Convexité et extrema

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices

Exercice 1

Consigne

On dispose d'une plaque de carton de forme rectangulaire, de 80 cm de long et 50 cm de large, avec laquelle on veut fabriquer une boîte sans couvercle ayant la forme d'un parallélépipède rectangle.

Pour cela on découpe dans chaque coin un carré de côté x et on relève les bords. Pour quelle valeur de x le volume de la boite est-il maximum ? Préciser alors le volume correspondant.

Exercice 2

Consigne

Une entreprise fabrique une quantité x d'un certain produit. On suppose que x est un réel compris entre 0 et $20 (0 \leq x \leq 20)$ et que le coût de la production $f(x)$ exprimé en milliers d'euros, est donné par :

$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 300x, x \in [0,20]$$

1) Etudier les variations de f ainsi que la concavité de $C(f)$. Tracer $C(f)$ en précisant les tangentes aux 4 points d'abscisses 0,10,15 et 20.

2) On suppose que toute la production est vendue à un prix de 84000 € par unité. La recette totale g (exprimée en milliers d'euros) est alors définie par $g(x) = 84x$.

Soit $h(x)$ le bénéfice total, étudier le signe de $h(x)$ sur $[0,20]$. Interpréter le résultat. Déterminer la quantité $x_{\max}$ assurant à l'entreprise un bénéfice maximal. Donner alors la valeur en euros du bénéfice réalisé.

Exercice 3

Consigne

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2) = f(x)$

$$\forall x \in [0,2[f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

1) Déterminer $f(2)$ et trouver, sous la forme d'une relation entre b, c et d une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en 2.

2) Déterminer b, c et d de manière que f soit continue sur $\mathbb{R}$ et que $C(f)$ admette le point $A(1, -\frac{1}{2})$ comme extremum local.

Exercice 4

Consigne

Soit $f : x \mapsto -3x^2 + 5x - 6 + 2\,ln(x+1)$. Montrer, sans calculer f'', que f est concave sur son ensemble de définition D que l'on précisera. En déduire alors que f admet un extremum global sur D que l'on précisera ainsi que sa nature (maximum ou minimum).

Exercice 5

Consigne

Etudier la concavité de f et les points d'inflexion de $C(f)$ dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x + 3$

2) $f(x) = \frac{x^3+x-2}{x}$

3) $f(x) = (x+1)\ln(x^2+x)$

4) $f(x) = (x+1)\exp(-x^2)$

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 1, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).