Variation

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Introduction

Objectif de la leçon : Cette leçon a pour objectif de mettre en place diverses notions de variation utilisées en Économie et Gestion ainsi que les outils nécessaires à leurs utilisations. On abordera divers types de variations, tels que : variation absolue, variation relative, taux, facteur de croissance, élasticité.... On sera aussi amené à étudier des marges d'erreur ou incertitudes.

Les outils utilisés seront les différentielles, formules de Taylor ...

Les économistes s'intéressent autant à l'évolution des données qu'ils observent qu'à leur valeur à un moment donné. Il est donc important de maîtriser les outils qui renseignent sur ces évolutions.

Avertissement : Pour aborder cette leçon il est nécessaire d'avoir acquis les notions de la leçon 4. Cette leçon est courte et contient beaucoup de rappels.

Variation d’une grandeur

Variation absolue

Soit une grandeur mesurable (par exemple une production, le prix d'un produit, la durée d'une tâche ...), mesurée par un nombre noté Q (ou p, ou t, ou x ou y ...) et que l'on observe à deux positionnements dans le temps (ou l'espace, ...) différents. On obtient ainsi une valeur initiale Q_1 correspondant au premier instant (ou première position ...) et une valeur finale Q_2 correspondant au dernier instant (ou dernière position ...).

Définition : On appelle variation absolue de la grandeur, la différence entre la valeur finale et la valeur initiale de cette grandeur.

On note souvent cette variation absolue ΔQ, alors :

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1$$

Variation relative

Définition : On appelle variation relative (ou parfois taux de croissance ou taux de variation relative) d'une grandeur, le quotient de la variation absolue par la valeur initiale (on dit aussi, la variation absolue « rapportée » à la valeur initiale).

On note souvent cette variation relative $\frac{\Delta Q}{Q}$, alors :

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1}$$

Remarque à propos des unités et des signes : la variation absolue s'exprime dans les unités de la grandeur. Par contre la variation relative n'a pas d'unité et est souvent exprimée en pourcentage.

D'autre part ces variations ont un signe (le même), mais dans le langage courant un signe positif se traduit par une augmentation et un signe négatif par une diminution.

Taux

Un **taux** est un **rapport**, c'est la mesure d'une grandeur par rapport à une autre. Cela décrit un phénomène relativement à un autre.

Indice ou facteur de croissance

Définition : L'indice I (ou facteur de croissance) d'une grandeur est le rapport entre la valeur finale et la valeur initiale. C'est un taux.

$$I = \frac{Q_2}{Q_1}$$

Remarque : On rencontre surtout la notion d'indice quand Q est un prix ou une quantité de biens étudié entre deux périodes. On utilise alors souvent un indice base 100 entre la période de base 1 et la période 2 noté $I_{2/1} = \frac{Q_2}{Q_1} \times 100$.

Proposition : relation entre indice et variation relative. On a :

$$I = 1 + \frac{\Delta Q}{Q}$$

Variation d'une fonction – Elasticité

Variation d'une fonction

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}, f : x \mapsto f(x)$.

La **variation de f** entre x et x' est $\Delta f = f(x') - f(x)$.

Et si f est dérivable en x, on a le développement limité d'ordre 1 :

$$f(x') = f(x) + (x' - x)f'(x) + (x' - x)\varepsilon(x' - x) \text{ avec } \lim_{x' \to x} \varepsilon(x' - x) = 0$$

Donc $\Delta f = \Delta x f'(x) + \Delta x \varepsilon(\Delta x)$. Or, avec la notation différentielle : $f'(x) = \frac{df}{dx}$ et $\Delta x = dx$.

D'où,

$$\Delta f = df(x) + dx\varepsilon(dx) \text{ avec } \lim_{dx \to 0} \varepsilon(dx) = 0$$

et $\Delta f \neq df$, mais Δf est d'autant plus proche de df que dx est petit.

Remarque : Si f est linéaire $df = \Delta f$, et c'est le seul cas. En effet si $f(x) = ax, f'(x) = a$ et $\Delta f = a\Delta x = f'(x)\Delta x = df$. Si $a = 1$, on obtient $\Delta x = dx$, ce qui justifie l'égalité ci-dessus.

Le taux de variation de f entre x et x' est : $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$.

Or, si f est dérivable en x, par définition lorsque x' tend vers x (ou $\Delta x \to 0$) ce taux de variation tend vers $f'(x)$.

De façon heuristique, on dit parfois que $f'(x)$est égal au taux de variation instantané de f en x.

D'autre part si f est dérivable en x, on a le développement limité d'ordre 1 :

$$f(x') = f(x) + (x'-x)f'(x) + (x'-x)\varepsilon(x'-x) \text{ avec } \lim_{x' \to x} \varepsilon(x'-x) = 0$$

Ainsi

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \Delta x \varepsilon(\Delta x)$$

et $\frac{\Delta f}{\Delta x} \neq f'(x)$, mais $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ est d'autant plus proche de $f'(x)$ que Δx est petit.

Elasticité

On définit l'élasticité d'une fonction comme un rapport de variations relatives.

Soit $x \neq 0$ et f une fonction dérivable et non nulle en x.

Définition : L'élasticité de f en x est la limite du rapport des variations relatives de f et de x quand Δx tend vers 0 :

$$\varepsilon_f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta f}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

Or $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$, on en déduit alors :

Proposition : $\varepsilon_f(x) = x\frac{f'(x)}{f(x)}$.

Remarque : Cette notion est très utilisée par les économistes.

En effet pour traduire la sensibilité de la demande "q" aux variations des prix "p", un indicateur intéressant est le rapport $\frac{\Delta q}{\Delta p}$. Il permet de répondre à la question :

"Quelle est la meilleure variation de quantité qui correspond à une variation de prix Δp ?". Mais nous ne le retiendrons pas car il y a un problème d'unités.

Par contre l'élasticité permet de répondre à la question suivante :

"De combien varie, en pourcentage, la quantité demandée d'un bien lorsque son prix est modifié de 1 pourcent ?"

D'ordinaire lorsque le prix d'un bien augmente on en consomme moins, ce qui veut dire que l'élasticité est une quantité négative. Les économistes préfèrent souvent exprimer le résultat en valeur absolue :

$$\varepsilon = \left|\frac{\frac{dq}{q}}{\frac{dp}{p}}\right| = \left|\frac{dq}{dp}\cdot\frac{p}{q}\right|$$

- Si $\varepsilon = 0$, les prix ont beau varier, la demande ne varie pas. Un tel bien est dit parfaitement inélastique. ($\frac{dq}{qp} = 0$ et $q =$ constante)
- Si $0 < \varepsilon < 1$, une augmentation du prix de $n\%$ par exemple, s'accompagne d'une baisse de la demande de moins de $n\%$ (de même une baisse du prix de $n\%$ entraîne une augmentation de la demande inférieure à $n\%$). Le bien est dit inélastique.
- Si $\varepsilon = 1$, les variations relatives du prix et de la quantité demandée sont égales.
- Si $\varepsilon > 1$, la variation relative de la quantité est supérieure à la variation relative de prix. Le bien est dit élastique.
- Si $\varepsilon \to \infty$, une variation infime du prix du bien entraîne une variation gigantesque de la demande. Le bien est dit parfaitement élastique.

Taux de croissance constant et fonctions exponentielles

Temps discret

Supposons que sur une période donnée, la variation relative (ou le taux de croissance) d'une grandeur soit constante et égale à τ.

Notons Q_0 la valeur initiale la grandeur et Q_n la valeur de cette grandeur au bout de n périodes.

On a donc $\frac{Q_1-Q_0}{Q_0} = \tau$ et $Q_1 = (1+\tau)Q_0$.

En itérant : $Q_2 = (1+\tau)Q_1 = (1+\tau)^2 Q_0 \ldots\ldots Q_n = (1+\tau)Q_{n-1} = (1+\tau)^2 Q_{n-2} = \cdots = (1+\tau)^n Q_0$. Ainsi :

$$Q_n = (1+\tau)^n Q_0$$

Et Q_n est proportionnelle à une fonction exponentielle de n de base $(1+\tau)$.

(On peut aussi écrire Q_n sous la forme $e^{n ln(1+\tau)} Q_0$).

Temps continu

En subdivisant indéfiniment la période et en considérant le temps continu (à valeurs réelles positives), la grandeur est dite à taux de croissance instantané τ constant et la formule précédente devient, si $Q(t)$ est la valeur de la grandeur à l'instant t :

$$Q(t) = Q(0)e^{\tau t}$$

Démonstration (peut être sautée) : On a donc pour h tendant vers 0 : $\frac{Q(t+h)-Q(t)}{Q(t)} = \tau h,$ soit $\lim\limits_{h\to 0} \frac{Q(t+h)-Q(t)}{h}\frac{1}{Q(t)} = \tau$ et $\frac{Q'(t)}{Q(t)} = \tau$. En intégrant, $ln(|Q(t)|) = \tau t +$ cte et $Q(t) = Q(0)e^{\tau t}$.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 1, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).