Limites, continuité

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices corrigés

Attention : ceci est la version corrigée des exercices.

Exercice 1

Consigne

Calculer les limites suivantes et conclure :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^2-1+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x^2-1+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right)$$

Correction

Si $x \to 0^+, x > 0$ et $\sqrt{x^2} = x$ et $\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{x}{x} = 1$. Donc $\lim_{x\to 0^+} x^2 - 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 0$.

Si $x \to 0^-, x < 0$ et $\sqrt{x^2} = -x$ et $\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{-x}{x} = -1$. Donc $\lim_{x\to 0^+} x^2 - 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x} = -2$.

Exercice 2

Consigne

Cet exercice est une préparation à l'utilisation des développements limités. g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont on sait uniquement que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = 2x - 3x^2 + x^2 g(x)$.

Soir r définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} \ si \ x \neq 0 \\ 2 \ si \ x = 0 \end{cases}$

1) Étudier $\lim_{x\to 0} r(x)$, puis $\lim_{x\to 0} \frac{r(x)-r(0)}{x}$.

2) r est-elle continue en 0 ? est-elle dérivable en 0 ?

3) On pose, pour tout réel $x, u(x) = x + x^2$. Montrer que $f(u(x)) = 2x - x^2 + x^2 h(x)$, où h est une fonction telle que $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$.

Correction

1) $\lim_{x\to 0} r(x) = \frac{2x-3x^2+x^2g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2 - 3x + xg(x) = 2$

$\lim_{x\to 0} \frac{r(x)-r(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(2-3x+xg(x))-2}{x} = \lim_{x\to 0} -3 + g(x) = -3.$

2) $\lim_{x\to 0} r(x) = 2 = r(0)$, donc r est bien continue en 0. $r'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{r(x)-r(0)}{x} = -3$. r est donc bien dérivable en 0 et le nombre dérivée de r en 0 est -3 .

3) $f(u(x)) = 2u(x) - 3u^2(x) + u^2(x)g(u(x)) = 2(x + x^2) - 3(x + x^2)^2 + (x + x^2)^2 g(x + x^2)$,

$f(u(x)) = 2x + 2x^2 - 3x^2 - 6x^3 - 3x^4 + (x + x^2)^2 g(x + x^2)$,

$f(u(x)) = 2x - x^2 + x^2(-6x - 3x^2 + (1 + x)^2 g(x + x^2))$. Or $\lim_{x\to 0}(1 + x)^2 g(x + x^2) = 0$ et la dernière parenthèse est de la forme $h(x)$ avec $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$. D'où le résultat.

Exercice 3

Consigne

1) Trouver un contre-exemple qui prouve que $f_1 \sim g_1$ au voisinage de 0 et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de 0 n'implique pas forcément que $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$

2) Définissons la fonction h sur $]-2\,;+\infty[$ par : $x \in]-2;+\infty[\;\mapsto\; h(x) = ln(2+x))$. Que vaut $h(0)$? Que vaut $h'(0)$?

3) En déduire la valeur de la limite suivante $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(2+x)-\ln x}{x}$. Trouver un équivalent simple en 0 de $\ln(2+x) - \ln 2$

Correction

1) Par exemple si $f_1(x) = x + x^2 + x, f_2(x) = -x - x^2, g_1(x) = x + x^2$et $g_2(x) = -x.$

On a bien $f_1{\sim}g_1$ au voisinage de 0 et $f_2{\sim}g_2$ au voisinage de 0. Par contre $f_1 + f_2 \sim x^4$ et $\mathrm{g}_1 + \mathrm{g}_2 \sim x^2$ donc $f_1 + f_2$ n'est pas équivalent à $g_1 + g_2$.

2) $h(0) = \ln 2\,.\,h'(x) = \frac{1}{2+x}$ et $h'(0) = \frac{1}{2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(2+x)-ln\,x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x} = h'(0) = \frac{1}{2}$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(2+x)-ln\,x}{x/2} = 1$ et $ln(2+x) - ln\,2 \sim \frac{x}{2}$.

Exercice 4

Consigne

1) On cherche à prouver l'existence de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1}{-x/2}$ et à calculer cette limite.

a) Première méthode : On définit la fonction numérique g sur $]-1\,;+\infty[$ par : x∈]-1 ;+∞[↦$\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{x}}}$. Calculer $g(0)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-1}{x}$ à l'aide d'une dérivation. Conclure : en déduire la limite initiale.

b) Deuxième méthode : Étudier (existence et calcul) la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$ à l'aide des méthodes courantes rappelées dans le cours. Conclure : en déduire la limite initiale.

2) Montrer que $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \sim 1 - x$ au voisinage de 0.

3) Quelle valeur approximative cela indique-t-il pour $\frac{1}{\sqrt{1.00028}}$? Présentée seule, cette valeur approximative n'est pourtant pas exploitable, pourquoi ?

Correction

1) a) $g(0) = 1$ et $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)-1}{x} = g'(0)$.

$g(x) = (1+x)^{-1/2}$ et $g'(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x}}$, $g'(0) = -\frac{1}{2}$. Donc $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)-1}{x} = -\frac{1}{2}$

Et $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)-1}{-\frac{1}{2}x} = 1$, soit $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1}{-x/2} = 1$.

b) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x(1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x \to 0} \frac{1-(x+1)}{x(1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{(1+\sqrt{x+1})} = -\frac{1}{2}$.

Or $\frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1}{-x/2} = -2\frac{1-\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}} = \frac{-2}{\sqrt{x+1}}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$. Donc $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1}{-x/2} = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

2) D'après la question précédente $\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1 \sim_0 -\frac{x}{2}$.

3) En posant $x = 0.00028$ et en appliquant l'équivalent précédent $\frac{1}{\sqrt{1.00028}}$ peut-être approximé par $1 - 0.0014 = 0.0086$. En effet cette valeur approximative n'est pas exploitable car on n'en connaît pas la marge d'erreur.

Exercice 5

Consigne

Indiquer les ensembles de définition et déterminer les asymptotes aux courbes représentatives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x+1}$

2) $g(x) = \frac{(x+1)^2}{2x-x^2}$

3) $h(x) = xe^{-1/x}$.

Correction

1) $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

On peut écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = x - \frac{2}{x+1}$. Donc $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = 0$ et la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty (x^2 + x - 2 < 0$ et $x + 1 \to 0^-)$ et $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$ $(x^2 + x - 2 < 0$ et $x + 1 \to 0^+)$, la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale.

2) $D_g =]-\infty, 0[\cup]0,2[\cup]2, +\infty[$.

$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(1+2/x+1/x^2)}{x^2(-1+2/x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+2/x+1/x^2}{-1+2/x} = -1$.

La droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$.

$\lim_{x\to-0^-} g(x) = \lim_{x\to-0^-} \frac{(x+1)^2}{2x-x^2} = -\infty((x + 1)^2 > 0$ et $2x - x^2 \to 0^-)$

$\lim_{x\to-0^+} g(x) = \lim_{x\to-0^+} \frac{(x+1)^2}{2x-x^2} = +\infty((x + 1)^2 > 0$ et $2x - x^2 \to 0^+)$.

La droite d'équation $x = 0$ est donc asymptote verticale).

$\lim_{x\to-2^-} g(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{(x+1)^2}{2x-x^2} = +\infty((x + 1)^2 > 0$ et $2x - x^2 \to 0^+)$

$\lim_{x\to-2^+} g(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{(x+1)^2}{2x-x^2} = -\infty((x + 1)^2 > 0$ et $2x - x^2 \to 0^-)$,

La droite d'équation $x = 0$ est donc asymptote verticale).

3) $D_h =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \pm\infty$ (en effet $\lim_{x\to\pm\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-1/x} = 1$).

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-1/x} = 1$ et $\lim_{x\to\pm\infty} (h(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(e^{-1/x} - 1\right) = \lim_{x\to0} \frac{e^X-1}{-X} = -1$ (on a posé $X = -\frac{1}{x}$).

Donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

$\lim_{x\to-0^+} h(x) = -\infty$ (en effet $\lim_{x\to-0^+} -\frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to-0^+} e^{-1/x} = +\infty$ et l'exponentielle "l'emporte sur x ").
La droite $x = 0$ est donc asymptote verticale à gauche de 0.

$\lim_{x\to-0^+} h(x) = 0$ (en effet $\lim_{x\to-0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x\to-0^+} e^{-1/x} = 0$), il n'y a pas d'asymptote à droite de 0.

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 1, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).