Etude locale d'une fonction

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Introduction

Objectif de la leçon : Il s'agit d'approximer le mieux possible une fonction par un polynôme au voisinage d'un point. C'est une étude locale. Elle permet d'étudier des positions relatives de courbes autour d'un point, de détecter des extrema locaux, de calculer des limites ...

Il faut connaître les théorèmes du cours (théorème des accroissements finis et formule de Taylor).

Il faut maîtriser les techniques et méthodes de développements limités exposées dans le cours et savoir les appliquer correctement. Il est bon de savoir les développements limités de base (encadré du cours).

Théorème des accroissements finis

Théorème de Rolle

Voici déjà un théorème qui n'est qu'un cas particulier du théorème des accroissements finis.

Si une fonction $f : x \mapsto y = f(x)$ est définie et continue sur l'intervalle $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins une valeur c de l'intervalle ouvert $]a\,;\,b[$ qui vérifie $f'(c) = 0$.

Démonstration : Si f est constante sur $[a\,;\,b]$, pour tout $c \in]\,a, b[$, $f\,'(c) = 0$.

Si f n'est pas constante sur $[a\,;\,b]$, elle y prend des valeurs strictement supérieures à $f(a)$ ou strictement inférieures. Pour simplifier supposons-les strictement supérieures. Or, f est continue sur $[a\,;\,b]$ donc l'image de $[a\,;\,b]$ par f est un intervalle $[m\,;\,M]$ avec $M > f(a)$ d'après notre hypothèse et $m = f(a)$.

Soit c tel que $f(c) = M. c \neq a$ et $c \neq b$ puisque $f(a) = f(b)$ et $M > f(a)$ donc $c\ \in]a, b[$ et f y est dérivable. Ainsi M est un maximum local de f sur $]a, b[$, et $f'(c) = 0$ (c.f. leçon 6).

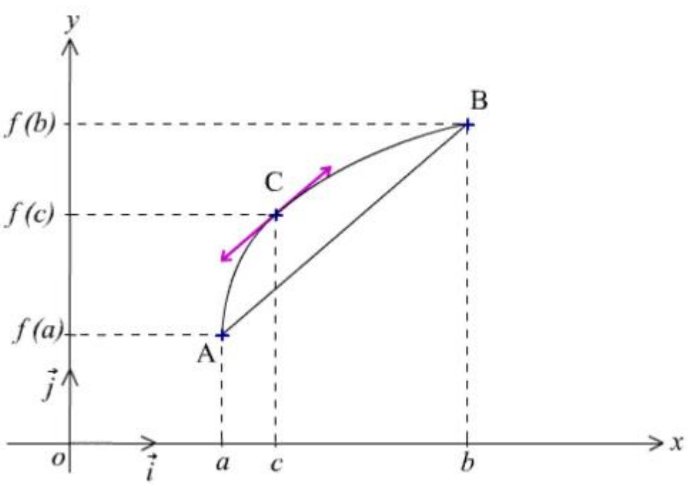
Conséquence : Théorème des accroissements finis

Si une fonction $f : x \mapsto y = f(x)$ est définie et continue sur l'intervalle $[a\,;b]$, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, il existe alors au moins une valeur $c\ \in]\,a, b[$. qui vérifie : $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Interprétation géométrique du théorème des accroissements finis

$f'(c)$ est le coefficient directeur de la tangente à $C(f)$ au point $C\big(c, f(c)\big)$. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur de la droite (AB) avec $A\big(a, f(a)\big)$ et $B\big(b, f(b)\big)$.

Le théorème exprime donc que sous certaines hypothèses, il existe un point $C\big(c, f(c)\big)$ de $C(f)$, situé entre A et B puisque $c\ \in]\,a\,;\,b[$ et tel que la tangente à $C(f)$ en C soit parallèle à (AB).



Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction ϕ telle que

$\phi(x) = f(x) - \left[(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + f(a)\right]$ (L'expression entre crochets définit une fonction affine de x dont la représentation graphique est (AB)), après avoir vérifié que toutes les hypothèses du théorème sont bien satisfaites.

1ère conséquence du théorème des accroissements finis

Si f est dérivable sur $]a,b[$ (a et b peuvent respectivement être égal à $-\infty$ et $+\infty$) et si sur $]a,b[, m \leq f'(x) \leq M$, pour tous x et y de $]a,b[$ tels que $x < y$:

$$m(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y-x)$$

C'est immédiat à prouver à partir du théorème des accroissements finis sur $[x\,;y]$. Il suffit, puisque $c \in]x,y[$, de multiplier chaque membre de l'inégalité $m \leq f'c) \leq M$ par $(y-x)$ qui est positif. Si de plus f est continue sur $[a\,;\,b]$, l'inégalité reste vraie pour tous x et y de $[a\,;\,b]$.

2ème conséquence du théorème des accroissements finis

Si f est dérivable sur $]a\,;b[$ (a et b peuvent respectivement être égal à $-\infty$ et $+\infty$) et si sur $]\,a\,;\,b[$ $|f'(x)| \leq M$, pour tous x et y de $]a\,;b[$:

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y-x|$$

C'est immédiat à prouver en remarquant que : $(|f'(x)| \leq M) \Leftrightarrow (-M \leq f'(x) \leq M)$ et en appliquant le théorème des accroissements finis sur $[x\,;\,y]$ si $x < y$ ou sur $[y\,;\,x]$ si $y < x$. Si de plus f est continue sur $[a\,;\,b]$, l'inégalité reste vraie pour tous x et y de $[a\,;\,b]$.

Formule de Taylor-Young

On sait (c.f. leçon 5) qu'une fonction est dérivable en x_0 et admet $f'(x_0)$ pour nombre dérivé en x_0, si et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1 en x_0. C'est-à-dire que sur un voisinage V_{x_0}de x_0 (intervalle ouvert contenant x_0), il existe une fonction ε telle que :

$\forall x \in V_{x_0}, f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x-x_0)$ avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon\,(x-x_0) = 0$, ou en posant $x = x_0 + h$, on se ramène à un voisinage de 0 (en effet x voisin de x_0 équivaut à h voisin de 0) et on a, sur un voisinage V_0 de 0 :

$\forall h \in V_0 \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'^{(x_0)} + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon\,(h) = 0.$

La formule de Taylor-Young est une généralisation de ce développement limité :

Si une fonction f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n en x_0, alors il existe un voisinage V_0 de 0, et une fonction ε telle que :

$$\forall h \in V_0, f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + h^n\varepsilon(h)$$

avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon\,(h) = 0$.

Développements limités

Définition

On dit qu'une fonction f définie sur un voisinage V_0 de 0 admet un **développement limité** (D.L.) d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un polynôme $PR(f)$ de degré au plus égal à n tel que $f(x) - PR(f)(x)$ soit un reste négligeable devant $PR(f)(x)$. Plus précisément :

$\forall x \in V_0 \quad f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon\,(x) = 0$

$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ s'appelle la **partie régulière** ($PR(f)$) du D.L. et $x^n\,\epsilon(x)$ est le **reste** du D.L.

Le reste s'écrit $x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon\,(x) = 0$, on dit que le reste est un infiniment petit d'ordre n en 0. Le reste est plus petit que x^n au voisinage de 0. Notons aussi que dans $PR(f)(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n$, les valeurs absolues des termes non nuls sont en ordre décroissant, si x est voisin de 0. En effet x^n est « beaucoup plus petit » que x (par exemple si x est de l'ordre de $\frac{1}{10}$, x^4 est de l'ordre de $\frac{1}{10000}$).

Remarque : Si f est n fois dérivable en 0, f admet un D.L. jusqu'à l'ordre n en 0 d'après la formule de Taylor. D'autre part, f et $PR(f)$ ont alors les mêmes dérivées en 0 jusqu'à l'ordre n. Ainsi, f et $PR(f)$ ont des représentations graphiques très voisines au voisinage de 0 (même tangente au point d'abscisse 0, même allure).

De même, si f est définie au voisinage V_{x_0}, pour définir le DL d'ordre n de $f(x)$ au voisinage de x_0 on se ramène à la définition précédente en faisant une simple translation en posant $x = x_0 + h$. Ainsi, puisque dire que x est voisin de x_0, revient à dire que h est voisin de 0, on peut définir alors le D.L. d'ordre n de $f(x)$ au voisinage de x_0, par celui de $f(x_0+h)$ au voisinage V_0 de 0.

Ainsi pour $h \in V_0$ ou $x \in V_x$:

$f(x_0+h) = a_0 + a_1h + \cdots + a_nh^n + h^n\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, ou $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)n\varepsilon(x-x_0)$ avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0$.

Remarques :

1) Ces deux dernières lignes sont équivalentes et donnent exactement le même résultat.

2) Ainsi pour trouver un D.L. au voisinage de x_0, on fait la translation $x_x = x_0 + h$ et on se ramène à un D.L. au voisinage de 0, en considérant la variable h au lieu de x et l'expression $f(x_0 + h)$ au lieu de $f(x)$.

3) La formule de Taylor-Young est un moyen pour déterminer certains D.L. Mais il y a d'autres méthodes beaucoup plus efficaces comme on va le voir plus loin.

Propriétés des D.L.

Étant donné les parties régulières (PR) des D.L. d'ordre n de deux fonctions f et g au voisinage de 0, on a :

- $f + g$ admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0 et $PR(f+g) = PR(f) + PR(g)$.
- $f.g$ admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0 et $PR(f.g) = \big(PR(f) \cdot PR(g)\big)_n$.

Où $\big(PR(f).PR(g)\big)n$ désigne le produit des 2 polynômes de degré $n(PR(f)$ et $PR(g))$ et $PR(g)$ dans lequel on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à n.

- Si $\frac{f}{g}$ admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0 si $g(0) \neq 0$ et $PR\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{PR(f)}{PR(g)}\right)_n$

Où $\left(\frac{PR(f)}{PR(g)}\right)_n$ désigne le quotient des 2 polynômes dans la division suivant les puissances croissantes quand on s'arrête au degré n.

Dérivation et intégration d'un D.L.

Propriété 1 : Si la fonction f est dérivable sur un voisinage de 0 et si la fonction f' admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0, la fonction f admet au voisinage de 0 un D.L. d'ordre $n+1$ dont la partie régulière est la primitive de $PR(f')$ qui prend la valeur $f(0)$ en 0.

Propriété 2 : f étant une fonction dérivable au voisinage de 0, si f et f' admettent des D.L. d'ordre respectif n et $n-1$ au voisinage de 0, $PR(f')$ est la dérivée de $PR(f)$.

Développements limités usuels

Voici les principaux D.L. à connaître. Ce sont des D.L. au voisinage de 0, et dans chaque D.L., ε désigne une fonction définie sur un voisinage de 0 et telle que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. A chaque ligne ε est évidemment différente, mais on la désignera toujours de la même façon.

On remarquera, que le deuxième développement limité de l'encadré est valable pour $m \in \mathbb{R}$ et que $m = \frac{1}{2}$ correspond au développement limité de $\sqrt{1+x}$, et $m = -\frac{1}{2}$ correspond à celui de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, ces D.L. sont très utilisés dans les exercices.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x) \quad (m \in \mathbb{R})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

La plupart de ces D.L. peuvent être obtenus à l'aide de la formule de Taylor-Young. On pourra les retenir pour gagner du temps dans les exercices.

On a aussi :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

Remarque : Ces six formules s'appliquent pour toute quantité u qui est voisine de 0, pour cela il suffit de remplacer x par u dans la formule.

Application aux calculs de limites

Exemple 1 : Calcul de $L = \lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)-ln\left(2+\frac{1}{4}x\right)}{x^2}$.

Solution : Ce quotient est une forme indéterminée. Calculons un D.L. de $ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$.

On a, d'après le deuxième D.L. usuel de l'encadré du cours avec $m = -\frac{1}{2}$:

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Et $ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) = ln\left(1+1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2\varepsilon(x)\right) = \ln(2+u)$ avec $u = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2\varepsilon(x)$

Or $u \to 0$ puisque $x \to 0$, et $ln(2+u) = ln\left(2\left(1+\frac{u}{2}\right)\right) = ln\,2 + ln\left(1+\frac{u}{2}\right)$.

Remarque : Ici il y a une technique à retenir. Dans l'encadré du cours, on a le D.L. de $ln(1+x)$ pour x voisin de 0, on fait en sorte de s'y ramener en mettant 2 en facteur dans le logarithme. Ici $\frac{u}{2}$ tend bien vers 0. Plus généralement si on une expression de la forme $\ln(a+u)$ avec $a > 0$ et u voisin de 0, on écrira $ln(a+u) = ln\left(a\left(1+\frac{u}{a}\right)\right) = ln\,a + ln\left(1+\frac{u}{a}\right)$ et on remarquera que $\frac{u}{a}$ est voisin de 0 puisque u l'est.

Si on reprend le calcul, en utilisant le troisième D.L. de l'encadré du cours, en remplaçant x par $\frac{u}{2}$ puisque $\frac{u}{2}$ est voisin de 0, on obtient :

$ln(2+u) = ln\,2 + ln\left(1+\frac{u}{2}\right) = ln\,2 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + u^2\varepsilon(u)$.

Et en remplaçant u par sa valeur $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$:

$ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) = ln\,2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right)^2 + x^2\varepsilon(x)$.

(On vérifiera bien que le reste peut s'écrire sous la forme $x^2\varepsilon(x)$ avec bien sûr $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.)

En ne gardant que les termes de degré 2 dans la partie régulière, les autres rentrant dans le reste $ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) = ln\,2 - \frac{1}{4}x + \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{32}\right)x^2 + x^2\varepsilon(x) = ln\,2 - \frac{1}{4}x + \frac{5}{32}x^2 + x^2\varepsilon(x)$.

Ainsi $L = \lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) - ln\,2 + \frac{1}{4}x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{5}{32}x^2 + x^2\varepsilon(x)}{x^2} = \frac{5}{32}$.

Remarques : 1) On a utilisé la même lettre ε, pour désigner des fonctions différentes qui tendent vers zéro en zéro. Mais c'est une convention d'écriture, ε désigne toujours de telles fonctions et il est fastidieux de changer de lettre à chaque ligne. Il est néanmoins nécessaire de préciser la signification de ε à chaque fois qu'on l'introduit.

2) Dans ce genre d'exercice l'ordre du D.L. n'est pas indiqué. Un D.L. d'ordre 1 est souvent insuffisant. En général un D.L. d'ordre 2 suffit, mais si ce n'est pas le cas, on recommencera les calculs avec un D.L. d'ordre 3, et ainsi de suite...

<u>Exemple 2</u> : Calculer L = $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Solution : Pour se ramener au voisinage de 0, posons $h = \frac{1}{x}$; x tend vers $+\infty$ si et seulement si h tend vers 0^+. Ainsi h est voisin de 0 et $L = \lim\limits_{h\to 0^+}(1+h)^{1/h}$.

D'autre part $(1+h)^{1/h} = \exp\left(\frac{1}{h}\ln(1+h)\right)$.

Remarque : On a utilisé la formule à savoir : pour $a > 0, a^x = e^{xln}$.

Or $ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ et $\frac{1}{h}ln(1+h) = 1 - \frac{h}{2} + h\varepsilon(h)$.

D'où $(1+h)^{1/h} = \exp\left(1 - \frac{h}{2} + h\varepsilon(h)\right)$ et si on pose $u = -\frac{h}{2} + h\varepsilon(h)$, u est voisin de 0 quand h l'est et

$(1+h)^{1/h} = e^{1+u} = ee^u = e\big(1 + u + u\varepsilon(u)\big)$ avec $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0$.

Remarque : Ici encore il y a une technique à retenir. En effet, comme on l'a déjà vu dans l'exemple 6 2) pour se ramener à un D.L. de l'encadré du cours, on a écrit $\mathrm{e}^{1+u} = e^u$. En effet, $1+u$ n'est pas voisin de 0 et on ne peut pas remplacer x par $1+u$ dans le D.L. du cours. Par contre, u est voisin de 0 et pour avoir le D.L. de e^u on peut remplacer x par u dans le D.L. de l'encadré du cours.

Plus généralement, pour déterminer le D.L. de e^{a+u} avec u voisin de 0, on écrira $e^{a+u} = e^a e^u$.

Donc $(1+h)^{1/h} = e\left(1+\left(-\frac{h}{2}+h\varepsilon(h)\right)+\left(-\frac{h}{2}+h\varepsilon(h)\right)\varepsilon(h)\right)$.

Cette dernière expression est de la forme : $e\ -\frac{eh}{2}+h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.

Donc $L = \lim\limits_{h\to 0^+}(1+h)^{1/h} = \lim\limits_{h\to 0^+}\left(e-\frac{eh}{2}+h\varepsilon(h)\right) = e$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)x = e$.

Remarque : On se souviendra du changement de variable $h = \frac{1}{x}$ pour se ramener à un voisinage de 0 quand x tend vers l'infini (c'est aussi valable quand x tend vers $-\infty$).

Application à la recherche d'asymptote

Exemple 3 : Soit $f(x) = (x-1)\,exp\left(\frac{1}{x-2}\right)$. Études des branches infinies quand x tend vers l'infini.

Solution : $(x-1)$ étant un polynôme, c'est l'expression $exp\left(\frac{1}{x-2}\right)$ qu'il faut transformer.

Posons $h = \frac{1}{x}$, h est voisin de 0 quand x tend vers l'infini.

$$exp\left(\frac{1}{x-2}\right) = exp\left(\frac{h}{1-2h}\right)$$

Or au voisinage de 0, en remplaçant x par $2h$ dans de premier D.L. de l'encadré du cours :

$\frac{1}{1-2h} = 1+2h+(2h)^2+h^2\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ et $\frac{h}{1-2h} = h+2h^2+4h^3+h^3\varepsilon(h) = h+2h^2+h^2\varepsilon(h)$.

Au voisinage de 0, en remplaçant x par $h+2h^2+h^2\varepsilon(h)$ (qui est voisin de 0) dans le quatrième D.L. de l'encadré du cours :

$exp\left(\frac{h}{1-2h}\right) = exp\left(h+2h^2+h^2\varepsilon(h)\right) = 1+\left(h+2h^2+h^2\varepsilon(h)\right)+\frac{\left(h+2h^2+h^2\varepsilon(h)\right)^2}{2}+\left(h+2h^2+h^2\varepsilon(h)\right)^2\varepsilon(h)$.

Ici on obtient un D.L. d'ordre 2 et on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à deux dans la partie régulière, les autres rentrent dans le reste.

$exp\left(\frac{h}{1-2h}\right) = 1+h+\frac{5}{2}h^2+h^2\varepsilon(h)$ soit $exp\left(\frac{1}{x-2}\right) = 1+\frac{1}{x}+\frac{5}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

D'où $(x-1)\, exp\left(\frac{1}{x-2}\right) = (x-1)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{5}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x+\frac{3}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$

Et la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ puisque

$\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)\, exp\left(\frac{1}{x-2}\right) - x = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

D'autre part $(x-1)exp\left(\frac{1}{x-2}\right) - x = \frac{3}{2\mathrm{x}}+\frac{1}{\mathrm{x}}\varepsilon\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right) = 0$

Donc si $x \to +\infty, (x-1)\, exp\left(\frac{1}{x-2}\right) - x > 0$ (car $\frac{3}{2x} > 0$ et $\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ est négligeable) et la courbe d'équation $y = (x-1)\, exp\left(\frac{1}{x-2}\right)$ est au-dessus de l'asymptote $y = x$.

Et si $\mathrm{x} \to -\infty, (x-1)\, exp\left(\frac{1}{x-2}\right) - x < 0$ (car $\frac{3}{2x} > 0$) et la courbe d'équation $y = (x-1)\, exp\left(\frac{1}{x-2}\right)$ est en dessous de l'asymptote $y = x$.

Application à la détermination du signe d'une expression

Exemple 4 : Soit $f(x,y) = (x+y^2+2y)e^{2x}+\frac{e}{2}$. $f\left(\frac{1}{2};-1\right) = 0$, mais on s'intéresse au signe de $f(x,y)$ pour les couples (x,y), tels que x soit voisin de $\frac{1}{2}$ et y soit voisin de -1. C'est un problème qui se pose souvent lors de la recherche d'extrema de fonctions à plusieurs variables.

Solution : On se ramène à des voisinages de 0 en posant $x = \frac{1}{2}+h$ et $y = -1+k$. Si x est voisin de $\frac{1}{2}$, h est voisin de 0 et si y est voisin de -1, k est voisin de 0.

$$f(x,y) = f\left(\frac{1}{2}+h, -1+k\right) = \left(\frac{1}{2}+h+(-1+k)^2+2(-1+k)\right)e^{2(1/2+h)}+\frac{e}{2}$$

$f\left(\frac{1}{2}+h,-1+k\right) = \left(-\frac{1}{2}+h+k^2\right)e^{1+2h}+\frac{e}{2}$. En utilisant l'encadré du cours et en remplaçant x par $2h$ puisque $2h$ est voisin de 0 :

$e^{1+2h} = ee^{2h} = e\left(1+2h+\frac{(2h)^2}{2}+h^2\varepsilon(h)\right)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}+h,-1+k\right) = e\left(-\frac{1}{2}+h+k^2\right)\left(1+2h+2h^2+h^2\varepsilon(h)\right)+\frac{e}{2}$.

On obtient une expression, dans laquelle les termes de plus bas degré (ici 2) sont les plus grands. Les autres sont négligeables devant ces termes et rentrent dans le reste. On peut écrire :

$f\left(\frac{1}{2}+h,-1+k\right) = e(h^2+k^2)+$ reste (le reste est négligeable devant $e(h^2+k^2)$ quand h et k sont voisins de 0 . D'où, pour x voisin de $\frac{1}{2}$ et y voisin de -1 :

$f(x,y) = e\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2\right)+$ reste et $f(x,y) \geq 0$.

Remarque : Les termes de degré 2 sont les termes en h^2, k^2 et hk (on somme l'exposant de h et celui de k). Ainsi, h^2k est un terme de degré 3 et est négligeable devant les termes de degré 2.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 1, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).