Fonctions numériques de deux variables

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices

Exercice 1

Consigne

Indiquer les plus grands sous-ensembles possibles de $\mathbb{R}^2$ sur lesquels on puisse définir les fonctions suivantes, construire ces ensembles dans un plan.

$g_1 : (x, y) \in D_1 \mapsto ln(xy)$ $\quad g_2 : (x, y) \in D_2 \mapsto ln(x^2 - y)$.

Exercice 2

Consigne

On considère la fonction numérique de deux variables réelles définie sur :

$Dg = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y = -x\}$ par $g : (x, y) \in D_g \mapsto \frac{2x-y}{x+y}$.

1) Représenter graphiquement le domaine de définition D_g.

2) On se limite aux couples (x, y) tels que $y = 2\,x$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} g\,(x, 2x)$.

3) On se limite aux couples (x, y) tels que $y = 3\,x$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} g\,(x, 3x)$.

4) Etudier la limite éventuelle de g en $(0,0)$.

Exercice 3

Consigne

1) Montrer que pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2, -(x^2 + y^2) \leq 2xy \leq x^2 + y^2$

2) En déduire l'existence et la valeur de la limite suivante :

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. On pourra utiliser directement la définition donnée en cours d'une fonction de deux variables, ou plus facilement, poser $z = x^2 + y^2$ et encadrer l'expression $\frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ à l'aide d'une expression d'une seule variable réelle.

Exercice 4 : courbes de niveau

Consigne

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction :

$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, y) = ye^{2xy}$.

1) Calculer la différentielle de f.

2) Que penser de la ligne de niveau 0 ?

3) Montrer que la ligne de niveau 1 est incluse dans l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$, qu'elle est une courbe sur laquelle l'abscisse x est une certaine fonction de l'ordonnée y, et exprimer cette fonction d'y.

Exercice 5

Consigne

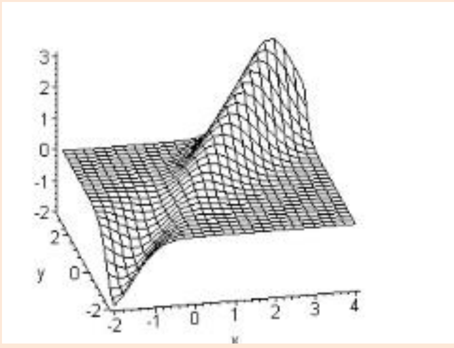
Indiquer quel est le plus grand sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ sur lequel on peut définir la fonction

$f : (x, y) \in D \mapsto f(x, y) = \frac{ln(xy-1)}{x}$.

Exercice 6

Consigne

On considère la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x \exp(-(x - y)^2)$.



1) Déterminer la différentielle de f.

2) Pour y fixé à une valeur $y = y_0$, on considère la fonction $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y_0)$

Etudier ses variations et montrer qu'elle est majorée par un nombre ne dépendant que de y_0.
Pour x fixé à une valeur $x = x_0$, on considère la fonction

$f_2 : y \in \mathbb{R} \mapsto f(x_0, y)$. Etudier ses variations et montrer qu'elle est majorée par un nombre ne dépendant que de x_0.

3) On considère à nouveau f et on se restreint aux (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x = y$. Montrer que f n'est majorée par aucun nombre.

Exercice 7

Consigne

On cherche les fonctions f définies et différentiables sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$df = (y^2 + 4x)dx + (2xy - y)dy$$

1) On fixe une valeur y_0 pour y. Quelles sont les fonctions numériques d'une variable, g, définies sur $\mathbb{R}$, telles que $g'(x) = y_0^2 + 4x$?

2) En déduire quelles sont les fonctions f de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 + 4x$$

3) En déduire quelles sont les fonctions de deux variables $f(x, y)$ définies et différentiables sur $\mathbb{R}^2$ telles que $df = (y^2 + 4x)dx + (2xy - y)\,dy$ sur tout $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8

Consigne

(On pourra s'inspirer de l'exercice précédent).

Déterminer toutes les fonctions numériques f de deux variables réelles, différentiables sur $\mathbb{R}^2$, telles que :

$$df = (y + 1)dx + (x + e^y)dy$$

Exercice 9

Consigne

Montrer qu'on ne peut trouver de fonction f définie et différentiable sur $\mathbb{R}^2$ telle que $df = (y^2 + xy)dx + (2xy - y)dy$ pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 1, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Cette œuvre est mise à disposition dans le respect de la législation française protégeant le droit d'auteur, selon les termes du contrat de licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/). En cas de conflit entre la législation française et les termes de ce contrat de licence, la clause non conforme à la législation française est réputée non écrite. Si la clause constitue un élément déterminant de l'engagement des parties ou de l'une d'elles, sa nullité emporte celle du contrat de licence tout entier.