Dérivation d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

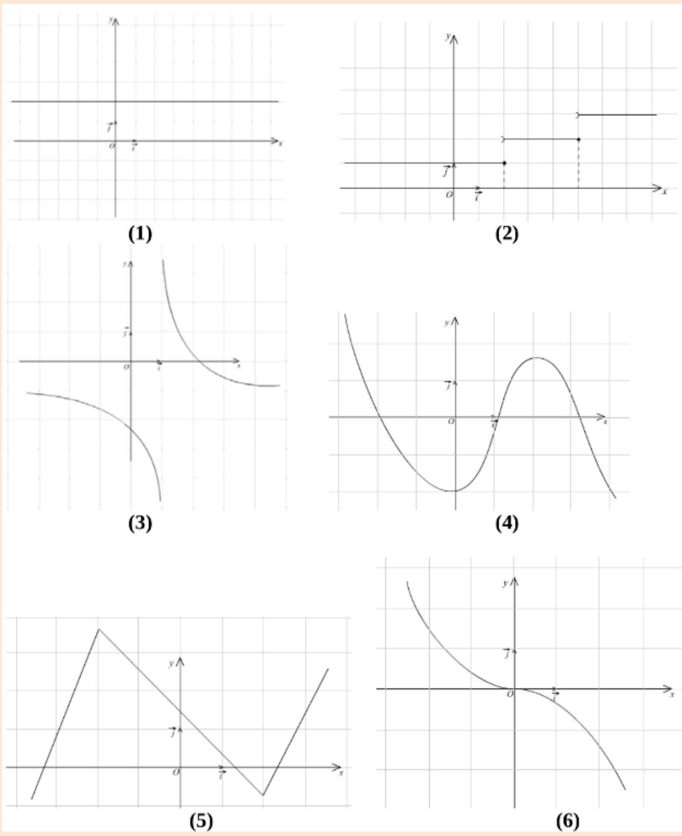
Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices

Exercice 1

Consigne

Pour chacune des représentations graphiques de la fonction f suivantes, préciser l'ensemble de définition de f, les réels où f est continue et l'ensemble de dérivabilité de f.



(1) (2) (3) (4) (5) (6)

Exercice 2

Consigne

Soit $f : t \mapsto |t+1| + |t-3|$ et $g : a \mapsto E(2a-1)+2$ pour $a \in [-1; 2]$.

$E(a)$ désigne la partie entière de a, c'est à dire l'entier immédiatement inférieur ou égal à a : $E(a) \leq a < E(a)+1,\ E(a) \in \mathbb{N}$.

1) Faire une représentation graphique de chacune des fonctions f et g.

2) Préciser leur ensemble de définition, les points où elles sont continues et leur ensemble de dérivabilité.

Exercice 3

Consigne

Soit $f : x \mapsto -2x^3 + 12x - 10$.

P et Q sont les points de $C(f)$ d'abscisse respective -1 et 2.

Trouver les points de $C(f)$ où la tangente est parallèle à (PQ).

Exercice 4

Consigne

Considérons la parabole P d'équation $y = -2x^2 + 3x + 1$ et la droite Dm d'équation $y = mx + 9$, où m est un paramètre réel.

Déterminer les points de P où la droite Dm est tangente à P (on donnera les valeurs du paramètre correspondantes).

Exercice 5

Consigne

Soit f la fonction définie par : $x \mapsto \frac{x^3-x^2+3x+5}{x^2+3}$.

1) Étudier la position de $C(f)$ par rapport à la tangente en $A(1,2)$.

2) Déterminer le point B de $C(f)$ où la tangente est parallèle à la droite δ d'équation $y = x - 1$.

3) Déterminer les points d'intersection de $C(f)$ avec (Ox) et les tangentes à $C(f)$ en ces points.

4) Déterminer la tangente à $C(f)$ en $D\left(-3, -\frac{10}{3}\right)$, puis étudier la position de $C(f)$ par rapport cette tangente au voisinage de D.

Exercice 6

Consigne

Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{ln(x^2+1)}{x} \; si \; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

Exercice 7

Consigne

Calculer les fonctions dérivées de f dans les cas suivants, après avoir précisé l'ensemble de dérivabilité.

1) $f(x) = \frac{1}{(x^2-2)^2}$ 2) $f(x) = \sqrt{2-3x}$ 3) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+1}}$ 4) $f(x) = \sqrt{x^2}$

5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x-1}}$ 6) $f(x) = \sqrt{(x^2-4)^3}$ 7) $f(x) = (4x-1)^2(6-x)^3$ 8)$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}+x^2}$9) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{(x-2)^2}$ 10) $f(x) = (5x^2-3x+5)^6$ 11) $f(x) = e^{-3x+1}$ 12) $f(x) = x\ln|x-1|$

13) $f(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ 14) $f(x) = (x+\ln x)^5$ 15) $f(x) = \ln(\ln x)$ 16) $f(x) = 2^x$

17) $f(x) = xe^{1/x}$ 18) $f(x) = \ln\frac{|(2x-1)(1-x)|}{|3x+1|}$ 19) $f(x) = x^x$ 20) $f(x) = 3^x x^3$

Exercice 8

Consigne

1) Donner les dérivées successives des fonctions suivantes :

$f\,:\, x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$ paramètre).

$g\,:\, x \mapsto (ax+b)^n$ ($a \in \mathbb{R}*, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ paramètres).

$h\,:\, x \mapsto e^{ax}$ ($a \in \mathbb{R}*$ paramètre).

2) Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $l : x \mapsto \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.

Exercice 9

Consigne

Une production mesurée par Q est liée à un facteur de production a, qui est lui-même lié à un autre facteur de production $b \geq 0$.

On donne $Q = \sqrt[3]{a^2}$ et $a = \frac{1}{b^3-2b^2+3b+1}$.

Sachant que la **production marginale** est définie par la dérivée de la fonction de production Q, calculer cette production marginale en fonction de b.

Exercice 10

Consigne

Soit $f\,:\, x \mapsto \frac{4}{x^2} + 1$. Déterminer deux ensembles A et B tels que f soit une bijection de A vers B. Déterminer f^{-1} et $(f^{-1})'$ en précisant l'ensemble de dérivabilité.

Exercice 11

Consigne

Calculer les dérivées à droite et à gauche de la fonction f en x_0, et dire si elle est dérivable en ce point.

$f\,:\,x \mapsto |x^2 + x - 2| + |x + 1|$ en $x_0 = -2, -1$ et 1 .

Exercice 12

Consigne

Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie par $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x^2 lnx}{x+1}\ si\ x \geq 0 \end{cases}$.

Faire un dessin au voisinage de l'origine.

Exercice 13

Consigne

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = (x-1)ln\left(\frac{x-1}{x}\right) si\ x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$ et $C(f)$ sa représentation graphique.

Déterminer l'ensemble de définition de f. f est-elle continue en 1 (justifier). Étudier la dérivabilité de f en 1. Que peut-on en déduire quant à $C(f)$? Faire un dessin au voisinage de $(1,0)$.

Indications

Exercice 3 : Chercher le coefficient directeur de (PQ).

Exercice 4 : Écrire que les points solutions appartiennent à la fois à P et à Dm et égaler les coefficients directeurs adéquats.

Exercice 6 : 1) Reconnaître en $\frac{\ln(x^2+1)}{x}$ un nombre dérivé.

2) Par un changement de variable remarquer que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} = \lim\limits_{X\to 0} \frac{\ln(X+1)}{X}$ et reconnaître ici encore un nombre dérivé.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 1, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Cette œuvre est mise à disposition dans le respect de la législation française protégeant le droit d'auteur, selon les termes du contrat de licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/). En cas de conflit entre la législation française et les termes de ce contrat de licence, la clause non conforme à la législation française est réputée non écrite. Si la clause constitue un élément déterminant de l'engagement des parties ou de l'une d'elles, sa nullité emporte celle du contrat de licence tout entier.