Fonctions classiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Exercices corrigés

Attention : ceci est la version corrigée des exercices.

Exercice 1

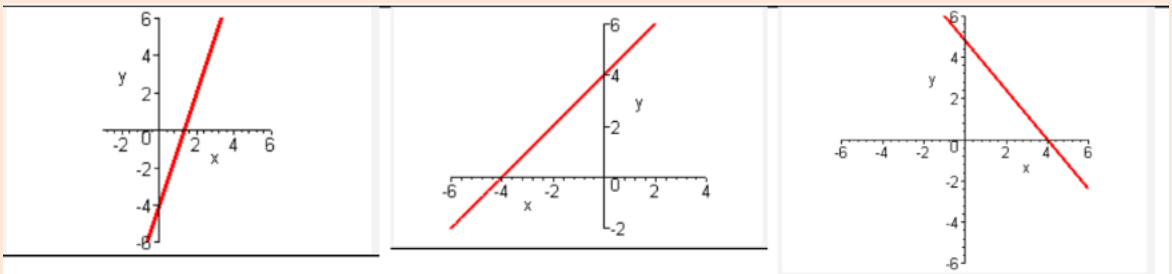
Consigne

1) Déterminer l'équation de la droite passant par le point $P(1;\,-2)$ et de coefficient directeur 3

2) a) Déterminer l'équation de la droite passant par les points $Q(3;\,5)$ et $P(\,4;2)$

b) Quelle est la pente de cette droite ?

3) g est la fonction affine définie par : $x \in \mathbb{R}$ a $3x - 4$. Quel schéma est la représentation graphique de g ?



a b c

4) Tracez les représentations graphiques des fonctions affines suivantes :

$f_1 : x \in \mathbb{R} \rightarrow 2x - 3 \quad f_2 : x \in \mathbb{R} \rightarrow -2x + 3 \quad f_3 : x \in \mathbb{R} \rightarrow x - \frac{3}{2}$

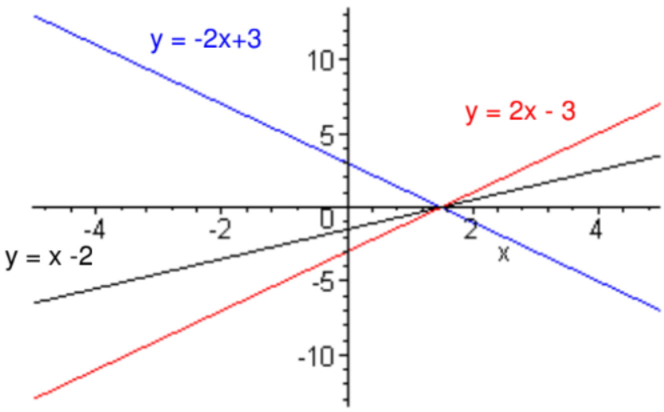
Correction

1) On utilise la formule donnant l'équation de la droite : $y = a\,(x - x_A) + y_A$. L'équation est donc $y = 3\,(x - 1) - 2$, c'est-à-dire $y = 3x - 5$. Il est aussi possible d'écrire que l'équation de la droite est de la forme $y = ax + b$, où a et b sont deux constantes. a est le coefficient directeur, donc $a = 3$. D'autre part la droite passe par le point $P(1\,;-2)$, donc $-2 = 3 \times 1 + b$, donc $b = -2 - 3 = -5$.

2) a) On remplace dans les formules données A par Q et B par P, l'équation est : $y = \frac{x-x_Q}{x_P-x_Q}(y_P - y_Q) + y_Q = \frac{x-3}{4-3}(2-5) + 5$, c'est-à-dire y = - 3x+14. On peut vérifier que P et Q satisfont à cette équation. C'est donc bien l'équation de la droite (PQ).

b) La pente de cette droite est donc -3. C'est le coefficient de x dans l'équation de la droite, et c'est aussi $\frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}$.

3) Le coefficient directeur de la représentation graphique de g est positif, la représentation ne peut donc pas être c. Pour $x = 0$, $y = -4$. La droite doit donc passer par le point $(0, -4)$, donc ce n'est pas b. Donc il ne peut s'agir que de a. On peut le vérifier en remarquant que la droite en a passe par deux points satisfaisant à l'équation, celui de coordonnées $(0\,;\,-4)$ et par exemple, celui de coordonnées $(3\,;\,3 \times 3 - 4)$, c'est-à-dire $(3\,;\,5)$.



Exercice 2

Consigne

Retrouver la forme canonique de $5x^2 + 20x - 15$. En déduire la valeur minimale atteinte par ce trinôme.

Correction

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $5x^2 + 20x - 15 = 5(x^2 + 4x - 3)$. Dans la parenthèse on regarde les termes en x^2 et x et on cherche à former le début d'un carré. C'est toujours possible, quels que soient les coefficients d'x et x^2.

$x^2 + 4x$ est le début du développement de $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$. On fait donc apparaître ce développement, en remplaçant $x^2 + 4x$ par $x^2 + 4x + 4 - 4$.

$5(x^2 + 4x - 3) = 5(x^2 + 4x + 4 - 4 - 3) = 5\left((x + 2)^2 - 7\right)$. Ceci est la forme canonique du trinôme : constante × (carré – constante). $(x + 2)^2$ étant une quantité positive, elle est minimale lorsqu'elle vaut 0. La valeur minimale de ce trinôme est donc $5 \times (0 - 7) = -35$, elle est atteinte pour $x = -2$.

Exercice 3

Consigne

Déterminer les racines des trinômes suivants, lorsqu'ils en ont :

1) $x \in \mathbb{R} \rightarrow 3x^2 - x - 10$

2) $x \in \mathbb{R} \rightarrow 4x^2 - 12x + 9$

3) $x \in \mathbb{R} \rightarrow 2x^2 - x + 3$

Correction

1) Le discriminant de ce trinôme est $121 = 11^2$. Il y a donc 2 racines : $\frac{1-11}{6} = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3}$ et $\frac{1+11}{6} = 2$

On pouvait aussi remarquer qu'il y a une racine évidente : 2. Notons r_2 l'autre racine. Le produit des racines est $\frac{-10}{3}$, donc $2\, r_2 = \frac{-10}{3}$, donc $r_2 = \frac{-5}{3}$.

2) Le discriminant est 0, il y a une racine, double : $-\frac{-12}{8} = \frac{3}{2}$.

3) Le discriminant est - 23, il est négatif, donc il n'y a pas de racines à ce trinôme.

Exercice 4

Consigne

Tracer les graphes des fonctions trinômes suivantes :

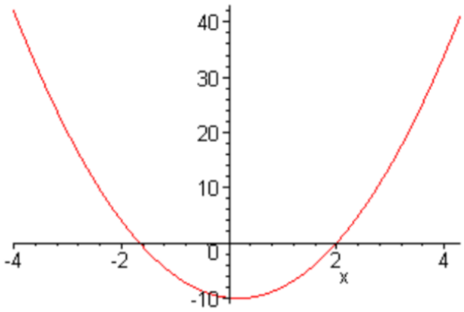
1) $x \in \mathbb{R} \to 3x^2 - x - 10$

2) $x \in \mathbb{R} \to 4x^2 - 12x + 9$

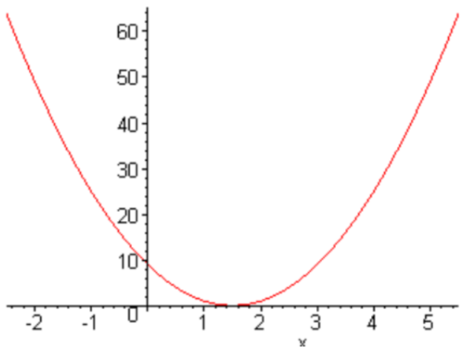
3) $x \in \mathbb{R} \to 2x^2 + 6x - 7$

Correction

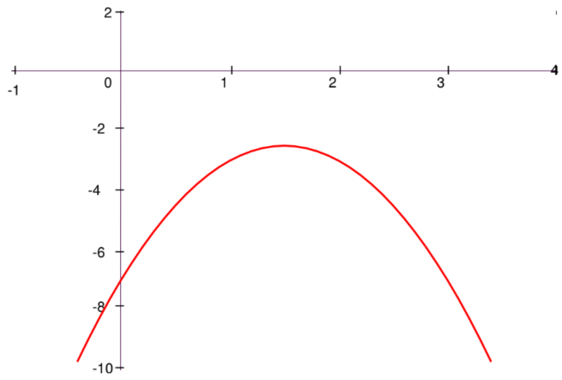
1) Le graphe de cette fonction est une parabole, tournée vers le haut car le coefficient de x^2 est positif. Son sommet est à l'abscisse $x = 1/6$ (on a utilisé la formule : -$b/(2a)$), et à l'ordonnée $y = -363/36 = -121/12$ (la valeur du trinôme pour $x = 1/6$). Elle rencontre l'axe des abscisses (d'équation $y = 0$) pour $x = 2$ et $x = -5/3$, d'après l'exercice précédent. Elle rencontre l'axe des ordonnées (d'équation $x = 0$) en $x = 0,\ y = -10$. Cela indique l'allure du graphe de cette fonction. Le voici, plus précisément :



2) Il y a une racine double : 3/2. Le point de coordonnées (3/2, 0) est donc le sommet de la parabole. La parabole est tournée vers le haut. Elle rencontre l'axe des ordonnées pour $x = 0$, $y = 9$.



3) La parabole est dirigée vers le bas et le sommet est en $x = 6/4 = 3/2$, $y = -5/2$, c'est donc que la parabole n'a que des ordonnées négatives : elle ne rencontre pas l'axe des abscisses, il n'y a donc pas de racines au trinôme. Elle rencontre l'axe des ordonnées au point de coordonnées $x = 0$, $y = -7$. Ces informations suffisent à donner l'allure de la courbe. La voici plus précisément :



Exercice 5

Consigne

1) Déterminer $Q(x)$ pour $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 5x + 6$ et $\alpha = 3$

2) Déterminer $Q(x)$ pour $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ et $\alpha = -1$, puis déterminer les racines de $Q(x)$. En déduire toutes les racines de P.

Correction

1) Pour cet exercice utilisons la méthode de la division euclidienne, d'utilisation plus rapide mais de maîtrise plus délicate que la méthode d'identification des coefficients, utilisée pour la correction de l'exercice suivant.

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 - 5x^2 - 5x + 6 & x - 3 \\
\hline
-(2x^3 - 6x^2) & 2x^2 + x - 2 \\
x^2 - 5x + 6 & \\
-(x^2 - 3x) & \\
-2x + 6 & \\
-(-2x + 6) & \\
0 &
\end{array}$$

Donc $Q(x) = 2x^2 + x - 2$, $P(x) = (x - 3)(2x^2 + x - 2)$

2) Utilisons la méthode d'identification des coefficients. Elle est plus simple à retenir que la méthode de la division euclidienne présentée à la correction de l'exercice précédent, mais elle aboutit à des calculs un peu plus longs. On cherche un polynôme Q tel que $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)Q(x)$. Q est donc de degré 2, posons :

$Q(x) = ax^2 + bx + c$, et cherchons a, b, c

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)Q(x) \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)ax^2 + bx + c$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 = ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)\,x + c$$

Ceci est vrai pour tout x de $\mathbb{R}$ si et seulement si les coefficients de même degré sont égaux, c'est-à-dire :

$\begin{cases} 1 = a \\ -4 = b + a \\ 1 = b + c \\ 6 = c \end{cases}$, ceci est équivalent à $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 - 1 = -5 \\ c = 1 - b = 6 \\ c = 6 \end{cases}$

Donc $Q(x) = x^2 - 5x + 6$, et $P(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$

Q est un polynôme du second degré, on peut chercher ses racines par la méthode habituelle, le discriminant est 1, il y a 2 racines : 2 et 3. On pouvait aussi remarquer que 2 est une racine évidente, la produit des racines étant $6/1 = 6$, l'autre racine est donc 3.

On a $P(x) = (x+1)Q(x)$, d'où $P(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $Q(x) = 0$, donc P a 3, et seulement 3, racines : - 1, 2 et 3.

Exercice 6

Consigne

Simplifier $81^{1/2}2$, $81^{1/4}$, $16^{1/3}$, $(a^4)^{1/2}$, $(9+16)^{1/2}$

Correction

$81^{1/2} = (9^2)^{1/2} = 9$;

$(81)^{1/4} = (9^2)^{1/4} = (3^4)^{1/4} = 3$

$16^{1/3} = (2^4)^{1/3} = (2^3 2)^{1/3} = 2 \times 2^{1/3}$ ce qui peut aussi s'écrire $2^{4/3}$

$(a^4)^{1/2} = a^2$;

$(9+16)^{1/2} = 25^{1/2} = \sqrt{25} = 5$, attention c'est différent de $9^{1/2} + 16^{1/2}$.

Exercice 7

Consigne

Simplifier les écritures suivantes : $27^{2/3}, 16^{-3/2}, \frac{8^{5/2}}{10^{3/2}}\sqrt{5}, \sqrt[3]{a}\sqrt{a}, 6^4\left(6^{10/3}\right)^{3/5}$.

Correction

$27^{2/3} = (3^3)^{2/3} = 3^2 = 9$

$16^{-3/2} = (42)^{-3/2} = 4^{-3} = \dfrac{1}{4^3} = 1/64$

$\frac{8^{5/2}}{10^{3/2}}\sqrt{5}$: pour manipuler une telle expression, la première chose à faire est de l'écrire avec des exposants rationnels, sans fractions ni racines : $\frac{8^{5/2}}{10^{3/2}}\sqrt{5} = 8^{5/2}10^{-3/2}5^{1/2}$

d'où $\frac{8^{5/2}}{10^{3/2}}\sqrt{5} = (2^3)^{5/2}(2\times 5)^{-3/2}5^{1/2} = 2^{15/2}\times 2^{-3/2}\times 5^{-3/2}\times 5^{1/2}$

d'où $\frac{8^{5/2}}{10^{3/2}}\sqrt{5} = 2^6 5^{-1}$, c'est-à-dire $\frac{26}{5}$

$\sqrt[3]{a}\sqrt{a} = a^{1/3}a^{1/2} = \mathrm{a}^{1/3+1/2} = a^{5/6}$

$6^4\left(6^{10/3}\right)^{3/5} = 6^4 6^{10/5} = 6^{4+2} = 6^6$

Exercice 8

Consigne

Trouver la forme canonique de $\frac{4x+3}{2x-5}$.

Correction

Pour tout $x \neq 5/2$,

$$\frac{4x+3}{2x-5} = \frac{4}{2}\frac{x+3/4}{x-5/2} = 2\frac{x-5/2+5/2+3/4}{x-5/2} = 2\left(\frac{x-5/2}{x-5/2} + \frac{5/2+3/4}{x-5/2}\right) = 2\left(1+\frac{13/4}{x-5/2}\right)$$

$$= 2 + \frac{13}{2x-5}$$

Exercice 9

Consigne

1) Déterminer rapidement l'allure de la courbe représentative de la fonction : $x \in \mathbb{R} - \{2\} \mapsto \frac{6x-11}{2x-4}$.

2) Déterminer rapidement l'allure de la courbe représentative de la fonction : $x \in \mathbb{R} - \{-1/2\} \mapsto (2x-1)/(2x+1)$.

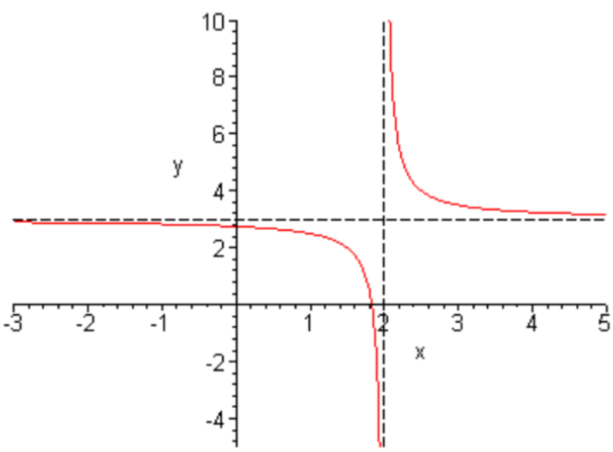
Correction

Il s'agit d'une fonction homographique, sa courbe représentative est une hyperbole, l'asymptote horizontale est donnée par la limite en $+\infty$, c'est la droite d'équation $y = 6 / 2 = 3$.

La valeur qui annule le dénominateur est $x = 2$, donc l'asymptote verticale est la droite d'équation $x = 2$.

Le centre de symétrie de l'hyperbole est donc le point de coordonnées $(2{,}3)$.

Pour $x = 0, y = 11/4$, la courbe passe donc par le point de coordonnées $(0, 11/4)$, ce point est dans le quadrant 3, si on numérote les quadrants comme dans les exemples du cours. Donc l'hyperbole occupe les quadrants 1 et 3, ce qui implique que la fonction est décroissante sur son domaine de définition. Voilà qui suffit à donner l'allure de la courbe. La courbe représentée ici est bien sûr plus précise, mais ces informations et le calcul de quelques points de la courbe auraient suffi à construire un schéma rapide.



2) Il s'agit d'une fonction homographique, sa courbe représentative est donc une hyperbole.

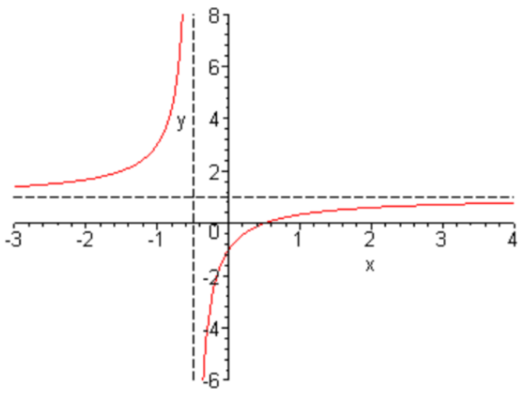
Bien que ce ne soit pas indispensable, on peut ici s'aider de la forme canonique qui est particulièrement facile à construire : $\frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2x+1-2}{2x+1} = 1 - \frac{2}{2x+1}$.

La valeur qui annule le dénominateur est x=-1 / 2, l'asymptote verticale a donc pour équation $x = -1 / 2$.

La limite en $+\infty$ est 1, l'asymptote horizontale a donc pour équation $y = 1$

Le centre de symétrie de l'hyperbole est donc le point de coordonnées $(-1 / 2 , 1)$

Pour $x = 0$, $y = 1$, la courbe passe donc par le point de coordonnées $(0, -1)$, situé dans le quadrant 4, si on numérote comme dans l'exemple du cours les 4 quadrants formés par les asymptotes. La courbe occupe donc les quadrants 2 et 4, la fonction est donc croissante sur son domaine de définition sur $] -\infty, -1 / 2 [$ et sur $] 1/2, +\infty [$, ce que l'on pouvait trouver aussi en observant la forme canonique de la fonction.



Exercice 10

Consigne

Simplifier : a) $\frac{1}{2} log_{10}(2) + log_{10}(15\sqrt{2}) - log_{10}(3)$

b) $ln(\sqrt{7} - 1) + ln(\sqrt{7} + 1) - ln\, 2$

Correction

a) $\frac{1}{2} log_{10}(2) + log_{10}(15\sqrt{2}) - log_{10}(3) \quad = \frac{1}{2} log_{10}(2) + log_{10}(5 \times 3\sqrt{2}) - log_{10}(3)$

$= \frac{1}{2} log_{10}(2) + log_{10}(5) + log_{10}(3) + log_{10}(21/2) - log_{10}(3)$

$= \frac{1}{2} log_{10}(2) + log_{10}(5) + \frac{1}{2} log_{10}(2)$

$= log_{10}(2) + log_{10}(5)$

$= log_{10}(2 \times 5) = 1$

b) $ln(\sqrt{7} - 1) + ln(\sqrt{7} + 1) - ln\,2 = ln\left((\sqrt{7} - 1)(\sqrt{7} + 1)\right) - ln\,2$

$$= ln(7 - 1) - ln\,2$$

$$= ln(6) - ln\,2$$

$$= ln(6/2)$$

$$= ln\,3$$

Exercice 11

Consigne

1) Simplifier $a)\ (\exp(3))^2$ $\quad b)\ \frac{\exp(3)+\exp(-3)}{\exp(5)+\exp(-1)}$ $\quad c)\ 3^{\exp(\ln 6 - \ln 2)}$

2) Résoudre $a)\ 5^x = 4$ $\quad b)\ 3^{2x-1} = 2^x$ $\quad c)\ 2^x + 2^3 = 2^x 2^4$

Correction

1) a) $(exp(3))^2 = (e^3)^2 = e^6$

b) $\frac{exp(3)+exp(-3)}{exp(5)+exp(-1)}$: on essaie de faire apparaître $exp(3)$ et $exp(-3)$ au dénominateur en vue de simplifier ensuite.

$$\frac{exp(3) + exp(-3)}{exp(5) + exp(-1)} = \frac{exp(3) + exp(-3)}{exp(3+2) + exp(-3+2)} = \frac{exp(3) + exp(-3)}{exp(3)\,exp(2) + exp(-3)\,exp(2)}$$

$$= \frac{exp(3) + exp(-3)}{(exp(3) + exp(-3))\,exp(2)} = \frac{1}{exp(2)}$$

d'où $\frac{exp(3)+exp(-3)}{exp(5)+exp(-1)} = exp(-2) = e^{-2}$

c) $3^{exp(ln\,6 - ln\,2)} = 3^{exp(ln(6/2))} = 3^{exp(ln\,3)} = 3^3 = 27$

2) a) 2 nombres strictement positifs sont égaux si et seulement si leurs logarithmes sont égaux, car la fonction ln est bijective. Donc $5x = 4 \Leftrightarrow x\,ln\,5 = ln\,4$

d'où $5^x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{ln\,4}{ln\,5}$

b) $3^{2x-1} = 2^x \Leftrightarrow (2x-1)\ln 3 = x\, ln\, 2$ (ici on a pris le ln de chaque membre de l'égalité)

d'où $3^{2\,x-1} = 2^x \;\Leftrightarrow x(2\;\ln\;3 - \;\ln\;2) = ln3$, d'où $3^{2\,x-1} = 2^x \;\Leftrightarrow x = \frac{ln3}{2\;ln3 - ln2}$

c) $2^x + 2^3 = 2^x 2^4 \Leftrightarrow 2^3 = 2^x 2^4 - 2^x = 2^x(2^4 - 1)$, d'où $2^x + 2^3 = 2^x 2^4 \Leftrightarrow 2^x = \frac{2^3}{2^4-1}$,

d'où $2^x + 2^3 = 2^x 2^4 \Leftrightarrow x\, ln\, 2 = ln\left(\frac{2^3}{2^4-1}\right)$ utiliser les ln est possible, car $2^4 - 1 > 0$, donc $\frac{2^3}{2^4-1} > 0$

d'où $2^x + 2^3 = 2^x 2^4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{ln\,2} ln\left(\frac{2^3}{2^4-1}\right) = \frac{1}{ln\,2}(3\,ln\,2 - ln(2^4 - 1))$

d'où $2^x + 2^3 = 2^x 2^4 \Leftrightarrow x = 3 - \frac{ln(2^4-1)}{ln\,2}$

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 1, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).