Suites

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Introduction

Objectif de la leçon : Maîtriser la notion de suite, les définitions s'y rattachant ainsi que les méthodes permettant de prouver la convergence. Savoir les définitions et les résultats se rapportant aux suites arithmétiques et géométriques. Être capable de faire un raisonnement par récurrence si la situation s'y prête. Enfin connaître les notions de calcul financier abordées.

Cette leçon s'intéresse aux techniques particulières à mettre en œuvre pour les fonctions ayant un ensemble de départ discret puisque c'est N. La notion de suite intervient par exemple dès que l'on considère des fonctions séquentielles du temps. C'est à dire, où le temps n'est pas considéré comme continue, mais comme prenant les valeurs $0,1,2,3$ .... On débouche alors sur des problèmes posés sur un mode récurrent, où une situation à l'instant n est définie à partir du passé immédiat, $\mathrm{n}-1$. Quant aux calculs financiers, il est très utile dans la pratique d'en avoir un minimum de notions. Ces notions sont bien sûr indispensables aux futurs gestionnaires.

Généralités

Définition : Une suite réelle est une fonction de N dans R.

Notation : $u : n \to u_n$,u est aussi notée (u_n).

Différentes façons de définir une suite

1) $u_n = f(n)$. u est la restriction à N d'une fonction numérique connue. C'est le cas le plus simple.

2) u_n est défini à partir des termes précédents, on dit alors que la suite u est définie par récurrence. $u_{n+1} = fu_n$ ou $f(u_n, u_{n-1})$..etc.

On constate que pour les suites définies par récurrence un terme ne peut être obtenu que si on connaît tous ses précédents. L'analyse de telles suites est beaucoup plus compliquée que celle des suites de la forme $u_n = f(n)$.

Remarques :

1) Avec du temps, on peut toujours étudier une suite en calculant les termes les uns après les autres, ce que l'on ne peut pas faire lorsque la variable est réelle (entre 2 réels distincts il y a toujours une infinité de réels). En général chaque terme a un précédent et un successeur. Pour faire ce genre d'étude la machine est un bon outil.

2) On s'intéresse surtout au comportement de la suite pour les grandes valeurs de n. Il faut donc faire attention aux irrégularités trompeuses que peuvent présenter les premiers termes, irrégularités qui n'ont pas d'intérêt.

3) Il faut prendre garde à la numérotation des suites, si u_0 est le premier terme, u_n est le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme, si u_1 est le premier terme, u_n est le $n^{\text{ième}}$ terme. Parfois, pour des problèmes d'ensemble de définition, ou autres, la suite commence au rang k, u_k est le premier terme, u_n est alors le terme de rang $(n+1-k)$.

Définitions nécessaires à l'étude des suites

Suite majorée : u est majorée si et seulement si il existe un réel M tel que :

$$\forall n \in N \quad u_n \leq M$$

Suite minorée : u est minorée si et seulement si il existe un réel m tel que :

$$\forall n \in N \quad u_n \geq m.$$

Suite bornée : u est bornée si et seulement si u est à la fois majorée et minorée.

Remarque utile : u est bornée si et seulement si u est majorée.

Suite croissante : u est croissante à partir du rang n_0 si et seulement si :

$$\forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0 \quad \mathrm{u}_{\mathrm{n}+1} \geq \mathrm{u}_{\mathrm{n}}$$

Suite décroissante : u est décroissante à partir du rang n_0 si :

$$\forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0 \quad \mathrm{u}_{\mathrm{n}+1} \leq \mathrm{u}_{\mathrm{n}}$$

N.B. : Si f est croissante (respectivement décroissante) sur $[\mathrm{n}_0, +\infty[$. et si $\mathrm{u}_{\mathrm{n}} = \mathrm{f}(\mathrm{n})$, u est croissante (respectivement décroissante) à partir du rang n_0 (attention la réciproque est fausse, dans ce cadre, par exemple u peut être croissante sans que f le soit).

Remarques :

1) Pour étudier la monotonie d'une suite définie par récurrence, le plus simple est d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ u est croissante et si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ u est décroissante.

2) Toute suite croissante est minorée par son premier terme.

3) Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Limites

Quand on étudie une suite, on s'intéresse essentiellement à son comportement pour les grandes valeurs de n. En effet les premiers termes sont calculables facilement et nous donne l'allure de la suite pour n petit. Aussi, on s'attache le plus souvent à savoir si $\lim\limits_{\mathrm{n}\to+\infty} \mathrm{u}_{\mathrm{n}}$ existe et à calculer cette limite si elle existe.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe et est finie, on dit que u converge, ou est convergente, dans les autres cas (limite infinie ou pas de limite) on dit que u est divergente ou diverge.

Cas des suites définies par $u_n = f(n)$

Si $u_n = f(n)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Si u_n est équivalent à a_n quand $n \to +\infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ existe alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Théorèmes liés à la convergence

Théorème d'unicité : Si (u_n)a une limite, elle est **unique**.

Théorème des « gendarmes » : Si, à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n \leq w_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} v_n =$ $\lim_{n\to+\infty} w_n =$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = ℓ$.

- Toute suite croissante majorée converge.
- Toute suite décroissante minorée converge.

Cas des suites définies par $u_{n1} = fu_n$

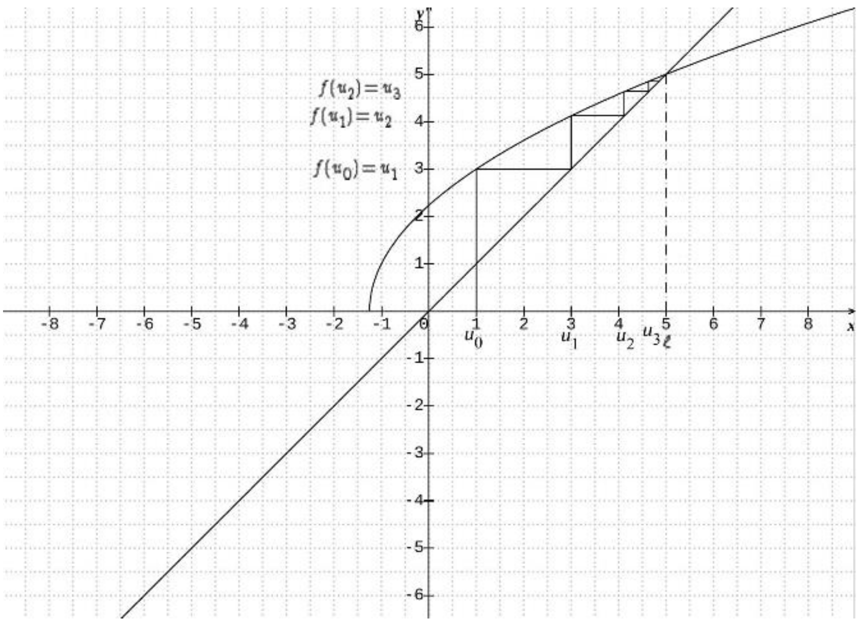
Dans ce cas on se gardera bien de penser que u et f ont même limite à l'infini mais on utilisera les théorèmes précédents.

Remarque : Il faut faire attention aux rôles différents que joue f dans les 2 cas suivants : $u_n = f(n)$ et $u_n = f(u_n)$.

Représentation graphique de u_n dans le cas où u_{n+1}= f(u_n)

Dans ce cas la représentation de u est particulière et utilise la représentation graphique de f et la droite d'équation s.

<u>Exemple :</u>



On utilise la courbe représentative de f pour obtenir $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées. Puis à l'aide de la droite d'équation $y = x$ on rabat u_1 sur l'axe des abscisses. On obtient u_2 sur l'axe des ordonnées à l'aide de la courbe représentative de f ...etc

C'est l'escalier qui est intéressant. Ici on prévoit que u est croissante et converge vers l'abscisse $ℓ$ du point d'intersection de la courbe et de la droite.

Par contre si $u_0 = 6$ par exemple on prévoit ici que u est toujours croissante mais diverge.

Théorème

Voici un théorème très utile pour déterminer la limite d'une suite définie par récurrence à l'aide d'une fonction continue et quand on sait que cette suite converge.

Si u est définie par récurrence par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ et converge et si f est continue sur un intervalle contenant les valeurs de u alors la limite ι de u vérifie $f(l) = \iota$.

Attention : Ce théorème ne prouve pas que u converge. Pour appliquer ce théorème il faut d'abord montrer que u converge et bien sûr que f est continue.

Suites arithmétiques et raisonnement par récurrence

Suites arithmétiques

Définition : (u_n)est une suite arithmétique, s'il existe un réel r tel que, pour tout n de N, $u_{n+1} = u_n + r$. r est appelé raison de la suite arithmétique et est indépendant de n.

De proche en proche on obtient :

$$u_n = u_0 + nr$$

Somme des n premiers entiers non nuls : $1 + 2 + 3 + \cdots \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique :

$$\sum_{i=0}^{n-1} u_i = u_0 + u_1 + \cdots .. + u_{n-1} = n\left(\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}\right).$$

Nombre de termes

Demi-somme des termes extrêmes

Remarque : Pour montrer qu'une suite est arithmétique, il faut s'intéresser à la différence $u_{n+1} - u_n$, qui doit être indépendante de n. On remarquera aussi que plus généralement :

$$u_n = u_k + (n-k)r \quad (k \in N)$$

Raisonnement par récurrence

On veut démontrer qu'une propriété, dépendant du rang n, est vraie à partir d'un certain rang n_0. Il faut montrer que :

1) La propriété est vraie au rang n_0.

2) Quel que soit $n \geq n_0$, si la propriété est vraie jusqu'au rang n, alors elle est vraie au rang suivant, le rang $n+1$.

Cette méthode est celle du raisonnement par récurrence, elle met en forme rigoureusement le raisonnement qu'on fait de « proche en proche ».

Remarque : les 2 parties du raisonnement sont à exprimer, même si la première paraît « évidente ». Le raisonnement peut tomber en défaut si elle n'est pas réalisée.

Suites géométriques

Suites géométriques

Définition : (u_n) est une suite géométrique s'il existe un réel q non nul, indépendant de n, tel que pour tout n de N: $u_{n+1} = qu_n$. q est la raison de cette suite géométrique.

De proche en proche, ou par récurrence, on obtient : $u_n = u_0 q^n$.

Etude de $n \rightarrow q^n$

$$1^{e} \text{ cas} : q > 0$$

Si $q > 1 (q^n)$ est croissante et $\lim_{n\to+\infty} q^n = +$,

si $0 < q < 1 (q^n)$ est décroissante et $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$,

si $q = 1 \quad (q^n)$ est constante et égale à 1 .

$$2^{ème} \text{ cas} : q < 0$$

q^n est positif si n est pair, négatif si n impair. Cette suite est dite alternée.

Si $|q| > 1 (q^n)$ n'est pas bornée et n'a pas de limite,

si $|q| < 1 (q^n)$ est bornée et $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.

On retiendra que si $q \neq 1$: (q^n) converge si et seulement si $|q| < 1$, et alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Remarque : Pour montrer qu'une suite est géométrique, on peut s'intéresser au quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n} (u_n \neq 0)$. On remarquera aussi que plus généralement : $u_n = u_k q^{n-k} (k \in N)$.

Somme des n premiers termes de la suite géométrique (q^n).

$$\text{Si } q \neq 1: \sum_{i=0}^{n-1} q^i = 1 + q + q^2 + \cdots \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q^n - 1}{q-1}$$

$$\text{Si } q = 1: \sum_{i=0}^{n-1} q^i = 1 + q + q^2 + \cdots \ldots + q^{n-1} = n.$$

Cas général : $u_n = u_0 q^n \quad \sum_{i=0}^{n-1} u_i = u_0 + u_1 + \cdots \ldots + u_{n-1} = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}$.

$$\text{D'où si } |q| < 1 \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} u_i = \frac{u_0}{1-q}.$$

Calcul financier

Intérêts

Un placement (resp. un emprunt) V_0 sur n années rapporte (resp. coûte) un intérêt calculé au taux annuel i. Au bout de n années, la somme V_0 devient V_n : $V_n = V_0 + I$

Cas des intérêts simples

Les intérêts sont alors retirés chaque année et seul le capital est replacé pour l'année suivante. On a alors : $I = nV_0 i$

$$V_n = V_0 + nVV_0 i$$

Ici (V_n) est une suite arithmétique de raison $V_0 i$.

Remarques : 1) Si i est un taux mensuel n est un nombre de mois, si i est un taux trimestriel, n est un nombre de trimestres ...etc

2) La formule précédente reste vraie si n est une fraction. Par exemple si on veut calculer V_n au bout de 8 mois, la formule précédente s'applique avec i annuel et $n = \frac{8}{12}$.

Cas des intérêts composés

Dans ce cadre, les intérêts sont placés avec le capital et portent à leur tour intérêt pour la période suivante. Au bout de la $n^{\text{ième}}$ année (si i est annuel) les intérêts se portent à $I = V_0 i + V_1 i + \cdots V_{n-1} i$

$$V_n = V_{n-1} + V_{n-1} i$$

Ainsi (V_n) est une suite géométrique de raison $(1 + i)$ et $V_n = V_0 (1 + i)^n$

Remarque : Les remarques précédentes restent valables. Par exemple, sur 40 mois, si i est annuel, $n = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$ et $V_n = V_0(1+i)^{10/3}$.

En général on utilise les intérêts simples pour des courtes durées (inférieures à un an). Ces intérêts interviennent essentiellement pour les effets de commerce. Il s'agit, pour certaines entreprises de se faire payer à l'avance par la banque certaines sommes (effets) que le client payera plus tard.

A partir du paragraphe suivant et si ce n'est pas précisé, on considérera que les intérêts sont composés. De même si ce n'est pas précisé, on supposera le taux d'intérêt, annuel.

Actualisation

Toute somme d'argent peut être placée à un taux à peu près identique dans les banques. Ainsi une somme de 1000 € placée à 5% l'an vaut au bout de 2 ans $1000(1.05)^2$ soit 1102.5€.

Ainsi la somme de 1000 €, ne représente pas la même valeur si elle est reçue aujourd'hui ou si elle l'a été il y a deux ans. En effet si elle a été versée il y a deux ans, elle vaut aujourd'hui 1102.5 €.

Aussi pour comparer 2 sommes à 2 dates différentes, il faut tenir compte de ce phénomène. Et pour ce faire on calcule ces sommes à une même date. Un problème se pose alors : quel taux utiliser ? Dans ce genre de calcul, on utilise un taux dit d'actualisation qui est calculé par les instances financières de façon un peu compliquée. Il tient compte de plusieurs phénomènes conjoncturels économiques. Il vous sera toujours donné.

V_0 (valeur actuelle) $\longrightarrow$ V_n (valeur acquise)

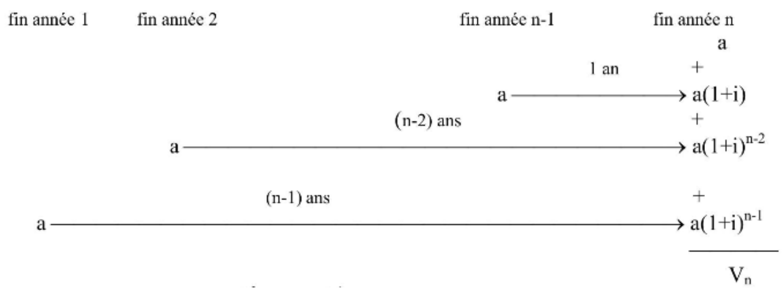
Actualiser V_n à l'année 0, c'est calculer V_0, connaissant V_n. D'après le paragraphe précédent

$$V_0 = V_n(1+i)^{-n}$$

Annuités constantes (versement en fin de période)

On verse n annuités constantes a, le premier versement ayant lieu à la fin de la première année, la $n^{\text{ième}}$ annuité ayant lieu à la fin de l'année n.

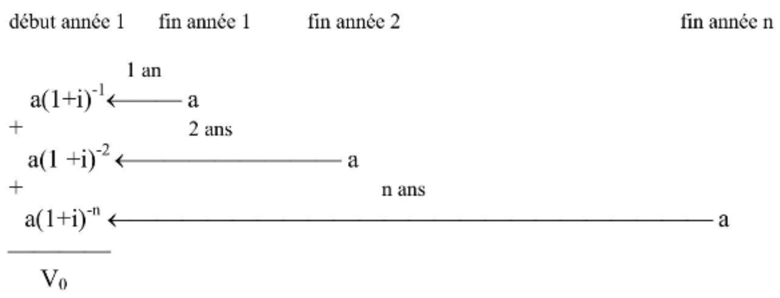
1) Calculons la valeur acquise V_n des ces n annuités au taux annuel i, à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année. On peut faire le schéma suivant :



$V_n = a(1 + (1 + i) + \cdots (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-1}$ et en utilisant la formule :

$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{q^n-1}{q-1}$ avec q=1+i. $V_n = a\,\frac{(1+i)^n-1}{i}$

2) Calculons la valeur actuelle V_0 au début de la première année. On peut faire le schéma suivant :



$V_0 = a((1 + i)^{-1} + (1 + i)^{-2} + \cdots .. + (1 + i)^{-n})$ et d'après la formule $q^{-1} + q^{-2} + \cdots . + q^{-n} = \frac{1-q^{-n}}{q-1}$

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-m}}{i}$$

Remarque : On peut vérifier que $V_n = V_0(1 + i)^n$.

Tableaux d'amortissement (annuités constantes)

On considère un emprunt V_0 qui est remboursé selon un échéancier. A chaque échéance (ici on considérera que les échéances sont annuelles), il est d'une part remboursé une partie du capital (= amortissement du capital) et d'autre part versé les intérêts sur les sommes restant dues. Si a_k est l'échéance de l'année k, A_k, l'amortissement du capital correspondant à cette période et I_k, les intérêts payés pour cette même année, on a

$$a_k = A_k + I_k$$

Si V_{k-1} est le capital restant dû au début de l'année k, V_0 est la valeur totale de l'emprunt. Et si i est le taux d'intérêt et n le nombre total d'échéances, on a : $I_k = V_{k-1}i, V_k = V_{k-1} - A_k$ et $V_0 = A_1 + \cdots + A_n$

L'échéancier, qui récapitule l'ensemble des échéances dans un même tableau, s'appelle le tableau d'amortissement, il précise pour chaque année V_{k-1}, I_k, A_k et a_k.

Ici, on considère un remboursement à annuités constantes. Donc

$$\forall k a_k = a$$

Nous pouvons donc utiliser la formule précédente : $V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ et calculer a dès qu'on connaît V_0 et i.

On calculera $V_1 = V$ is puis $A_1 = a - I_1$. Ainsi la première ligne du tableau est établie et on calcule les autres de la même manière.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 2, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).