\mathrm{n}}$; c^2 est le résultat attendu.

D'après les axiomes du raisonnement par récurrence : $\forall \mathrm{n} \in N$,$\mathrm{n}! > 2^{\mathrm{n}-1}$

Exercice 9

Consigne

On considère la suite u définie pour tout entier n par $\begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3 en fonction de e

2) On pose $v_n = \ln u_n - 2$. Montrer que vest une suite géométrique dont on précisera son premier terme et sa raison.

3) En déduire u_n en fonction de n ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Correction

1) $u_1 = e\sqrt{e^3} = e^2\sqrt{e} = e^{5/2}, u_2 = e\left(e^{5/2}\right)^{1/2} = e\left(e^{5/4}\right) = e^{9/4} = \sqrt[4]{e^9},$

$u_3 = e\left(e^{9/4}\right)^{1/2} = e\left(e^{9/8}\right) = e^{17/8}.$

2) $\frac{\mathrm{v}_{\mathrm{n}+1}}{\mathrm{v}_{\mathrm{n}}} = \frac{ln u_{n+1}-2}{ln u_n-2} = \frac{\ln\sqrt{\mathrm{u_n}}-2}{\ln u_n-2} = \frac{1+1/2\ln u_n-2}{\ln u_n-2}\frac{1/2(\ln u_n-2)}{\ln u_n-2} = \frac{1}{2}$. v est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Son premier terme est $\mathrm{v}_0 = ln u_0 - 2 = 1$.

3) D'où $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\ln u_n - 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Soit $u_n = \exp\left(2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$. Et $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^2$.

$\mathrm{S_n} = 8\left(\frac{1}{3}\right)^0 - 3 + 8\left(\frac{1}{3}\right)^1 - 3 + \cdots..+8\left(\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{n}} - 3 = 8\left(\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{n}}\right) - 3(\mathrm{n}+1),$

$S_n = 8\frac{1-(1/3)^{n+1}}{1-1/3} - 3n = 24\frac{1-(1/3)^{n+1}}{2} - 3n.$

3) $\lim_{n\to+\infty} u_n = -3$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$.

Exercice 10

Consigne

Soit f et g les fonctions qui à tout réel x associe $\mathrm{f(x) = e^x - 1}$ et $\mathrm{g(x) = f(x) - x}$.

1) En étudiant les variations de g, montrer que 0 est l'unique solution de l'équation $\mathrm{f(\alpha)} =$.

2) Représenter rapidement la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

3) A l'aide du tableau de variation de g, montrer que u est croissante.

4) Montrer que u est convergente et calculer sa limite.

5) Sans démonstration, en justifiant avec un dessin, préciser le comportement de u si $u_0 = 1$.

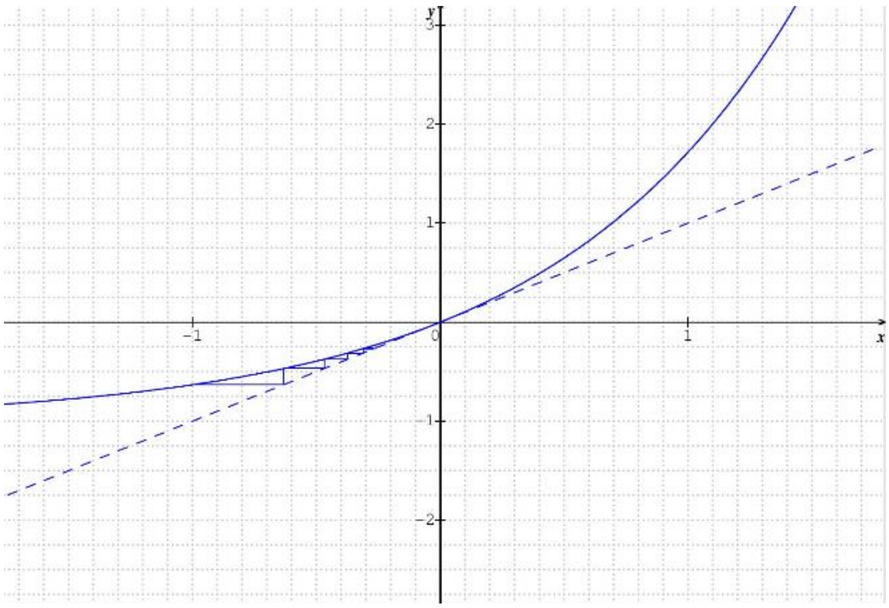
Correction

1) $g(x) = e^x - 1$ - x est définie et dérivable sur R et $g'(x) = e^x - 1$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(x)	-1	-	0	+	$+\infty$
g	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

D'après ce tableau de variations 0 est le minimum global de g qui est atteint en 0 seulement. Donc 0 est la seule racine de l'équation $g(x) = 0$ ou $f(x) = x$.

2) On peut représenter u à l'aide de la représentation graphique de f et de la droite d'équation y = x de la façon suivante :



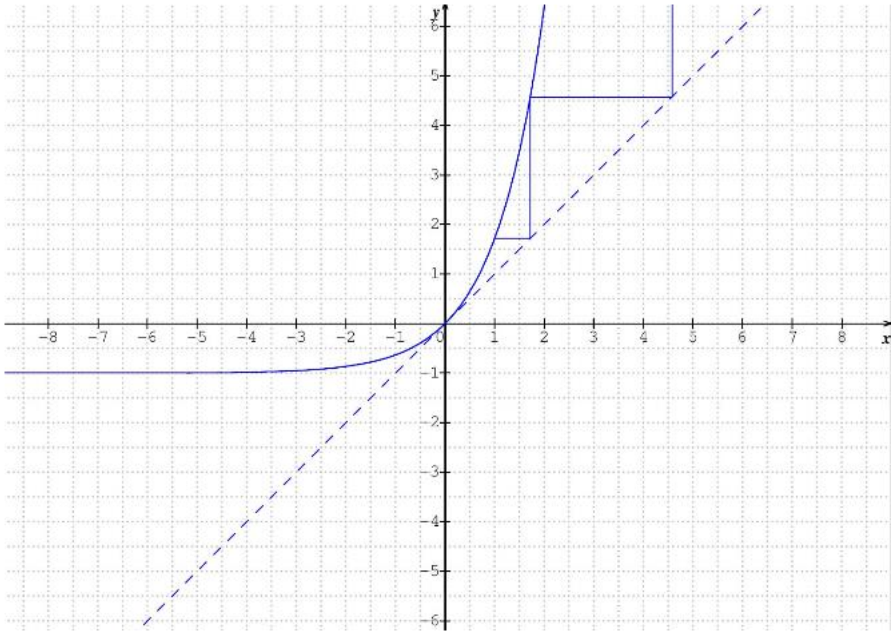
On prévoit donc que u est croissante et converge vers 0 .

3) D'après le tableau de variations de g pour tout réel $x, g(x) \geq 0$, donc pour tout entier $n, f(u_n) - u_n \geq 0$ et $u_{n+1} \geq u_n$. u est bien croissante.

4) $u_0 \leq 0$. Supposons (hypothèse de récurrence) que $u_n \leq 0$, puisque f est croissante sur $R\left(f'(x) = e^x > 0 \text{ sur } R\right)$,$f(u_n) \leq f(0)$, soit $u_{n+1} \leq 0$ et d'après les axiomes du raisonnement par récurrence u est majorée par 0 .

D'autre part u est croissante. u est donc croissante et majorée, et d'après un théorème du cours u est convergente. f étant continue sur R, u converge vers une racine de l'équation $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}$. D'après 1 . cette racine est 0 et u converge vers 0 .

5) D'après le dessin ci-dessous :



on peut prévoir que si $\mathrm{u}_0 = 1$, la limite de u_n est $+\infty$ et u diverge.

Exercice 12

Consigne

Un capital de 10000 € est placé à intérêts simples pendant 6 mois au taux annuel i, puis pendant 6 mois au même taux plus 2% (+ 2 points). On désire obtenir 1130 € d'intérêts en fin de placement. Quel doit être le taux i ? (on suppose que les intérêts des 6 premiers mois sont replacés avec le capital pour les 6 derniers mois).

Correction

On peut faire le schéma suivant : $\mathrm{V}_0 = 10000€ \xrightarrow[\mathrm{i}]{} \mathrm{V}_1 \xrightarrow[\mathrm{i+0.02}]{} \mathrm{V}_2$

D'où $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_0 + \frac{1}{2} \sim \mathrm{V}_0 \mathrm{i} = 10000\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)$, $\mathrm{V}_2 = \mathrm{V}_1 + \frac{1}{2} \sim \mathrm{V}_1(\mathrm{i} + 0.02) = \mathrm{V}_1\left(1 + \frac{\mathrm{i}+0.02}{2}\right) = 10000\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\left(1 + \frac{\mathrm{i}+0.02}{2}\right)$. D'où $11130 = 10000\left(1 + \frac{i}{2}\right)\left(1 + \frac{i+0.02}{2}\right)$. Cette équation du second degré s'écrit après réduction : $250\mathrm{i}^2 + 1005\mathrm{i} - 103 = 0. \Delta = 1113025 = 1055^2$ et $\mathrm{i} = 0.1$ (i est positif, on élimine donc la solution négative de l'équation précédente). Soit $\mathrm{i} = 10\%$.

Exercice 13

Consigne

Un investisseur a placé une certaine somme à intérêts composés pour une longue période. On dispose des renseignements suivant sur ce placement :

- le montant de la valeur acquise au bout de la $7^{\text{ème}}$ année s'élève à 177014.22 €,

- le montant de la valeur acquise au bout de la $10^{\text{ème}}$ année s'élève à 226098.34 €,

- le montant des intérêts capitalisés à l'expiration de la durée du placement se monte à 239 974.29 €.

1) Retrouver le taux d'intérêt.

2) Retrouver le capital investi.

3) Déterminer la durée totale du placement.

Correction

On peut faire le schéma suivant : $\mathrm{V}_7 = 177014.22€ \longrightarrow \mathrm{V}_{10} = 10226098.34€$

On a donc $\mathrm{V}_{10} = \mathrm{V}_7(1+\mathrm{i})^3$ et $\mathrm{i} = \sqrt[3]{\frac{\mathrm{V}_{10}}{\mathrm{V}_7}} - 1 =, soit \mathrm{i} = 8.5\%.$

D' autre part $\mathrm{V}_7 = \mathrm{V}_0(1+\mathrm{i})^7$, d'où $\mathrm{V}_0 = \frac{\mathrm{V}_7}{(1+\mathrm{i})^7} = 100000€.$

$\mathrm{V}_\mathrm{n} = \mathrm{V}_0 + \mathrm{I} == 100000 + 229\ 974.29$ $=339\ 974.29$. D'autre part $\mathrm{V}_\mathrm{n} = \mathrm{V}_0(1+\mathrm{i})^\mathrm{n}$, d'où $(1+\mathrm{i})^n = \frac{V_n}{V_0}$, et $n\ln(1+i) = \ln\frac{V_n}{V_0}$ et $n = \frac{\ln V_n - \ln V_0}{\ln(1+i)} = 15$ ans.

Exercice 14

Consigne

Un organisme bancaire propose les contrats suivants :

C_3 : contrat à 3 ans et 4 mois. On investit un capital pendant cette période. A la fin de la période, si l'indice du CAC 40 a augmenté, on récupère son capital, plus une prime de 20% du capital, sinon on ne récupère que son capital.

C_5 : contrat à 5 ans. La prime en cas d'augmentation du CAC 40 est de 40%.

C_8 : contrat à 8 ans et 4 mois. La prime en cas d'augmentation du CAC 40 est de 70%.

1) Dans l'hypothèse où le CAC40 augmente effectivement au cours de ces différentes périodes, calculer le taux annuel, donnant le même rendement, pour un calcul avec intérêts composés, pour chacun des contrats.

2) De plus, on a un droit d'entrée, pris sur le capital versé en début de période, ne fournissant donc pas d'intérêt, de 2 % pour les contrats C_5 et C_8. Evaluer, en fonction de la valeur actuelle V_0, la valeur acquise en fin de chacun de ces contrats, puis évaluer comme en 1) le taux annuel donnant le même rendement, toujours sur la base d'intérêts composés.

Correction

1) SiV_0 est le capital investi sous le contrat $C3$. Au bout de 3 ans, ce capital devient $V_3 = V_0 + 0.2V_0 = 1 \cdot 2V_0$. Si i est le taux annuel cherché, $V_3 = V_0(1+i)^3$. D'où $(1+i)^3 = 1.2$ et $i = \sqrt[3]{1.2} - 1 = 0.0627$, soit $i = 6.27\%$.

Pour C_5 : un calcul analogue donne $V_5 = 1.4V_0$ et le taux i cherché vérifie $V_5 = V_0(1+i)^5$ et $(1+i)^5 = 1.4$ d'où $i = \sqrt[5]{1.4} - 1 = 0.0696$, soit $i = 6.96\%$.

Pour C_8 : un calcul analogue donne $V_8 = 1.7V_0$ et le taux i cherché vérifie $V_8 = V_0(1+i)^8$ et $(1+i)^8 = 1.7$ d'où $i = \sqrt[8]{1.7} - 1 = 0.0686$, soit $i = 6.86\%$.

2) Pour $C_5: V_5 = V_0 - 0.2{\sim}V_0 + (V_0 - 0.2{\sim}V_0) \times 0.4 = V_0 \times 0.98 \times 1.4$. D'où $0.98 \times 0.4 = (1+i)^5$ et $i = \sqrt[5]{0.98 \times 1.4} - 1 = 0.0653$, soit $i = 6.53\%$.

Pour $C_8: V_8 = V_0 - 0.2V_0 + (V_0 - 0.2V_0) \times 0.7 = V_0 \times 0.98 \times 1$. D'où $0.98 \times 1.7 = (1+i)^8$ et $i = \sqrt[8]{0.98 \times 1.7} - 1 = 0.0659$, soit $i = 6.59\%$.

Exercice 15

Consigne

Un industriel se propose d'acquérir une machine. Il consulte trois fournisseurs qui lui font chacun une offre.

- Le fournisseur A propose une machine pour 50000 € comptant.

- Le fournisseur B propose une machine payable en quatre fois : 10 000 € comptant, 20 000 € après un an, 20 000 € après 2 ans, 10 000 € après trois ans

- Le fournisseur C propose une machine payable en six fois : rien au comptant, 10 000 € après un an, 10 000 € après 2 ans, 10 000 € après 3 ans, 15 000 € après 4 ans, 15 000 € après 5 ans, 10 000 € après 6 ans

Sachant que les trois machines sont équivalentes pour l'industriel, et que le taux d'actualisation sur le marché financier est 10.75% l'an, déterminer quelle est l'offre la plus intéressante (pour cela calculer les valeurs actualisées des offres de B et C).

Correction

Pour A : $V_0 = 50000$ €.

Pour B : $V_0 \colon 10000 + 20000(1.075)^{-1} + +20000(1.075)^{-2} + +15000(1.075)^{-3}$, $V_0 = 51726.05€$.

Pour C : $V_0 = 10000(1.075)^{-1} \quad +10000(1.075)^{-2} + 10000(1.075)^{-2} + 10000(1.075)^{-3} + 15000(1.075)^{-4} + 15000(1.075)^{-5}10000(1.075)^{-6} = 48936.22€$

Ainsi le fournisseur C propose la machine la plus avantageuse.

Exercice 16

Consigne

Un appartement est évalué à 160 000 €. Le propriétaire en propose l'achat aux conditions suivantes :

50 000 € comptant plus 18 mensualités de 6 500 €. La première ayant lieu le 15/04/2002 soit 3 mois plus tard, et la dernière le 15/01/2006.

Sachant que le taux d'actualisation est de 9% l'an, est-ce une opération intéressante ?

Correction

$V_0 = 50000 + 6500\big((1+i)^{-3/12} + (1+i)^{-4/12} + \cdots + (1+i)^{-20/12}\big)$.

Posons $q = (1+i)^{1/12} = 1.09^{1/12} = 1.0072$.

$V_0 = 50000 + 6500(q^{-3} + \cdots . + q^{-20})$

$V_0 = 50000 + 6500q^{-2}(q^{-1} + \cdots + q^{-18}) = 50000 + 6500q^{-2}\frac{1-q^{-18}}{q-1}$, $\quad V_0 = 50000 + 6500 \times 0.985754 \times 16.8257 = 157809€$.

Cette opération apparaît donc intéressante du point de vue de l'acheteur.

Exercice 17

Consigne

1) Quel est le montant de l'annuité constante à s'acquitter si au taux de 10% par an, on a obtenu pour l'achat d'un bien de 100 000 €, le règlement par 10 annuités constantes, la première payable immédiatement.

2) Si l'annuité est égale à 19 564.08 € et si le taux est égal à 12%, combien d'annuités faut-il régler ?

Correction

1) D'après le cours $V_0 = a + a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. Ici $V_0 = 100000€, i = 0.1$ et $n = 9$, puisque la première annuité est payable immédiatement. D'où $100000 = a\left(1 + \frac{1-1.1^{-9}}{0.1}\right) = 6.759a$ et $a = 14795.08$ €.

2) En utilisant toujours la même formule : $100000 = 19564.08\left(1 + \frac{1-1.12^{-(n-1)}}{0.12}\right)$, soit $\frac{1-1.12^{-(n-1)}}{0.12} = \frac{100000}{19564.08} - 1$ et $1.12^{-(n-1)} = 1.12 - 0.12\frac{100000}{19564.08} = 0.506631$.

Et $-(n-1)\ln 1.12 = \ln(0.506631)$, soit $n = 1 - \frac{\ln(0.506631)}{\ln 1.12} = 7$ ans.

Exercice 18

Consigne

Etablir l'échéancier d'un emprunt de 45 000 € au taux de 8% pendant 8 ans sachant que le remboursement est effectué à annuités constantes.

Correction

L'annuité a peut être calculée par la formule : $V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. Ainsi $45\,000 = a\frac{1-(1.08)^{-8}}{0.08} = 5.746639a$ et $a = 7\,830.66€$.

Les intérêts pour la 1 $1^{\text{ère}}$ année sont $I_1 = V_0 i = 3\,600€$, l'amortissement de l'emprunt pour la 1^{ere} année est $A_1 = a - I_1 = 4230.66€$ et le capital restant dû au début de la $2^{\text{ème}}$ année est $V_1 = V_0 - A_1 = 10769.34€$, de même $I_2 = V_1 i = 3261.55$,

$A_2 = a - I_2 = 4569.11€$..etc. On obtient le tableau d'amortissement suivant :

Période k	V_{k-1} Capital restant dû au début de la période k	I_k intérêts pour la période k	A_k amortissement pour la période k	a annuité
1	45 000	3 600	4 230.66	7830.66
2	40 769.34	3 261.55	4 569.11	7830.66
3	36 200.23	2 896.02	4 934.64	7830.66
4	31 265.59	2 501.25	5 329.41	7830.66
5	25 936.18	2 074.89	5 755.77	7830.66
6	20180.41	1 614.43	6 216.23	7830.66
7	13 964.18	1 117.13	6 713.53	7830.66
8	7 250.65	580.01	7 250.65	7830.66
Total			45 000	

Exercice 19

Consigne

Une société emprunte 1 000 000 € qu'elle amortit par annuités constantes sur 10 ans au taux annuel de 10%. Après le paiement de la 5ème annuité, elle rembourse le capital restant dû pour un nouvel emprunt à annuités constantes sur 5 ans, au taux annuel de 6.5%.

1) Construite le tableau d'amortissement relatif aux 5 premières années.

2) Sachant qu'on lui a appliqué une pénalité de 3% sur le capital restant dû du premier emprunt, quelle est l'économie réalisée ?

Correction

1) Si a est l'annuité du premier remboursement : $V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = a\frac{1-(1.1)^{-10}}{0.1}$.

D'où $a = \frac{1000000}{6.144567106} = 162745.39€$. A l'aide des formules $I_k = 0.1V_{k-1}, A_k = a - I_k$ et $V_k = V_{k-1} - A_k$, on obtient le tableau d'amortissement suivant :

Période k	V_{k-1} Capital restant dû au début de la période k	I_k intérêts pour la période k	A_k amortissement pour la période k	a annuité
1	1 000 000	100 000	62 745.39	162 745.39
2	937 254.61	93 725.46	69 019.93	162 745.39
3	868 234.68	86 823.47	75 921.92	162 745.39
4	792 312.76	79 231.28	83 514.11	162 745.39
5	708 798.65	70 879.86	91 865.53	162 745.39

2) $V_5 = V_4 - A_5 = 616933.12€$.

Pénalité $= V_5 \times 0.03 = 18507.99€$.

Pour le nouvel emprunt sur 5 ans, il reste donc à rembourser

V_5 + pénalité $= 635441.11$ €. La nouvelle annuité a' pendant ces 5 ans vérifie donc :

$635441.11 = a' \frac{1-(1.065)^{-5}}{0.065} = 4.155679438a'$, soit a' $= 152909.08$ €. La précédente annuité était de 162745.39 €, l'économie est donc de 9836.31 € par an.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 2, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).