

Limites, continuité

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices

Exercice 1

Consigne

Calculer les limites suivantes et conclure :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 - 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^2 - 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x} \right)$$

Exercice 2

Consigne

Cet exercice est une préparation à l'utilisation des développements limités g est une fonction définie sur \mathbb{R} , dont on sait uniquement que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

Soit f définie sur \mathbb{R} par : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = 2x - 3x^2 + x^2 \sim g(x)$.

Soit r définie sur \mathbb{R} par : $x \in \mathbb{R} \mapsto r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1) Étudier $\lim_{x \rightarrow 0} r(x)$, puis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x) - r(0)}{x}$.

2) r est-elle continue en 0 ? est-elle dérivable en 0 ?

3) On pose, pour tout réel x , $u(x) = x + x^2$. Montrer que $f(u(x)) = 2x - x^2 + x^2h(x)$, où h est une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.

Exercice 3

Consigne

1) Trouver un contre-exemple qui prouve que $f_1 \sim g_1$ au voisinage de 0 et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de 0 n'implique pas forcément que $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$

2) Définissons la fonction h sur $] -2; +\infty[$ par : $x \in] -2; +\infty[\mapsto h(x) = \ln(2 + x)$. Que vaut $h(0)$? Que vaut $h'(0)$?

3) En déduire la valeur de la limite suivante $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2+x) - \ln x}{x}$. Trouver un équivalent simple en 0 de $\ln(2 + x) - \ln 2$

Exercice 4

Consigne

1) On cherche à prouver l'existence de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1}{-x/2}$ et à calculer cette limite.

a) Première méthode : On définit la fonction numérique g sur $] -1; +\infty[$ par : $x \in] -1; +\infty[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Calculer $g(0)$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 1}{x}$ à l'aide d'une dérivation. Conclure : en déduire la limite initiale.

b) Deuxième méthode : Étudier (existence et calcul) la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x}$ à l'aide des méthodes courantes rappelées dans le cours. Conclure : en déduire la limite initiale.

2) Montrer que $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \sim 1 - x$ au voisinage de 0.

3) Quelle valeur approximative cela indique-t-il pour $\frac{1}{\sqrt{1.00028}}$? Présentée seule, cette valeur approximative n'est pourtant pas exploitable, pourquoi ?

Exercice 5

Consigne

Indiquer les ensembles de définition et déterminer les asymptotes aux courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \frac{x^2+x-2}{x+1}$$

$$2) g(x) = \frac{(x+1)^2}{2x-x^2}$$

$$3) h(x) = xe^{-1/x}.$$

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 1, Odile Brandière, AUNEGe (<http://auneg.fr>), CC – BY NC ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).



Cette œuvre est mise à disposition dans le respect de la législation française protégeant le droit d'auteur, selon les termes du contrat de licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>). En cas de conflit entre la législation française et les termes de ce contrat de licence, la clause non conforme à la législation française est réputée non écrite. Si la clause constitue un élément déterminant de l'engagement des parties ou de l'une d'elles, sa nullité emporte celle du contrat de licence tout entier.