Convexité et extrema

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices corrigés

Attention : ceci est la version corrigée des exercices.

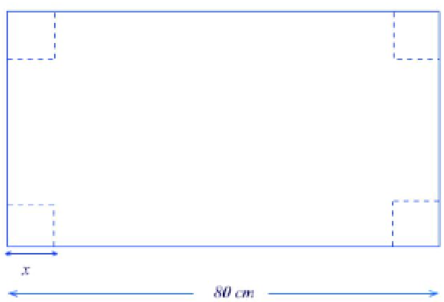
Exercice 1

Consigne

On dispose d'une plaque de carton de forme rectangulaire, de 80 cm de long et 50 cm de large, avec laquelle on veut fabriquer une boîte sans couvercle ayant la forme d'un parallélépipède rectangle.

Pour cela on découpe dans chaque coin un carré de côté x et on relève les bords. Pour quelle valeur de x le volume de la boite est-il maximum ? Préciser alors le volume correspondant.

Correction



Les dimensions du parallélépipède obtenu sont $(80-2x)\mathrm{cm}$ (longueur), $(50-2x)\mathrm{cm}$ (largeur) et x cm (hauteur). Le volume est donc de $x(80-2x)(50-2x)\mathrm{cm}^3$. La quantité à maximiser est : $V(x) = -4x^3 - 260x^2 + 4000x$, avec $0 < x < 25$. Ici V est deux fois dérivable sur $]0,25[$ et $V'(x) = -12x^2 - 520x + 4000 = 4(x-10)(3x-100)$, $V''(x) = -24x - 520$.

La seule valeur de x qui annule V' sur $]0,25[$ est 10 et $V''(10) < 0$. On en déduit donc que le volume maximum est atteint pour $x = 10$ cm et que ce volume vaut $V(10) = 18\,000\text{cm}^3$.

Exercice 2

Consigne

Une entreprise fabrique une quantité x d'un certain produit. On suppose que x est un réel compris entre 0 et $20 (0 \leq x \leq 20)$ et que le coût de la production $f(x)$ exprimé en milliers d'euros, est donné par :

$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 300x, x \in [0,20]$$

1) Etudier les variations de f ainsi que la concavité de $C(f)$. Tracer $C(f)$ en précisant les tangentes aux 4 points d'abscisses 0,10,15 et 20.

2) On suppose que toute la production est vendue à un prix de 84000 € par unité. La recette totale g (exprimée en milliers d'euros) est alors définie par $g(x) = 84x$.

Soit $h(x)$ le bénéfice total, étudier le signe de $h(x)$ sur $[0,20]$. Interpréter le résultat. Déterminer la quantité $x_{\max}$ assurant à l'entreprise un bénéfice maximal. Donner alors la valeur en euros du bénéfice réalisé.

Correction

$f(x) = x^3 - 30x^2 + 300x$, avec $x \in [0,20]$.

1) $\forall x \in [0,20],\ f'(x) = 3(x - 10)^2$ et $f''(x) = 6(x - 10)$.

On a donc le tableau suivant :

x	0		10		20
f''(x)	-60	-	0	+	60
f'(x)	300	+	0	+	300
f	0	↗	1000	↗	2 000

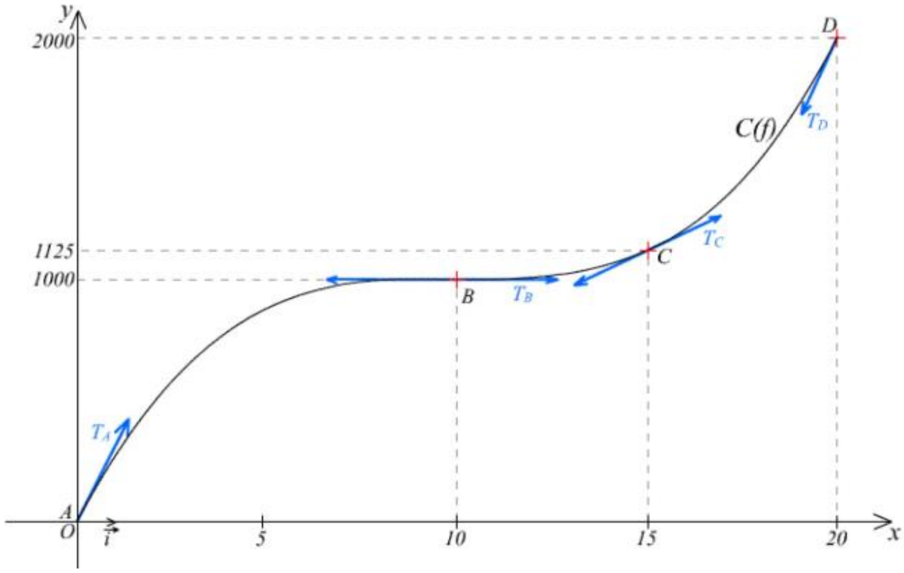
Et d'après les résultats du cours f est concave sur $x \in [0,10]$ et convexe sur $x \in [10,20]$. D'autre part la représentation graphique de f, $C(f)$ change de concavité en $B(10,100)$, c'est donc un point d'inflexion.

Tangente en $A(0,0)$: $y = 300x (f'(0) = 300)$.

Tangente en $B(10{,}100)$: $y = 1000(f'(10) = 0)$

Tangente en $C(15{,}1125)$: $y = 75(x - 15) + 1125 = 75x(f'(15) = 75)$

Tangente en $D(20{,}2000)$: $y = 300(x - 200) + 2000(f'(20) = 300)$.



2) On a donc $h(x) = g(x) - f(x) = -x^3 + 30x^2 - 216x = -x(x - 18)(x - 12)$.

Si $0 < x < 12$ ou si $18 < x \leq 20$, $h(x) < 0$ et l'entreprise produit à perte.

Si $12 < x < 18$, $h(x) > 0$ et la production est rentable.

Si $x = 12$ ou $x = 18$, la production ne rapporte ni ne perd rien.

Bénéfice maximum :

$h'(x) = -3x^2 + 60x - 216$ et h' s'annule en $x_1 = 10 - 2\sqrt{7}$ et $x_2 = 10 + 2\sqrt{7}$.

On a le tableau suivant :

x	0		x_1		x_2		20
h'(x)		-	0	+	0	-	
h	0	↘	$h(x_1)$	↗	$h(x_2)$	↘	-320

Ainsi le bénéfice maximum est atteint en $x_2 = 10 + 2\sqrt{7} \approx 15.3$ et ce bénéfice vaut $h(x_2) = 112\sqrt{7} - 160 \approx 136324$€.

Exercice 3

Consigne

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2) = f(x)$

$$\forall x \in [0,2[f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

1) Déterminer $f(2)$ et trouver, sous la forme d'une relation entre b, c et d une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en 2.

2) Déterminer b, c et d de manière que f soit continue sur $\mathbb{R}$ et que $C(f)$ admette le point $A(1, -\frac{1}{2})$ comme extremum local.

Correction

1) $f(0) = 0$ et $f(x+2) = f(x)$, donc nécessairement $f(2) = 2$.

D'autre part pour que f soit continue en 2, il faut que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2$.

Soit $2^4 + b2^3 + c2^2 + 2d = 2$ ou $4b + 2c + d = -8$.

2) Il faut donc que d'une part $4b + 2c + d = -8$ (c.f. 1)), que $1 + b + c + d = -\frac{1}{2}$ (puisque $A\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ appartient à $C(f)$), et $f'(1) = 4 + 3b + 2c + d = 0$ (puisque A est un extremum local). D'où la résolution du système :

$\begin{cases} 4b + 2c + d = -8(1) \\ 2b + 2c + 2d = -3(2) \\ 3b + 2c + d = -4(3) \end{cases}$. Et (1) et (3) donnent $b = -4$, $(2) - (1)$ donne alors $d = -3$ et $c = \frac{11}{2}$.

Il faut vérifier qu'alors A correspond bien à un extremum.

Sur $\left[0,2\right[$, $f(x) = x^4 - 4x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 3x, f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 11x - 3$ et $f''(x) = 12x^2 - 24x + 11$. Donc $f''(1) = -1 \neq 0$ et A correspond bien à un extremum local, c'est même un maximum local.

Exercice 4

Consigne

Soit $f : x \mapsto -3x^2 + 5x - 6 + 2\,ln(x+1)$. Montrer, sans calculer f'', que f est concave sur son ensemble de définition D que l'on précisera. En déduire alors que f admet un extremum global sur D que l'on précisera ainsi que sa nature (maximum ou minimum).

Correction

$x \mapsto -3x^2$ est concave sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto 5x - 6$ est concave (et convexe) sur $\mathbb{R}$ et $x \to 2ln(x+1)$ est concave sur $]-1\,;+\infty[$, $(x \mapsto ln(x+1))$ a la même allure que $x \mapsto lnx$. Donc $x \mapsto -3x^2 + 5x - 6 + 2\,ln(x+1)$ est concave sur $D =]-1\,;+\infty[$.

Sur $D, f'(x) = -6x + 5 + \frac{2}{x+1} = \frac{-6x^2-x+7}{x+1} = \frac{(x-1)(-6x-7)}{x+1}$. Donc $f'(x) = 0$ sur D si et seulement si $x = 1$. Et d'après le cours, f admet un maximum en $x = 1$ sur D. Ce maximum vaut $f(1) = -4 + 2\ln 2$.

Exercice 5

Consigne

Etudier la concavité de f et les points d'inflexion de $C(f)$ dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x + 3$

2) $f(x) = \frac{x^3+x-2}{x}$

3) $f(x) = (x+1)\ln(x^2+x)$

4) $f(x) = (x+1)\exp(-x^2)$

Correction

1) f est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$; $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x + 5$ et $f''(x) = 12x^2 + 12x - 2$. $f''(x) = 0$ si et seulement si $x = x_1 = \frac{-3+\sqrt{15}}{6}$ ou $x = x_2 = \frac{-3-\sqrt{15}}{6}$. f' est positive sur $]-\infty, x_2[\cup]x_1, +\infty[$ et est négative sur $]x_2, x_1[$.

On en déduit alors d'après le cours que f est convexe sur $]-\infty, x_2]$ et sur $[x_1, +\infty[$. (mais pas sur $]-\infty, x_2[\cup]x_1, +\infty[$ qui n'est pas un intervalle), et f est concave sur $[x_2, x_1]$. De plus $I_1(x_1, f(x_1))$ est un point d'inflexion ainsi que $I_2(x_2, f(x_2))$ ($C(f)$ change de concavité en ces points).

2) $D(f) = \mathbb{R}*$. Ici nous pouvons utiliser le théorème 6 sur les deux intervalles de l'ensemble de définition : f est dérivable sur ℝ* et $f'(x) = 2\left(\frac{x^3+1}{x^2}\right)$, f' est dérivable sur $\mathbb{R}*$ et $f''(x) = 2\left(\frac{x^3-2}{x^3}\right)$.

Le signe de $f''(x)$ nous permet de répondre à la question.

Sur $]-\infty, 0[\cup]\sqrt[3]{2}, +\infty[$ $f''(x) > 0$. Donc f est convexe sur $]-\infty, 0[$ et sur $]\sqrt[3]{2}, +\infty[$

Sur $]0, \sqrt[3]{2}[, f''(x) < 0$. Donc f y est concave.

$f''(x)$ s'annule et change de signe si et seulement si $x = \sqrt[3]{2}$, le point $(\sqrt[3]{2}, 1)$ est donc le seul point d'inflexion de $C(f)$.

3) f est définie et deux fois dérivable sur $D =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ $(x^2 + x > 0)$, $f'(x) = ln(x^2 + x) + \frac{(x+1)(2x+1)}{x^2+x} = ln(x^2 + x) + \frac{2x+1}{x}$ et $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2-1}{x^2(x+1)}$. Sur D, f' est positive sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$, négative sur $]-\infty, -1[\cup]0, \frac{\sqrt{2}}{2}[$, et nulle en $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Et d'après le cours, f est convexe sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$. et concave sur $]-\infty, -1[$ et sur $\left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et $C(f)$ admet un point d'inflexion en $I\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$.

4) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}, f'(x) = exp(-x^2) - 2x(x + 1)\, exp(-x^2)$

$f''(x) = (-2x^2 - 2x + 1)\, exp(-x^2)$ et $f''(x) = (-4x - 2)\, exp(-x^2) - 2x(-2x^2 - 2x + 1)\, exp(-x^2)$, soit $f''(x) = (4x^3 + 4x^2 - 6x - 2)(exp(-x^2) = (x - 1)(4x^2 + 8x + 2)\, exp(-x^2)$. Or $4x^2 + 8x + 2 = 4\left(x - \frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right)$. Donc f'' est positive sur $\left[\frac{-2-\sqrt{2}}{2}; \frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right[\cup]1, +\infty[$, et négative sur $\left]-\infty, \frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\frac{-2+\sqrt{2}}{2}, 1\right]$. D'où f est convexe sur $\left[\frac{-2-\sqrt{2}}{2}; \frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right]$ et sur $[1, +\infty[$ et concave sur $\left]-\infty, \frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{-2+\sqrt{2}}{2}, 1\right]$. Et $C(f)$ admet pour points d'inflexion, $I_1\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ et $I_2\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ car en ces points $C(f)$ change de concavité.

Références

Comment citer ce cours ?