Fonctions numériques de deux variables

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

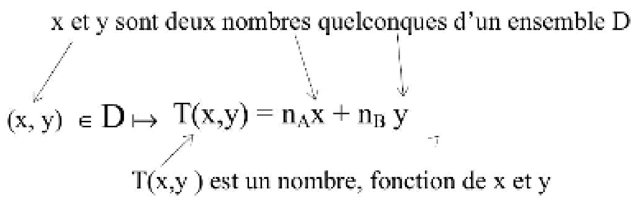
Introduction

Objectif de la leçon : Se familiariser avec les fonctions numériques de deux variables réelles, qui associent un nombre à tout couple de nombres. Savoir calculer et utiliser les dérivées partielles. Interpréter les lignes de niveau, courbes d'équation $f(x, y) =$ constante où f désigne une fonction de deux variables.

Considérons une unité de production qui fabrique deux produits, A en quantité x et B en quantité y. Le produit A demande n_A heures de travail par unité produite, le produit B n_B. n_A et n_B sont fixés, en revanche on peut décider des quantités produites x et y. Le nombre d'heures de travail nécessaire est fonction d'x et y à la fois : à tout couple de nombres positifs (x, y) on associe un nombre : la quantité de travail $T = n_A x + n_b y$.

On note $\mathbb{R}^2$ l'ensemble de tous les couples (x, y) formés de deux réels x, y.

Ici les quantités ne pouvant être que positives, on dit que la quantité de travail $\boldsymbol{T}$ **est une fonction des deux variables (x, y), définie sur le sous-ensemble D des couples de nombres positifs** :



On peut déjà faire les remarques suivantes :

Pour représenter T, on ne pourra pas utiliser une courbe d'un plan : chacune des variables x et y peut prendre, indépendamment de l'autre, n'importe quelle valeur positive. Si on représente toutes les valeurs possibles d'x sur un axe, et celles d'y sur un autre, x et y décrivent toute une partie d'un plan, et il faut un 3ème axe pour représenter $T(x, y)$.

Les représentations d'une fonction de deux variables se font dans l'espace, à trois dimensions. Si $n_A = 50$ et $n_b = 5$, une variation d'une unité d'x engendre une variation de T 10 fois plus grande qu'une variation d'une unité d'y. Pour les fonctions d'une variable, le lien entre la variation de la variable et celle de la fonction est la dérivée. Pour une fonction de deux variables, il faudra disposer de deux quantités analogues à la dérivée d'une fonction d'une variable : ce seront les dérivées partielles.

Si on considère que la valeur de T est fixée par la capacité de travail T_0 de l'unité de production, alors x et y ne peuvent plus varier indépendamment : le choix de l'une d'elles détermine l'autre, x et y ne décrivent plus un plan, mais une courbe, ici la droite d'équation $n_A x + n_B y = T_0$.

Fonction de deux variables, ensemble de définition

Définition : couple, $\mathbb{R}^2$: Deux nombres, x et y, forment un couple noté (x, y). Ce couple est ordonné ce qui signifie que (2,10) et (10,2) sont considérés comme étant des couples différents.

L'ensemble de tous les couples de nombres réels est noté $\mathbb{R}^2$, ou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De façon générale, l'ensemble des couples (x, y) où x est dans un ensemble D_1 et y dans un ensemble D_2 est noté $D_1 \times D_2$.

Par exemple l'ensemble de tous les couples (x, y) formés par un nombre x positif et un nombre y négatif est noté $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$.

Définition : fonction numérique de deux variables : Il s'agit de l'association, à certains couples de $\mathbb{R}^2$, d'un nombre réel.

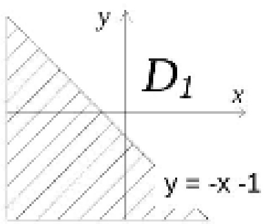
<u>Par exemple</u> : $(x, y) \in \mathbb{R} \mapsto xy + x^2$,

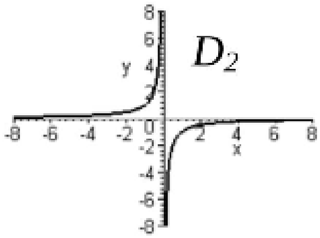
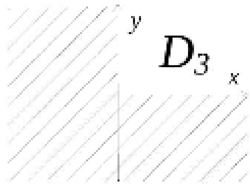
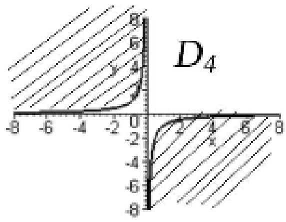
$(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{y}$,

$(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{xy}$

Ensemble de définition : C'est l'ensemble des couples (x, y) pour lesquels la fonction $f(x, y)$ est définie. Il s'agit d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, on pourra le représenter dans un plan, muni d'un repère. On porte x et y sur les axes.

Par exemple,

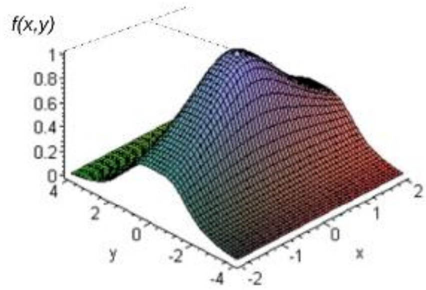
La fonction $(x, y) \mapsto \sqrt{1 + x + y}$ est définie sur l'ensemble D_1 des couples (x, y) tels que $1 + x + y \geq 0$. Ce domaine est délimité par la droite d'équation $y = -x - 1$	

La fonction $(x,y) \mapsto \frac{1}{1+xy}$ est définie sur l'ensemble D_2 des couples (x,y) tels que $xy \neq -1$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^2$ privé de l'hyperbole d'équation $y = -\frac{1}{x}$	
La fonction $(x,y) \mapsto \sqrt{y} + \sqrt{x}$ est définie sur l'ensemble D_3 des couples (x,y) tels que $x \geq 0$ et $y \geq 0$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.	
La fonction $(x,y) \mapsto \sqrt{1+xy}$ est définie sur l'ensemble D_4 des (x,y) tels que $xy > 1$, il est limité par l'hyperbole d'équation $y = -\frac{1}{x}$	

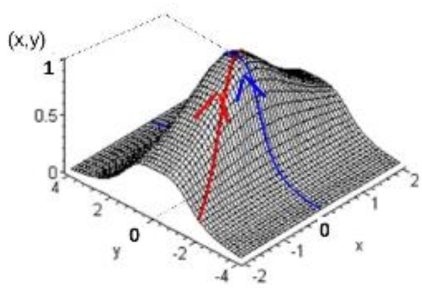
Limite, continuité

Notion de limite pour une fonction de deux variables

Considérons la fonction suivante, $f: (x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{ln(1+x^2+y^4)}{x^2+y^4}$. Elle est définie sur tout $\mathbb{R}^2$ sauf pour $(x,y) = (0,0)$ pourtant, sur le graphique, il semble qu'à mesure que (x,y) s'approche de $(0,0)$, $f(x,y)$ s'approche d'une valeur fixe : ici 1.



La notion de limite est plus délicate que pour une variable. Ici, (x,y) peut approcher $(0,0)$ de différentes façons. Par exemple, on a tracé $f(x,y)$ pour les (x,y) où x vaut toujours 0 (courbe bleue), et pour ceux pour lesquels $x = y$ (courbe rouge). On approche ainsi de $(0,0)$ par des chemins différents, on constate que quel que soit le chemin que l'on prend pour approcher de 0, $f(x,y)$ s'approche toujours de 1. On dit que f a pour limite 1 en $(0,0)$.



Limite : définitions

Une formulation intuitive de la notion de limite est la suivante : on écrit que $f(x,y)$ a pour limite L en (a,b), et on le note $(x\,;\,y) \to (a\,;\,b)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, lorsque $f(x,y)$ approche L avec toute précision, aussi fine soit-elle, dès que (x,y) est assez proche de (a,b).

Cette formulation est suffisante pour aborder tous les exercices que vous rencontrerez, mais à titre indicatif, voilà une définition plus rigoureuse (que l'on ne vous demande pas d'apprendre) $D\big((a,b),r\big)$ désigne le disque centré en (a,b) et de rayon r, c'est-à-dire l'ensemble des (x,y) tels que $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$.

Définition : f, d'ensemble de définition E, a pour limite L en (a,b) lorsque :

- Pour tout $r > 0, D\big((a,b),r\big) \cap E$ n'est pas vide.
- Pour tout $p > 0$, il existe un nombre $r_p > 0$, tel que pour tout (x,y) de $D([a,b],r) \cap E$, $L - p < f(x,y) < L + p$

Exemples et exercices

<u>Exemple de fonction ayant une limite en 0</u> : Montrons que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

On considère la fonction f : $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \mapsto \frac{ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

On utilise l'inégalité : pour tout $u \geq 0$, $0 \leq ln(1+u) \leq u$, que l'on peut montrer en étudiant sur $[0,+\infty[$ la fonction $u \mapsto ln(1+u) - u$.

On en déduit : pour tout $\mathrm{u} > 0$, $0 \leq \frac{ln(1+u)}{\sqrt{u}} \leq \sqrt{u}$.

On a donc : pour toute précision $p > 0$, et pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ du disque centré en $(0,0)$ de rayon p, $0 < x^2 + y^2 \leq p^2$, d'où $0 \leq \frac{ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq p$, c'est-à-dire $0 \leq f(x,y) \leq p$, ce qui prouve que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

Un exercice plus courant est de prouver qu'une fonction **n'a pas de limite en un point** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. C'est en fait souvent plus facile que de prouver qu'une fonction de deux variables a une limite. La **technique** est la suivante : on approche (a,b) par un chemin particulier, ce qui permet de se ramener à l'étude d'une limite d'une fonction à une variable. S'il existe un chemin sur lequel il n'y a pas de limite, ou des chemins sur lesquels les limites sont différentes, alors la fonction n'a pas de limite en (a,b).

Fonction continue

Définition : On dit qu'une fonction f de deux variables est continue en (a,b) si $f(a,b) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

Propriétés : ces propriétés sont ici admises.

Les polynômes de deux variables sont continus sur $\mathbb{R}^2$, les fonctions rationnelles (c'est-à-dire les quotients de polynômes) de deux variables sont continues sur tout leur domaine de définition.

Toute composée de fonctions continues est continue.

Ces deux propriétés, alliées au fait que toute fonction usuelle d'une variable est continue sur son domaine de définition, assurent que les problèmes de continuité que vous rencontrerez ne se poseront que là où il y aura un problème de définition.

Par exemple, considérons la fonction g :

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto g(x,y) = \begin{cases} \frac{ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ si } x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0 \\ 0, si\ x = y = 0 \end{cases}$$

Continuité sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(\mathbf{0},\mathbf{0})\}$:

Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, g est la composée de la fonction polynôme de deux variables :

$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$, continue sur $\mathbb{R}^2$, par la fonction d'une variable :

$u \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{ln(1+u)}{\sqrt{u}}$, qui est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$, en tant que quotient de deux fonctions usuelles.

g est donc continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Continuité en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$:

Il a été prouvé au paragraphe précédent que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$. Donc g est continue en $(0,0)$.

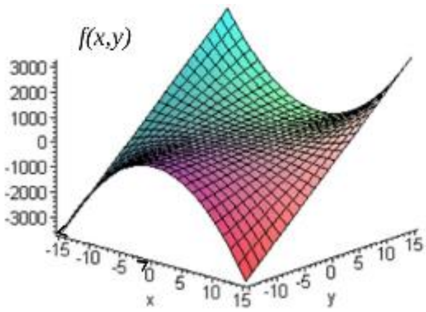
Donc g est continue sur tout $\mathbb{R}^2$.

Dérivées partielles

Dérivées partielles premières

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$, par :

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x,y) = x^2(y-1)$$



On essaie de préciser la variation de f par rapport à x d'une part, par rapport à y d'autre part.

Par exemple au point (3,5),

- On fixe $y = 5$ et on considère la **fonction d'x uniquement** : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x,5) = 4x^2$. Cette fonction d'$x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est $x \in \mathbb{R} \mapsto 8x$. Cette dérivée est appelée **dérivée partielle de $f(x,y)$ par rapport à x, au point $(3,5)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(3,5) = 24$.**
- On fixe $x = 3$, et on considère la **fonction d'y uniquement** : $y \in \mathbb{R} \mapsto f(3,y) = 9(y-1)$. Elle est dérivable, sa dérivée est $y \in \mathbb{R} \mapsto 9$. Cette dérivée est appelée **dérivée partielle de $f(x,y)$ par rapport à y, au point $(3,5)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(3,5) = 9$.**

De façon générale, en un point (a,b),

La **dérivée partielle de f par rapport à x**, à y constant, au point (a,b), est la dérivée de la fonction d'x uniquement : $x \mapsto f(x,b)$. Si cette limite existe, c'est donc $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\mathrm{f(x;b)-f(a,b)}}{\mathrm{x-a}}$. On la note $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}(a,b)$.

La **dérivée partielle de f par rapport à** y, à x constant, au point (a,b), est la dérivée de la fonction d'y uniquement : $y \mapsto f(a,y)$. Si cette limite existe, c'est donc : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}$. On la note $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

<u>Exemple</u> : considérons la fonction : $f:(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy^2$

Elle admet en tout (a,b) de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles : $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = b^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 2ab$, ce que l'on note abusivement : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$

Les dérivées partielles sont aussi appelées dérivées partielles premières, ou encore d'ordre 1, pour les différencier des dérivées partielles d'ordre supérieur, objets du paragraphe suivant.

Remarque : Il existe un lien entre dérivées partielles et continuité. Si une fonction d'une variable est dérivable en un point x_0, alors elle est continue en x_0.

Avec deux variables, le lien est un peu plus fin :

Propriété : Si une fonction de deux variables a des dérivées partielles continues en un point (a,b), alors elle est continue en (a,b).

Dérivées partielles d'ordre supérieur à 1

Dérivées partielles secondes

Si une fonction admet des dérivées partielles sur tout un ensemble D de $\mathbb{R}^2$, les fonctions $(x,y) \in D \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}$ et $(x,y) \in D \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}$ sont elles mêmes des fonctions de deux variables, définies sur D. Il se peut qu'elles aussi aient des dérivées partielles. Celles-ci sont appelées dérivées partielles secondes.

<u>Exemple</u> : considérons la fonction de deux variables : $\boldsymbol{f} : (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \boldsymbol{x^2 - xy^3}$

Elle admet des dérivées partielles sur tout $\mathbb{R}^2$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y^3$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3xy^2$.

Ces fonctions ont elles-mêmes des dérivées partielles sur tout $\mathbb{R}^2$: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = 2$ cette dérivée partielle est notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, ou $f''_{x^2}(x,y)$.

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = -3y^2$ cette dérivée partielle est notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, ou $f''_{xy}(x,y)$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(-3xy^2) = -3y^2$ cette dérivée partielle est notée $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x,y)$,ou $f''_{xy}(x,y)$.

On remarque que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, ceci est une propriété générale sous certaines hypothèses.

Définition : dérivées partielles secondes

On pose, si ces dérivées partielles existent :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, ou $f''_{x^2}(x,y)$: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$: dérivée partielle, par rapport à x, de $\frac{\partial f}{\partial x}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$, ou $f''_{y^2}(x,y)$: $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$: dérivée partielle, par rapport à y, de $\frac{\partial f}{\partial y}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)$, ou $f''_{xy}(x,y)$: $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$: dérivée partielle, par rapport à y, de $\frac{\partial f}{\partial x}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$, ou $f''_{yx}(x,y)$: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$: dérivée partielle, par rapport à x, de $\frac{\partial f}{\partial y}$

Propriété : Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ sont définies et continues en un point (a,b), alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)$

Dérivées partielles d'ordre supérieur à 2

Ce paragraphe peut être omis en première lecture, les problèmes que vous rencontrerez utiliseront principalement les dérivées partielles premières et secondes.

On définit par récurrence les dérivées partielles d'ordre n d'une fonction numérique f de deux variables en dérivant lorsque ces dérivées existent, les dérivées partielles d'ordre $(n-1)$ par rapport à x, puis par rapport à y :

Pour $n = 3$: $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial x\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$, et les autres dérivées partielles possibles en échangeant x et y :

$$\frac{\partial^3 \mathrm{f}}{\partial y\,\partial x\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right), \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y}\right), \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right), \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial y\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y}\right)$$

Et pour n quelconque : $\frac{\partial^n f}{\partial x\,\partial y \ldots \partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x\,\partial y .. \partial x}\right)$.

Et toutes les autres possibilités en dérivant par rapport à x ou à y.

Du fait de la propriété précédente, si f admet en (a,b) des dérivées partielles premières, secondes, et troisièmes continues, l'ordre de dérivation n'intervient pas, par exemple

$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial x\,\partial y}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x\,\partial x}(a,b)$. On note alors cette dérivée $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}(a,b)$

De façon générale :

Définition : Si f, fonction de deux variables, admet en (a,b) des dérivées partielles jusqu'à l'ordre n, continues en (a,b), alors pour tous entiers k, p tels que $k+p \leq n$, on note

$\frac{\partial^{k+p} f}{\partial x^k\,\partial y^p}(a,b)$, la dérivée partielle obtenue en dérivant, dans n'importe quel ordre, k fois par rapport à x, et p fois par rapport à y.

Fonction différentiable, différentielle

Fonction différentiable : introduction

<u>*Rappel sur les fonctions d'une variable*</u> : dans le cas d'une fonction f d'une variable, si f admet un nombre dérivé $f'(x_0)$ en x_0, alors il existe une approximation de f par une fonction affine, au voisinage de x_0 et au premier ordre, c'est-à-dire que pour tout h tel que x_0+h appartient au domaine de définition de f, $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$, où $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, c'est-à-dire $h\varepsilon(h) \ll_0 h$.

<u>Exemple</u> : prenons $f = ln$, $x_0 = 1$, $ln(1) = 0$, $ln'(1) = 1/1 = 1$, pour tout h de $]-1\,;+\infty[$:

$\boldsymbol{ln(1+h)} = \quad \mathbf{0} \quad + \quad \boldsymbol{h \times 1} \quad + \quad \boldsymbol{h\varepsilon(h)}$

$\boldsymbol{f}(1+h) = \quad f(1) \quad + \quad h \times f'(1) \quad + \quad \textit{reste } h\varepsilon(h) \ll_0 h$

On retrouve le développement limité à l'ordre 1, au voisinage de 1, de la fonction ln.

<u>*Extension aux fonctions de deux variables*</u>

On a une définition analogue, mais cette fois le reste et la fonction qui joue le même rôle que la fonction affine, s'appliquent à deux variables :

<u>Exemple</u> : prenons $f(x,y) = x^2 + y^2$, pour tout h et tout k de $\mathbb{R}$, on s'intéresse à $f(x,y)$ pour (x,y) proche de $(1{,}3)$. $f(1+h, 3+k) = 10 + 2h + 6k + h^2 + k^2$, ce qu'on peut écrire :

$f(1+h, 3+k) = 10 \quad + \quad 2h + 6k \quad + \quad r(h,k)$

$f(1{,}3) \quad + \textit{terme linéaire en } (h,k) \quad + \quad \textit{reste}, h^2 + k^2 \ll_{(0,0)} |h| + |k|$

où $r(h,k) = h^2 + k^2$ vérifie $r(h,k) \ll_{(0,0)} |h| + |k|$, c'est-à-dire $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{|h|+|k|} = 0$

En voici la preuve (donnée à titre indicatif, il n'est pas nécessaire de savoir la refaire) :

Pour tout (h,k) de $\mathbb{R}^2$ tels que $(h,k) \neq (0,0)$, $0 \leq \frac{h^2+k^2}{|h|+|k|} \leq \frac{h^2+k^2+2|h||k|}{|h|+|k|} = \frac{(|h|+|k|)^2}{|h|+|k|}$, d'où $0 \leq \frac{h^2+k^2}{|h|+|k|} \leq (|h|+|k|)$, donc $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2+k^2}{|h|+|k|} = 0$.

On dira qu'une fonction de deux variables est différentiable en (a,b) s'il existe deux nombres λ et μ ne dépendant que de a et b, tels que pour tout h et tout k,

$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \lambda h + \mu k + r(h,k)$, où $r(h,k) \ll_{(0,0)} |h| + |k|$

On montre facilement que dans ce cas, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lambda$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \mu$, on peut donc écrire la définition ainsi : $h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \dots$

Fonction différentiable : définitions, notations

Définition : fonction différentiable

On dit que la fonction $f : (x,y) \in D \mapsto f(x,y)$ est différentiable en (a,b) si f est définie sur un disque ouvert contenant (a,b) et si pour tout (h,k) tels que $(a+h,b+k)$ soit dans D,

$$f(a+h,b+k) = \underbrace{f(a,b)}_{\text{constante}} + \underbrace{h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}_{\text{terme linéaire}} + \underbrace{r(h,k)}_{\text{reste infiniment petit devant }|h|+|k|}$$

où $r(h,k)$ infiniment petit devant $|h| + |k|$ signifie : $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{|h|+|k|} = 0$, et se note, de façon analogue au cas des fonctions à une variable : $r(h,k) \ll_{(0,0)} |h| + |k|$

La fonction de l'exemple précédent est donc différentiable en (1,3). Mais pour le prouver, il a fallu conduire un calcul sur le reste $r(h,k)$. Ce qui sera inutile dans les exercices que vous rencontrerez cette année, grâce à la propriété suivante :

Propriété : Si $f : (x,y) \in D \mapsto f(x,y)$ admet en (a,b) des dérivées partielles continues alors f est différentiable en (a,b).

Exemples :

La fonction f de l'exemple précédent : $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ est différentiable, non seulement en (1,3), mais aussi en tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$. Car : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$: $g(x,y) \mapsto xy^2$ est différentiable sur tout $\mathbb{R}^2$ car $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y^2$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2xy$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

Le terme linéaire de la définition précédente s'appelle la différentielle de f :

Définition : a et b sont deux nombres réels fixés. Si f est différentiable en (a,b), alors la fonction de deux variables : $(h,k) \mapsto h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ est appelée la différentielle en (a,b) de la fonction f. Elle est notée $\mathrm{d}f_{(a,b)}$ ou, abusivement, $\mathrm{d}f$.

Exemples :

$f(x,y) \mapsto x^2 + y^2$, est différentiable en tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, sa différentielle en (x,y) est la fonction $\mathrm{d}f(x,y) : (h,k) \mapsto 2xh + 2yk$. Par exemple en (1,3) la différentielle est $\mathrm{d}f(1,3) = 2h + 6k$.

$g : (x,y) \mapsto xy^2$ est différentiable sur tout $\mathbb{R}^2$. Sa différentielle en (x,y) est la fonction de (h,k) : $(h,k) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y^2h + 2xyk$ en (2,3) la différentielle de g est $\mathrm{d}g(2,3) : (\mathrm{h,k}) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 9\mathrm{h} + 12\mathrm{k}$

Notations courantes :

- la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $(h,k) \mapsto h$ est notée $\mathbf{dx}$
- la fonction $(h,k) \mapsto k$ est notée $\mathrm{d}y$
- avec ces notations, on écrit : $\mathbf{d}\boldsymbol{f} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$

Exemples : la différentielle de $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ est $\mathrm{d}f = 2xdx + 2ydy$, ce qui signifie qu'il s'agit, pour x et y fixés, de la fonction $(h,k) \mapsto 2xh + 2yk$.

$g : (x,y) \mapsto xy^2$ est différentiable sur tout $\mathbb{R}^2$, sa différentielle est : $\mathrm{d}g = y^2dx + 2xy\ \mathrm{d}y$, ce qui signifie que pour x, y fixés, la différentielle en (x,y) est la fonction de deux variables (h,k) : $(h,k) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y^2h + 2xyk$.

Fonction deux fois différentiable

La différentielle première indique une approximation d'une fonction par un polynôme de deux variables de degré 1.

La différentielle seconde consiste à faire une approximation plus fine, à l'aide d'un polynôme du second degré. On dira que f est deux fois différentiable en $(a,b) \in D$ si, quels que soient h et k, tels que $(a+h, b+k) \in D$,

$$f(a+h, b+k) = P(h,k) + r(h,k)$$

où $r(h,k) \ll_{(0,0)} |h|^2 + |k|^2$ et où $P(h,k)$ est un polynôme du second degré en h et k, c'est-à-dire $P(h,k) = \alpha + \beta h + \gamma k + \delta h^2 + \varphi k^2 + \lambda hk$.

On montre facilement que les coefficients du polynôme P sont liés aux dérivées partielles de la fonction f, et la définition peut s'écrire :

Définition : fonction deux fois différentiable

Une fonction f de deux variables, définie sur un domaine D, est dite deux fois différentiable en $(a,b) \in D$ si, pour tout (h,k) tel que $(a+h,b+k) \in D$:

$$f(a+h,b+k) = \underbrace{(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(a,b) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(a,b)}_{polynôme\ du\ second\ degré\ à\ deux\ variables\ (h,k)} + \underbrace{r(h,k)}_{reste}$$

avec $r(h,k)(\delta,\delta)|h|^2 + |k|^2$

Propriété : pour qu'une fonction $f(x,y)$ soit deux fois différentiable en un point (a,b), il suffit que toutes les dérivées partielles premières et secondes de f soient définies et continues en (a,b).

Exemple : la fonction $g : (x,y) \mapsto \mathrm{xy}^2$ est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}$ car elle admet sur tout $\mathbb{R}$ des dérivées premières et secondes continues (car ce sont des polynômes) :

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x,y}) = \mathrm{y}^2 \,; \quad \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{x,y}) = 2\mathrm{xy} \,; \quad \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}^2}(\mathrm{x,y}) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{y}^2) = 0 \,; \quad \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}^2}(\mathrm{x,y}) = 2\mathrm{x} \,; \quad \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}}(\mathrm{x,y}) = 2\mathrm{y}$$

Courbes de niveau

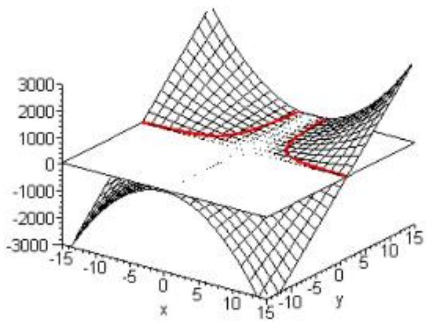
Reprenons l'exemple des dérivées partielles premières :

$$f(x,y) = x^2(y-1)$$

Fixons une valeur à $f(x,y)$, par exemple $f(x,y) = 50$.

On a : $f(x,y) = 50 \Leftrightarrow x^2(y-1) = 50$. Cet ensemble est une courbe du plan $\mathbb{R}^2$, d'équation $x^2(y-1) = 50$, ce qui s'écrit encore : $x \neq 0$ et $y = \frac{2}{x^2} + 1$

Graphiquement, fixer $f(x,y) = 50$ revient à ne retenir que les points à l'intersection de la surface $z = f(x,y)$ et du plan $z = 50$. Il s'agit de la courbe rouge.



L'équation de cette courbe, dans le plan $z = 50$, est $x^2(y-1) = 50$.

Dans le plan, la courbe d'équation $x^2(y-1) = 50$ est appelée courbe de niveau 50 de la fonction f.

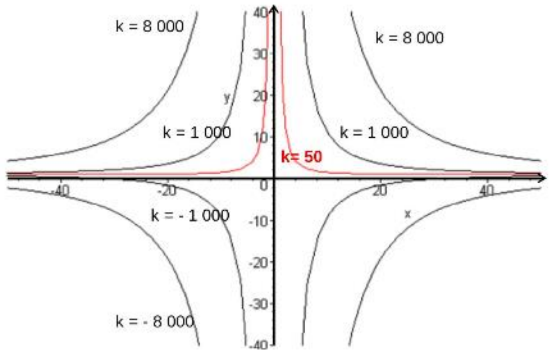
Définition :

La courbe du plan $f(x, y) = K$, où K est une constante, est appelée **courbe de niveau** K.

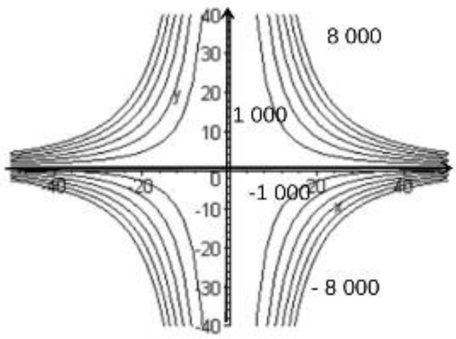
On peut construire sur le plan (x, y) toute une série de courbes de niveau. Cela ne permet pas seulement de représenter le lien entre x et y pour $f(x, y)$ fixé, mais aussi de représenter sur un plan toute la structure de la surface $z = f(x, y)$. En effet, plus les lignes de niveau se resserrent, et plus $f(x, y)$ croît ou décroît rapidement. On arrive ainsi avec des courbes planes à se faire une bonne idée de la surface $z = f(x, y)$.

Ici, les lignes se resserrent pour les grandes valeurs d'x, cela correspond au graphique précédent, où z croît ou décroît plus rapidement pour les grandes valeurs d'x.

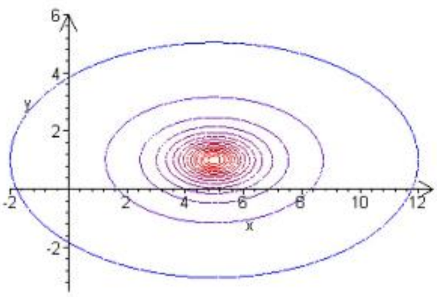
Courbes de niveau $f(x, y) = k$ pour différentes valeurs de k. En rouge, la ligne de niveau 50 du graphique ci-joint.

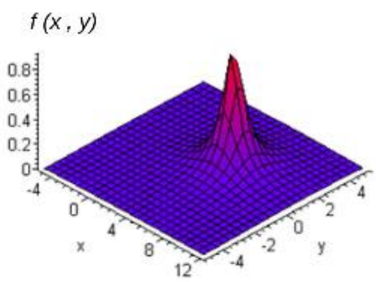


On se représente mieux la surface avec de nombreuses lignes de niveau :



Un autre exemple : $f(x, y) = \frac{1}{(x-5)^2+3(y-1)^2+1}$





Les lignes de niveau indiquent un pic en $x = 5$, $y = 1$...

Que voilà !

Remarque : sur les graphiques précédents, on peut remarquer que les lignes de niveau ne se croisaient pas. En fait, c'est une propriété générale, dont la preuve, très simple, fait l'objet du 1er exercice.

Propriété : Pour une même fonction, des courbes de niveau différentes n'ont pas d'intersection.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 1, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Cette œuvre est mise à disposition dans le respect de la législation française protégeant le droit d'auteur, selon les termes du contrat de licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/). En cas de conflit entre la législation française et les termes de ce contrat de licence, la clause non conforme à la législation française est réputée non écrite. Si la clause constitue un élément déterminant de l'engagement des parties ou de l'une d'elles, sa nullité emporte celle du contrat de licence tout entier.