Limites, continuité

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices

Exercice 1

Consigne

Calculer les limites suivantes et conclure :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^2-1+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x^2-1+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right)$$

Exercice 2

Consigne

Cet exercice est une préparation à l'utilisation des développements limités g est une fonction définie sur IR, dont on sait uniquement que $\lim_{x\to 0} g\,(x)=0$.

Soit f définie sur IR par : $x \in R \mapsto f(x)=2x-3x^2+x^2{\sim}g(x)$.

Soir r définie sur IR par : $x \in \mathbb{R} \mapsto r(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}\ si\ x\neq 0\\ 2\ si\ x=0\end{cases}$

1) Étudier $\lim_{x\to 0} r(x)$, puis $\lim_{x\to 0}\frac{r(x)-r(0)}{x}$.

2) r est-elle continue en 0 ? est-elle dérivable en 0 ?

3) On pose, pour tout réel $x, u(x) = x + x^2$. Montrer que $f\big(u(x)\big) = 2x - x^2 + x^2 h(x)$, où h est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to 0} h\,(x) = 0$.

Exercice 3

Consigne

1) Trouver un contre-exemple qui prouve que $f_1 \sim g_1$ au voisinage de 0 et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de 0 n'implique pas forcément que $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$

2) Définissons la fonction h sur $]-2;+\infty[$ par : $x \in]-2;\,+\infty[\mapsto h(x) = ln(2+x))$. Que vaut $h(0)$? Que vaut $h'(0)$?

3) En déduire la valeur de la limite suivante $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(2+x)-\ln x}{x}$. Trouver un équivalent simple en 0 de $\ln(2+x) - \ln 2$

Exercice 4

Consigne

1) On cherche à prouver l'existence de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1}{-x/2}$ et à calculer cette limite.

a) Première méthode : On définit la fonction numérique g sur $]-1;+\infty[$ par : $x \in]-1;+\infty[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Calculer $g(0)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-1}{x}$ à l'aide d'une dérivation. Conclure : en déduire la limite initiale.

b) Deuxième méthode : Étudier (existence et calcul) la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$ à l'aide des méthodes courantes rappelées dans le cours. Conclure : en déduire la limite initiale.

2) Montrer que $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \sim 1 - x$ au voisinage de 0.

3) Quelle valeur approximative cela indique-t-il pour $\frac{1}{\sqrt{1.00028}}$? Présentée seule, cette valeur approximative n'est pourtant pas exploitable, pourquoi?

Exercice 5

Consigne

Indiquer les ensembles de définition et déterminer les asymptotes aux courbes représentatives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x+1}$

2) $g(x) = \frac{(x+1)^2}{2x-x^2}$

3) $h(x) = xe^{-1/x}$.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 1, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).