

Etude locale d'une fonction

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices

Exercice 1

Consigne

Soit $f(x) = \ln(2x + 3)$ pour $x \geq -1$.

1) Donner une majoration de $f'(x)$ et en déduire une majoration de $\ln(2x + 3)$ par un polynôme de degré 1 sur $[-1; +\infty[$.

2) Donner alors une majoration de $\ln(3)$.

Exercice 2

Consigne

Soit $f(x) = \sqrt{3x + 4}$ pour $x \geq 0$.

1) Montrer que pour tout x et y positifs :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4}|x - y|$$

2) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$|f(x) - 4| \leq \frac{3}{4}|x - 4|$$

Exercice 3

Consigne

Soit $f(x) = \exp(-x^2 + 3x) + x$ sur $[0 ; 3]$. Montrer que le théorème des accroissements finis s'applique et déterminer c graphiquement puis par le calcul.

Exercice 4

Consigne

Soient $g : x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{1/x}$ et $f : x \mapsto \frac{1}{2} e^{1/x} + \frac{1}{2} x$.

1) Montrer que g est une bijection de $[1 ; +\infty[$ dans un intervalle I que l'on déterminera.

2) Montrer que pour tous x et y de $[1 ; +\infty[$:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{e-1}{2} |x - y|$$

Exercice 5

Consigne

Déterminer les D.L. au voisinage de 0 et à l'ordre 4 des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$

2) $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{2} + x\right)$

3) $f : x \mapsto \exp(x^2 + x + 1)$

4) $f : x \mapsto 2^{x+1}$

Exercice 6

Consigne

Donner un D.L. à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln(1 + e^x)$.

Exercice 7

Consigne

1) Donner le D.L. à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de $g : x \mapsto 1 + (x - 1)e^{x-1}$.

2) Donner un D.L. à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de $f : x \mapsto \ln(1 + (x - 1)e^{x-1})$.

3) Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{f(x)}{x-1}$ et $h(1) = 1$. Montrer que h est continue et dérivable en 1.

Exercice 8

Consigne

Calculer à l'aide d'un D.L. adéquat, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$.

Exercice 9

Consigne

1) Déterminer le D.L. à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de $x \rightarrow x \ln x$.

2) En déduire $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$.

Exercice 10

Consigne

Soit $f : x \mapsto e^{1/x} \sqrt{x^2 - 1}$.

- 1) Déterminer un D.L. d'ordre 3 de $\frac{f(x)}{x}$ au voisinage de $+\infty$.
- 2) En déduire que $\mathcal{C}(f)$ admet une asymptote oblique quand $x \rightarrow +\infty$.
- 3) Etudier la position de $\mathcal{C}(f)$ par rapport à cette asymptote.
- 4) Faire de même pour $x \rightarrow -\infty$, sans recommencer tous les calculs.

Exercice 11

Consigne

Soit $f : x \mapsto \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$ pour $x > 3$.

- 1) Déterminer un D.L. d'ordre 2 de $\frac{f(x)}{x}$ au voisinage de $+\infty$.
- 2) En déduire que $\mathcal{C}(f)$ admet une asymptote oblique quand $x \rightarrow +\infty$.
- 3) Etudier la position de $\mathcal{C}(f)$ par rapport à cette asymptote.

Exercice 12

Consigne

Soit $f : x \mapsto (x - 2) \exp\left(\frac{x-1}{2x}\right)$.

- 1) Déterminer un D.L. d'ordre 2 de $\frac{f(x)}{x}$ au voisinage de $+\infty$.
- 2) En déduire que $\mathcal{C}(f)$ admet une asymptote oblique quand $x \rightarrow +\infty$.
- 3) Etudier la position de $\mathcal{C}(f)$ par rapport à cette asymptote.

Exercice 13

Consigne

Soit l'expression $f(x, y) = x \ln y - (y - 1) \ln x - y + 1$.

Etudier le signe de $f(x, y)$ pour x et y voisins de 1.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 1, Odile Brandière, AUNEGe (<http://auneg.fr>), CC – BY NC ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).



Cette œuvre est mise à disposition dans le respect de la législation française protégeant le droit d'auteur, selon les termes du contrat de licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>). En cas de conflit entre la législation française et les termes de ce contrat de licence, la clause non conforme à la législation française est réputée non écrite. Si la clause constitue un élément déterminant de l'engagement des parties ou de l'une d'elles, sa nullité emporte celle du contrat de licence tout entier.