Etude locale d'une fonction

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices corrigés

Attention : ceci est la version corrigée des exercices.

Exercice 1

Consigne

Soit $f(x) = ln(2x+3)$ pour $x \geq -1$.

1) Donner une majoration de $f'(x)$ et en déduire une majoration de $ln(2x+3)$ par un polynôme de degré 1 sur $[-1\,;+\infty[$.

2) Donner alors une majoration de $ln(3)$.

Correction

1) f est définie et dérivable sur $[-1;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{2}{2x+3}$.

Sur $\left[-1;+\infty\right[$, $2x+3 \geq 1, 0 \leq \frac{1}{2x+3} \leq 1$ et $0 \leq f'(x) \leq 2$.

D'après la première conséquence du cours,

Pour tout $x \in [-1\,;+\infty[$, $0 \leq f(x) - f(-1) \leq 2(x+1)$ et puisque $f(-1) = 0$

$$0 \leq f(x) \leq 2x+2$$

2) Pour $x = 0$, la dernière inégalité donne : $ln(3) \leq 2$.

Exercice 2

Consigne

Soit $f(x) = \sqrt{3x + 4}$ pour $x \geq 0$.

1) Montrer que pour tout x et y positifs :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4}|x - y|$$

2)Montrer que pour tout $x > 0$,

$$|f(x) - 4| \leq \frac{3}{4}|x - 4|$$

Correction

1) f est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$

Si $x \in \left[0; +\infty\right[, 3x + 4 \geq 4, \sqrt{3x + 4} \geq 2, \frac{1}{\sqrt{3x+4}} \leq \frac{1}{2}$ et $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$.

D'après la deuxième conséquence du cours, on en déduit que pour tous x et y strictement positifs, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4}|x - y|$. On remarque que l'inégalité reste vraie si x ou y ou les deux sont nuls.

2) En remarquant que $f(4) = 4$ et en utilisant la dernière inégalité à $x = 4$, on obtient

$$|f(x) - 4| \leq \frac{3}{4}|x - 4|$$

Exercice 3

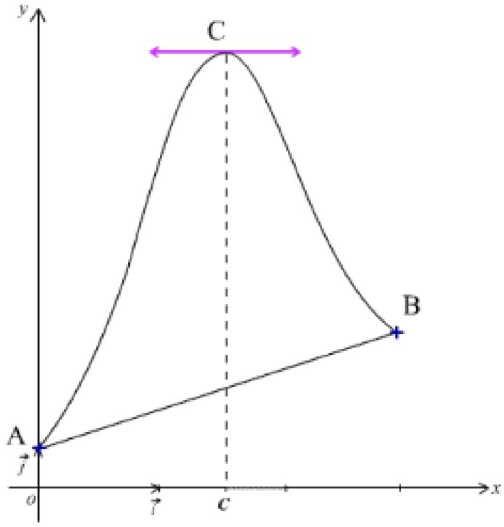
Consigne

Soit $f(x) = \exp(-x^2 + 3x) + x$ sur $[0 \ ; \ 3]$. Montrer que le théorème des accroissements finis s'applique et déterminer c graphiquement puis par le calcul.

Correction

f est définie, continue et dérivable sur $[0 \,; \, 3]$ et $f'(x) = (-2x + 3)\, exp(-x^2 + 3x) + 1$. En appliquant le théorème des accroissement finis on obtient :

Graphiquement : Il existe un point $C(c; f(c))$ de $C(f)$ situé entre $A(0; 1)$ et $B(3; 4)$, où la tangente à $C(f)$ est parallèle à (AB).



Graphiquement on lit $c \approx 1.5$

Par le calcul : $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Or $f(0) = 1$ et $f(3) = 4$. c vérifie donc $(-2c + 3)\, exp(-c^2 + 3c) + 1 = 1$, soit $(-2c + 3)\, exp(-c^2 + 3c) = 0$ et $(-2c + 3) = 0$ puisqu'une exponentielle est non nulle, donc $c = \frac{3}{2}$, ce qui confirme la lecture sur le dessin.

Exercice 4

Consigne

Soient $g : x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{1/x}$ et $f : x \mapsto \frac{1}{2} e^{1/x} + \frac{1}{2} x$.

1) Montrer que g est une bijection de $[1\,;+\infty[$ dans un intervalle I que l'on déterminera.

2) Montrer que pour tous x et y de $[1\,;+\infty[$:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{e-1}{2} |x - y|$$

Correction

1) Si $g(x) = \frac{1}{x^2} e^{1/x}$, g est définie et dérivable sur $[1; +\infty[$ et $g'(x) = -\frac{2}{x^3} e^{1/x} - \frac{1}{x^4} e^{1/x}$.

Sur $[1\,;+\infty[$, $g'(x) < 0$ et g est une bijection décroissante de $[1\,;+\infty[$ dans $I =]0\,;\, e]$ (en effet $f(1) = e$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x} = 1$).

2) f est définie et dérivable sur $[1;+\infty[$ et $f'(x) = -\frac{1}{2x^2}e^{1/x} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}$.

Or sur $[1;+\infty[$, $0 \leq g(x) \leq e$, donc $-\frac{e}{2} \leq -\frac{1}{2}g(x) \leq 0$ et $\frac{1-e}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

Or $\frac{1-e}{2} \approx -0.86$, donc $|f(x)| \leq \frac{e-1}{2}$ et en appliquant la deuxième conséquence du théorème des accroissements finis,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{e-1}{2}|x-y|$$

Exercice 5

Consigne

Déterminer les D.L. au voisinage de 0 et à l'ordre 4 des fonctions suivantes :

1) $f: x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

2) $f: x \mapsto \ln\left(\frac{1}{2} + x\right)$

3) $f: x \mapsto \exp(x^2 + x + 1)$

4) $f: x \mapsto 2^{x+1}$

Correction

1) Posons $u = -x^2$. Si x est voisin de $0, u$ aussi et on a d'après le cours $(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + u^2\varepsilon(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon\,(u) = 0$. En remplaçant u par $-x^2$, on obtient : $\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon\,(x) = 0$.

2) $ln\left(\frac{1}{2} + x\right) = ln\left(\frac{1}{2}(1+2x)\right) = ln\frac{1}{2} + ln(1+2x)$. Or $u = 2\,x$ est voisin de 0 puisque x l'est et en remplaçant x par u dans le D.L. de l'encadré du cours :

$ln(1+u)$. Et en remplaçant u par $2x$:

$\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon\,(x) = 0$. Et $\ln\left(\frac{1}{2} + x\right) = -\ln 2 + 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + x^4\varepsilon(x)$.

3) $\exp(x^2 + x + 1) = e\exp(x^2 + x)$. Et si on pose $u = x^2 + x$, u est voisin de 0 puisque x l'est et en remplaçant x par u dans le D.L. de l'encadré du cours :

$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + u^4\varepsilon(u)$ avec $\lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$. Et en remplaçant u par $x^2 + x$

$\exp(x^2 + x) = 1 + (x^2 + x) + \frac{(x^2+x)^2}{2} + \frac{(x^2+x)^3}{6} + \frac{(x^2+x)^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

En ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 4 dans la partie régulière, les autres rentrant dans le reste :

$exp(x^2 + x) = 1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{7x^3}{6} + \frac{25x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$ et $exp(x^2 + x + 1) = e\left(1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{7x^3}{6} + \frac{25x^4}{24}\right) + x^4\varepsilon(x)$.

4) $2^{x+1} = 2 \times 2^x = 2e^{x\ln 2}$. Posons $u = x\ln 2$, u est voisin de 0 puisque x l'est et en remplaçant x par u dans le D.L. de l'encadré du cours :

$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + u^4\varepsilon(u)$ avec $\lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$. Et en remplaçant u par $x\ln 2$

$2^x = e^{x\ln 2} = 1 + x\ln 2 + \frac{(x\ln 2)^2}{2} + \frac{(x\ln 2)^3}{6} + \frac{(x\ln 2)^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, et $2^{x+1} = 2 \times 2^x = 2 + (2\ln 2)x + (\ln 2)^2x^2 + \frac{(\ln 2)^3}{3}x^3 + \frac{(\ln 2)^4}{12}x^4 + x^4\varepsilon(x)$.

Exercice 6

Consigne

Donner un D.L. à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $x \mapsto ln(1 + e^x)$.

Correction

Pour x voisin de $0, e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

$ln(1 + e^x) = ln\left(2 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)$. Posons $u = x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$, si x est voisin de 0, u aussi et $ln(2 + u) = ln\left(2\left(1 + \frac{u}{2}\right)\right) = ln\,2 + ln\left(1 + \frac{u}{2}\right)$ et puisque $\frac{u}{2}$ est voisin de 0, on peut remplacer x par $\frac{u}{2}$ dans le D.L. du cours et $ln\left(1 + \frac{u}{2}\right) = \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + u^2\varepsilon(u)$ avec $\lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$. Et en remplaçant u par $x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$, on obtient :

$\ln(1 + e^x) = \ln(2 + u) = \ln 2 + \frac{\left(x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right)}{2} - \frac{\left(x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right)^2}{8} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. On ne garde pour la partie régulière que les termes de degré inférieur ou égal à 2, les autres rentrant dans le reste : $ln(1 + e^x) = ln\,2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) = ln\,2 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)$.

Exercice 7

Consigne

1) Donner le D.L. à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de $g : x \mapsto 1 + (x-1)e^{x-1}$.

2) Donner un D.L. à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de $f : x \mapsto ln(1 + (x-1)e^{x-1})$.

3) Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{f(x)}{x-1}$ et $h(1) = 1$. Montrer que h est continue et dérivable en 1.

Correction

1)Posons $x = 1 + h$. $g(x) = g(1+h) = 1 + he^h$. Et puisque h est voisin de 0 lorsque x est voisin de 1, $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Et $g(1+h) = 1 + h + h^2 + \frac{h^3}{2} + h^3\varepsilon(h)$ (Le terme d'ordre 3 rentre dans le reste d'ordre 2) $g(1+h) = 1 + h + h^2 + h^2\varepsilon(h)$.

On a donc : $g(x) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1)$ avec $\lim_{x\to 1} \varepsilon(x-1) = 0$.

2) Utilisons toujours le même changement de variable : $f(1+h) = ln(1 + he^h) = ln\big(g(1+h)\big)$ et en utilisant le résultat précédent : $f(1+h) = ln\big(1 + h + h^2 + h^2\varepsilon(h)\big)$.

Posons $u = h + h^2 + h^2\varepsilon(h)$, u est voisin de 0 puisque h l'est et en remplaçant x par u dans le D.L. du cours :

$ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)$ avec $\lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$. Puis en remplaçant u par $h + h^2 + h^2\varepsilon(h)$, on obtient $f(1+h) = \big(h + h^2 + h^2\varepsilon(h)\big) - \frac{\left(h+h^2+h^2\varepsilon(h)\right)^2}{2} + h^2\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2, les autres rentrant dans le reste d'ordre 2 : $f(1+h) = h + \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)$. Soit $f(x) = (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^2\varepsilon(x-1)$ avec $\lim_{x\to 1} \varepsilon(x-1) = 0$.

3) h est continue en 1 si et seulement si $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1)$. Or $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \left((x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^2\varepsilon(x-1)\right)$ $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \left(1 + \frac{(x-1)}{2} + (x-1)\varepsilon(x-1)\right) = 1 = h(1)$. Et h est bien continue en 1.

h est dérivable en 1 si et seulement si $\lim_{x\to 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1}$ existe et est finie. Or $\lim_{x\to 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(1+\frac{(x-1)}{2}+(x-1)\varepsilon(x-1)\right)-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon(x-1)\right) = \frac{1}{2}$. h est donc bien dérivable en 1 et $h'(1) = \frac{1}{2}$.

Exercice 8

Consigne

Calculer à l'aide d'un D.L. adéquat, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$.

Correction

D'après le D.L. du cours, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) - x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2} + \varepsilon(x)$. Et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Exercice 9

Consigne

1) Déterminer le D.L. à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de $x \to x \ln x$.

2) En déduire $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$.

Correction

1) Posons $x = 1 + h$ (x est voisin de 1, donc h est voisin de 0). D'après le cours puisque h est voisin de 0, $\ln(1 + h) = h - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Et

$x \ln x = (1 + h)\ln(1 + h) = (1 + h)\left(h - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)\right) = h + \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)$ ou $x \ln x = (x - 1) + \frac{(x-1)^2}{2} + (x - 1)^2\varepsilon(x - 1)$ avec $\lim\limits_{x\to 1} \varepsilon(x - 1) = 0$.

2) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^2\varepsilon(x-1)}{x^2 - 1}$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1 + \frac{(x-1)}{2} + (x-1)\varepsilon(x-1)}{x + 1} = \frac{1}{2}$.

Exercice 10

Consigne

Soit $f : x \mapsto e^{1/x}\sqrt{x^2-1}$.

1) Déterminer un D.L. d'ordre 3 de $\frac{f(x)}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

2) En déduire que $C(f)$admet une asymptote oblique quand $x \to +\infty$.

3) Etudier la position de $C(f)$ par rapport à cette asymptote.

4) Faire de même pour $x \to -\infty$, sans recommencer tous les calculs.

Correction

1) Posons $h = \frac{1}{x}$ (si x est voisin de $+\infty$, h est voisin de 0^+). $e^{1/x}\sqrt{x^2-1} = e^h\sqrt{\frac{1-h^2}{h^2}} = \frac{e^h}{h}\sqrt{1-h^2}$ (car $h > 0$).

$\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) = e^h\sqrt{1-h^2}$. Or puisque h est voisin de 0.

$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + h^3\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ et $\sqrt{1-h^2} = (1-h^2)^{1/2}$ et en remplaçant x par h^2 et m par $\frac{1}{2}$ dans le 2$^{\text{ème}}$ D.L. l'encadré du cours, $\sqrt{1-h^2} = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{8} + h^4\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. D'où $e^h\sqrt{1-h^2} = \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + h^3\varepsilon(h)\right)\left(1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{8} + h^4\varepsilon(h)\right)$, et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égaux à 3 dans la partie principale, on obtient le D.L. d'ordre 3$e^h\sqrt{1-h^2} = 1 + h + \frac{h^3}{6} + h^3\varepsilon(h)$. Et $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. D'où $f(x) = x + 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$.

2) On en déduit que $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - (x+1)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{6x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$. Et donc que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $C(f)$ quand x tend vers $+\infty$.

3) $f(x) - (x+1) = \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$ au voisinage de $+\infty$ puisqu'alors $\frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ est négligeable devant $\frac{1}{6x^2}$. $C(f)$ est donc au-dessus de l'asymptote quand x tend vers $+\infty$.

4) Quand x tend vers $-\infty$, le calcul est très semblable, mais h tend vers 0^- et $\sqrt{\frac{1-h^2}{h^2}} = -h\sqrt{1-h^2}$. Et $\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) = -e^h\sqrt{1-h^2}$. Ensuite les calculs restent valables et $\frac{f(x)}{x} = -\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ avec $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. D'où $f(x) = -x - 1 - \frac{1}{6x^2} - \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$. Ainsi $C(f)$ admet la droite

d'équation $y = -x - 1$ comme asymptote quant x tend vers $-\infty$ et la courbe est en dessous de l'asymptote.

En effet $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - (-x-1)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{6x^2} - \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$ et $f(x) - (-x-1) = -\frac{1}{6x^2} - \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$ au voisinage de $-\infty$.

Exercice 11

Consigne

Soit $f : x \mapsto \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$ pour $x > 3$.

1) Déterminer un D.L. d'ordre 2 de $\frac{f(x)}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

2) En déduire que $C(f)$ admet une asymptote oblique quand $x \to +\infty$.

3) Etudier la position de $C(f)$ par rapport à cette asymptote.

Correction

1) $\sqrt[3]{4x^3 - 12x} = \sqrt[3]{4x^3\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)} = \sqrt[3]{4x^3}\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2}} = \sqrt[3]{4}x\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)^{1/3}$, donc $\frac{f(x)}{x} = \sqrt[3]{4}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)^{1/3}$.

Posons $h = \frac{1}{x}$ (h est voisin de 0 puisque x tend vers $+\infty$) et $\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) = \sqrt[3]{4}(1 - 3h^2)^{1/3}$. En remplaçant x par $-3h^2$ et m par $\frac{1}{3}$ dans le 2ème D.L. l'encadré du cours, on obtient $(1 - 3h^2)^{1/3} = 1 - h^2 + h^2\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$. Et $\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) = \sqrt[3]{4}(1 - 3h^2)^{1/3} = \sqrt[3]{4}\left(1 - h^2 + h^2\varepsilon(h)\right) = \sqrt[3]{4}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x})\right)$ avec $\lim_{x\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$.

2) On en déduit que $f(x) = \sqrt[3]{4}x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \sqrt[3]{4}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$. Donc $y = \sqrt[3]{4}x$ est asymptote oblique à $C(f)$ quand x tend vers $+\infty$.

3) $f(x) - \sqrt[3]{4}x = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$ quand x tend vers $+\infty$ puisqu'alors $\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ est négligeable devant $-\frac{1}{\mathrm{X}}$. Et $C(f)$ est en dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 12

Consigne

Soit $f : x \mapsto (x-2)\, exp\left(\frac{x-1}{2x}\right)$.

1) Déterminer un D.L. d'ordre 2 de $\frac{f(x)}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

2) En déduire que $C(f)$ admet une asymptote oblique quand $x \to +\infty$.

3) Etudier la position de $C(f)$ par rapport à cette asymptote.

Correction

1) Posons $h = \frac{1}{h}$ (h est voisin de 0 puisque x tend vers $+\infty$) alors $f(x) = (x-2)\exp\left(\frac{x-1}{2x}\right) = f\left(\frac{1}{h}\right) = \left(\frac{1}{h} - 2\right)\exp\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{2}\right)$ et $\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) = (1-2h)\exp\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{2}\right) = (1-2h)e^{1/2}e^{-h/2}$. En remplaçant dans le $4^{\text{ème}}$ D.L. de l'encadré du cours x par $-h/2$ qui tend bien vers 0, on obtient :

$e^{-h/2} = 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{8} + h^2\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

D'où $hf\left(\frac{1}{h}\right) = \sqrt{e}(1-2h)\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{8} + h^2\varepsilon(h)\right) = \sqrt{e}\left(1 - \frac{5h}{2} + \frac{9h^2}{8} + h^2\varepsilon(h)\right)$ et $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{e}\left(1 - \frac{5}{2x} + \frac{9}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right.$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$.

2) On en déduit que $f(x) = \sqrt{e}\left(x - \frac{5}{2} + \frac{9}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \left(\sqrt{e}\left(x - \frac{5}{2}\right)\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{9}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$. Et $C(f)$ admet la droite d'équation $y = \sqrt{e}\left(x - \frac{5}{2}\right)$ comme asymptote quand x tend vers $+\infty$.

3) $f(x) - \left(\sqrt{e}\left(x - \frac{5}{2}\right)\right) = \frac{9}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$ au voisinage de $+\infty$ puisque $\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ est négligeable devant $\frac{9}{8x}$ sur ce voisinage. $C(f)$ est au dessus de l'asymptote quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 13

Consigne

Soit l'expression $f(x,y) = x\, ln\, y - (y-1)\, ln\, x - y + 1$.

Etudier le signe de $f(x,y)$ pour x et y voisins de 1.

Correction

Posons $x = 1 + h$ et $y = 1 + k$. h et k sont voisins de 0 lorsque x et y sont voisins de 1.

$f(x, y) = f(1 + h, 1 + k) = (1 + h)\ln(1 + k) - k \cdot \ln(1 + h) - k$. D'autre part d'après le cours : $ln(1 + k) = k - \frac{k^2}{2} + k^2\varepsilon(k)$ avec $\lim\limits_{k \to 0} \varepsilon(k) = 0$.

$\ln(1 + h) = h - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Et $f(1 + h, 1 + k) = (1 + h)\left(k - \frac{k^2}{2} + k^2\varepsilon(k)\right) - k\left(h - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)\right) - k$. Et en ne gardant dans la partie principale que les termes d'ordre inférieur ou égaux à 2 pour obtenir un D.L. à l'ordre 2 :

$f(1 + h, 1 + k) = -\frac{k^2}{2} +$ reste (le reste est négligeable devant $-\frac{k^2}{2}$).

Ainsi $f(x, y) = f(1 + h, 1 + k) \approx -\frac{k^2}{2} \leq 0$ pour x et y voisins de 1.

Références

Comment citer ce cours ?