Fonctions classiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Introduction

Objectif de la leçon : Rappels des fonctions de base utiles : polynôme, homographique, puissance logarithme et exponentielle.

Vous devez savoir reconnaître ces fonctions, les utiliser, tracer leurs courbes dans les cassimples.

Remarque : Cette leçon est une leçon de révision. Un simple parcours suffit à un étudiant au niveau. Elle est destinée à combler des lacunes éventuelles. Mais les notions abordées sont essentielles pour la suite du cours et doivent faire partie des connaissances d'un étudiant de niveau L1.

Fonctions affines – Droites

Définition

Soit deux réels a et b. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = ax + b$ s'appelle fonction affine.

Remarque : L'ensemble de définition de toute fonction affine est bien sûr $\mathbb{R}$.

Graphe d'une fonction affine

La courbe représentative de la fonction affine f: $x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b$ est la droite d'équation $y = ax + b$.

Comment tracer cette droite rapidement ?

Aspect général : a qui est la pente de la droite donne les **variations de f**.

$\boldsymbol{a = 0}$

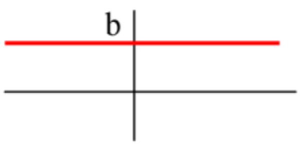
f est une fonction **constante** et sa courbe représentative est une **droite horizontale** de hauteur b.

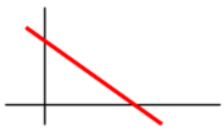
$\boldsymbol{a > 0}$

f est une fonction **croissante**.

$\boldsymbol{a < 0}$

f est une fonction **décroissante**.



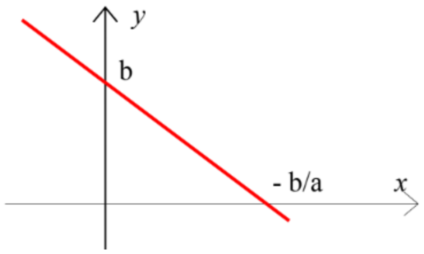


Plus précisément :

- **Si $b \neq 0$**

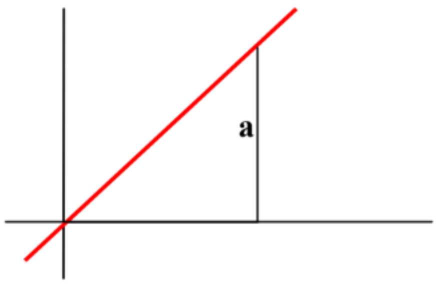
Pour $x = 0$, $y = b$; pour $y = 0$, $x = -b/a$;

Les points $Q(0, b)$ et $P\ (-b/a, 0)$ sont sur la droite et suffisent à la tracer .



- **Si $b = 0$**

La droite passe par l'origine, et a pour vecteur directeur $\vec{V}(1, a)$.



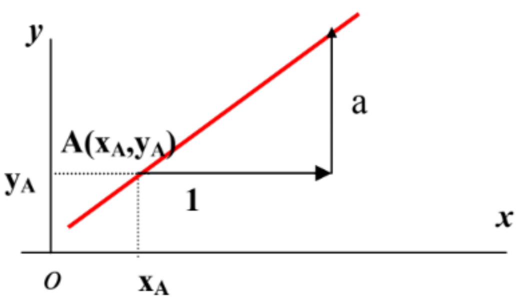
Quelques rappels sur les droites

Comment définir une droite du plan ?

Il suffit d'indiquer :

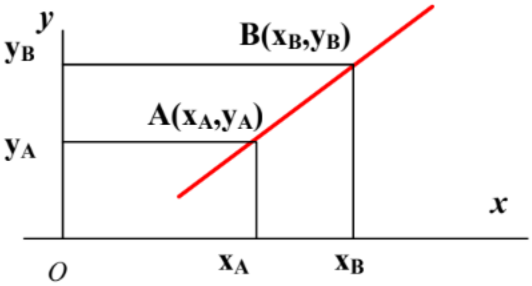
L'équation de la droite : $y = ax + b$.

- Ou sa pente $\boldsymbol{a}$ et un point $\boldsymbol{A(x_A, y_A)}$



Remarque : Si a est la pente de D le vecteur $\vec{V}(1, a)$ est un vecteur directeur de D.

- **Ou encore deux points** de la droite



Trouver l'équation d'une droite

Définie par :

- Un point $\boldsymbol{A(x_A, y_A)}$ et sa pente $\boldsymbol{a}$: $y = a(x - x_A) + y_A$
- Deux points $\boldsymbol{A(x_A, y_A)}$ et $\boldsymbol{B(x_B, y_B)}$) avec $y_B \neq y_A$. $\mathrm{y} = \frac{\mathrm{y_B - y_A}}{\mathrm{x_B - x_A}}(\mathrm{x} - \mathrm{x_A}) + \mathrm{y_A}$ ou $\mathrm{y} = \frac{\mathrm{y_B - y_A}}{\mathrm{x_B - x_A}}(\mathrm{x} - \mathrm{x_B}) + \mathrm{y_B}$. **Remarque** : La pente de la droite passant par A et B étant $\frac{(\mathrm{y_B - y_A})}{(\mathrm{x_B - x_A})}$, on a appliqué la formule de la colonne précédente.

Exemple : La droite passant par les points $A(2,3)$ et $B(-1,5)$ a pour équation : $y = -\frac{2}{3}(x-2) + 3 = \frac{13}{3} - \frac{2}{3}x$

Fonction trinôme de degré 2 – Parabole

Définition

Soit deux réels $a,\ b$ non nuls et c un réel quelconque.

La fonction f définie par $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$ s'appelle trinôme de degré 2.

Remarque : l'ensemble de définition de tout trinôme de degré 2 est bien sûr $\mathbb{R}$.

Forme canonique d'un trinôme de degré 2

Idée : Écrire le trinôme $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ comme la différence de deux carrés.

$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$ -> Mise en facteur de a

$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$ -> Reconnaître dans $x^2 + \frac{b}{a}x = x^2 + 2\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}x$ le début de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - (b^2 - 4ac)/4a^2\right]$ -> Mettre au même dénominateur la deuxième partie

Finalement on a : $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}\right]$

NB : Il est bien sûr inutile de retenir cette formule, l'important est de savoir la retrouver.

Cette forme est utile pour certains calculs et en particulier pour déterminer les racines du trinôme.

Exemple : $3x^2 - x - 2 = 3\left(x^2 - \frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right) = 3\left[\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} - \frac{2}{3}\right]$ d'où $3x^2 - x - 2 = 2\left(\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right)$

Racines d'un trinôme de degré 2

Définition : Les **racines de trinôme de degré 2** $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$ sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Propriété : Détermination des racines du trinôme

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, le trinôme $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ admet :

- Si $\Delta > 0$: deux racines distinctes. $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$: une seule racine $x_0 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$:aucune racine dans $\mathbb{R}$

Preuve : il suffit d'écrire la forme canonique : $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \mp\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}$

Propriété : si le trinôme a des racines (éventuellement une seule), alors **le produit de ces racines** (dans le cas d'une racine double, le carré de cette racine) est $\boldsymbol{c/a}$, **la somme de ces racines** (dans le cas d'une racine double, le double de cette racine) est $\boldsymbol{-b/a}$**.**

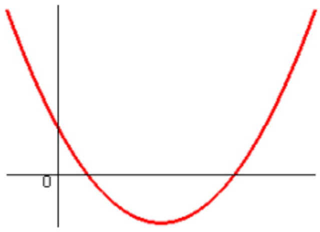
Graphe d'un trinôme de degré 2

La courbe représentant le trinôme de degré 2 $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une **parabole** d'axe parallèle à(Oy) et de sommet $\boldsymbol{S(-b/2a, f(-b/2a))}$

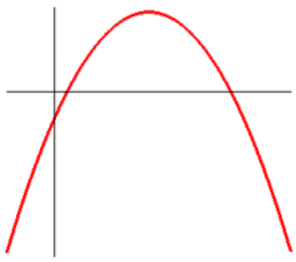
Comment tracer cette parabole rapidement ?

Aspect général : Le signe de a donne les variations de f

$\boldsymbol{a > 0}$ **:** f est une fonction décroissante jusqu'au sommet puis croissante, sa courbe représentative est une parabole orientéevers le **haut**



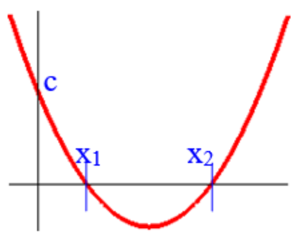
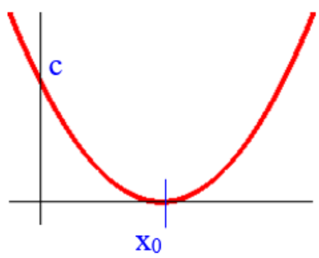
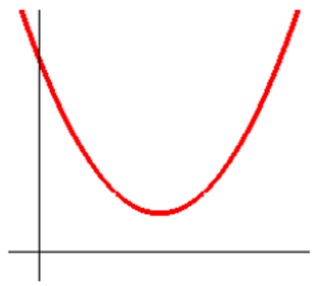
$\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$: f est une fonction croissante jusqu'au sommet puis décroissante, sa courbe représentative est une parabole orientéevers le **bas**



Plus précisément

- Placer le sommet de la parabole Π : il a pour coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
- Placer les intersections de Π avec les axes de coordonnées : le point de coordonnées $(0, c)$ et si le trinôme a des racines x_1 et x_2 , les points de coordonnées ($-x_1, 0)$ et $(x_2, 0)$

NB : les courbes suivantes sont représentées dans le cas a positif.

Δ = b²-4ac >0	Δ = b²-4ac= 0	Δ = b²-4ac< 0
		
2 racines distinctes	**1 racine double**	**Pas de racine dans IR**

Fonction polynomiale de degré n

Définition

Soit $a_0, a_1, a_2 \dots a_{n-1}$, n réels quelconques et $\boldsymbol{a^n}$ est un réel **non nul** on appelle **fonction polynomiale de degré $\boldsymbol{n}$** sur IR toute application P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$.

a_k est appelé le **coefficient de degré k** de P.

Remarque : L'ensemble de définition d'une fonction polynomiale est bien sûr $\mathbb{R}$. Le polynôme dont tous ses coefficients sont nuls est appelé **polynôme nul** et n'a pas de degré. Les polynômes de degré 1 sont les fonctions affines, les polynômes de degré 2 sont les trinômes de degré 2.

Exemple : $x \in \mathbb{R} \mapsto 2x^3 - 5x^2 + 7$ **est un polynôme de degré 3, son coefficient de degré 2 est -5, son coefficient de degré 1 est 0, son coefficient de degré 0 est 7.**

Racines d'un polynôme

Définition : on dit que a est une **racine** de la fonction polynomiale P lorsque $P(a) = 0$.

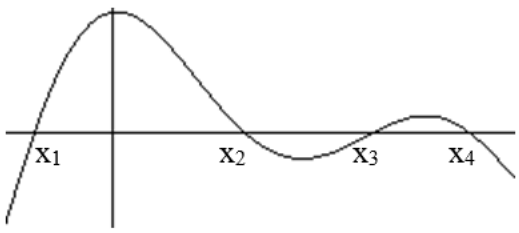
Propriétés

Propriété 1 : un polynôme de degré n a **au plus n** racines,

Preuve : si un polynôme P a n racines, il suffit d'appliquer n fois la propriété 3 : P est divisé parun polynôme de degré n, et a donc un degré au moins égal à n.

En particulier seul le polynôme nul a une infinité de racines.

Propriété 2 : Les racines éventuelles du polynôme donnent les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant P avec l'axe des abscisses.



Propriété 3, fondamentale !

α est racine du polynôme P de degré n si et seulement si, il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que pour tout x de $\mathbb{R}$: $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

Remarque : Dans le cas particulier où *P(x)* est un polynôme de degré n qui a n racines

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ on a : $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$

Comment déterminer Q ?

Nous déterminerons Q par deux méthodes sur le cas particulier :

$P(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 2$ et α = 2 (on vérifie que $P(2) = 0$)

Il vous faudra retenir **une** de ces 2 méthodes, à vous de choisir.

1ère méthode : par **identification**

Puisque P est un polynôme de degré 4, Q est de degré 3, il s'écrit donc : $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Déterminons a, b, c et d. Pour cela on remarque en développant que :

$Q(x)\,(x-2) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)(x-2) = ax^4 + (b-2a)x^3 + (c-2b)x^2 + (d-2c)x - 2d$

Or $Q(x)(x-2) = P(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 2$

Ceci est vrai pour tout x de $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 1 \\ c - 2b = -6 \\ d - 2c = -1 \\ -2d = 2 \end{cases}$ ce qui équivaut à $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 0 \\ d = -1 \\ d = -1 \end{cases}$. D'où $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

2ème méthode : par **division euclidienne** de P par $(x-a)$ en puissances décroissantes

On pose une division comme pour les nombres :

- 1ère étape : on s'intéresse aux termes de plus hauts degrés de chacun des 2 polynômes.

$x^4 = x^3x$, donc $x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 2 = x^3(x-2) +$ un polynôme de degré 3. On écrit ceci :

Produit de **x³ par x- 2**

Reste :
$x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 2$
$-\ (x^4 - 2x^3)$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 2 & x-2 \\ \hline \mathbf{x^4 - 2x^3} & x^3 \\ \hline 3x^3 - 6x^2 - x + 2 & \end{array}$$

- Étapes suivantes : on recommence en remplaçant $x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 2$ par le reste précédent. $3x^3 = 3x^2x$, d'où :

2nde étape : produit de $3x^2$ par x-2

3ème étape: produit de -1 par x-2.

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 2 & x-2 \\ \hline x^4 - 2x^3 & x^3 + 3x^2 - 1 \\ \hline 3x^3 - 6x^2 - x + 2 & \\ 3x^3 - 6x^2 & \\ \hline -x + 2 & \\ x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Le dernier reste est 0. Si on obtenait un terme constant différent de 0, cela signifierait que le polynôme $x-2$ ne divise pas $(x)=x^4+x^3-6x^2-x+2$, c'est-à-dire que 2 ne serait pas racine de$P(x)$.

Le résultat est donc : $x^4+x^3-6x^2-x+2=(\boldsymbol{x-2})(\boldsymbol{x^3+3x^2-1})$.

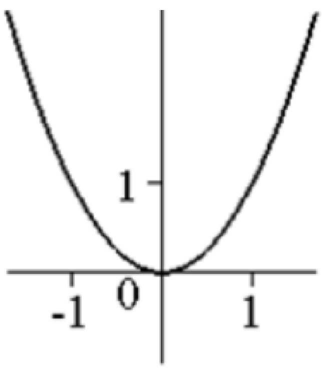
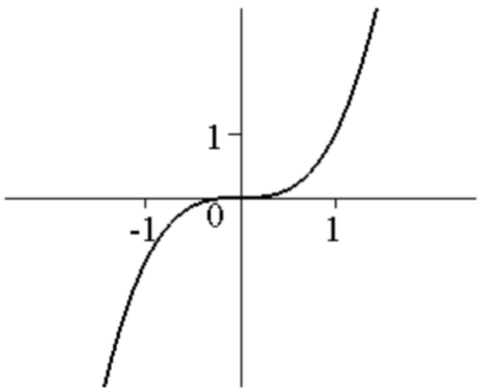
Fonction puissance entière-fonction racine énième

Fonction puissance entière positive

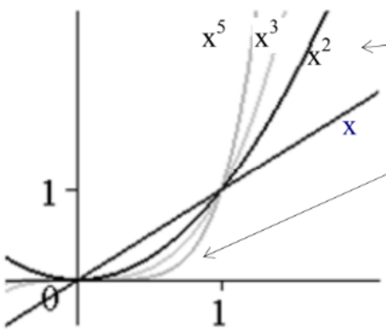
Définition : Soit un entier positif n, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x)=x^n}$ s'appelle **fonction puissance** $\boldsymbol{n}$.

Remarque : l'ensemble de définition de toute fonction puissance entière positive est bien sûr $\mathbb{R}$.

Graphe d'une fonction puissance entière positive

Si n est pair, $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x)=x^n$ est une fonction paire Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. 	Si n est impair, $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x)=x^n$ est une fonction impaire. Sa courbe est symétrique par rapport au point origine. 

A retenir : comparaison des fonctions puissance positive



Si x >1 , $x^n > \ldots > x^4 > x^3 > x^2 > x > 1$

Si 0<x< 1 , $x^n < \ldots < x^4 < x^3 < x^2 < x < 1$

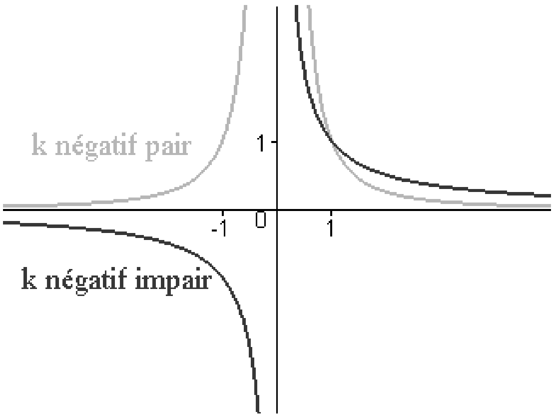
Fonction puissance entière relative

Définition : si $k = -n$ est un entier négatif, on définit la fonction puissance k par $x \in \mathbb{R} \mapsto x = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Son domaine de définition est $\mathbb{R}$, elle est décroissante sur $]\,0\,,+\infty\,[$. Sur $]-\infty, 0\,[$ elle est croissante si n est pair, décroissante si n est impair.

Si k est un entier positif, on définit x^k de la même façon qu'au paragraphe précédent.

Exemple : $3^{-2} = \frac{1}{9}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 4^3 = 64$

Voici l'allure du graphe de la fonction $x \mapsto x^k$ dans les cas où $k < 0$:



Fonction racine $n^{\text{ième}}$

Pour tout n, $f(x) = x^n$ est une **fonction continue et croissante** de ℝ+ dans ℝ+ elle définit donc une **bijection de ℝ+ dans ℝ+** on peut donc définir sa fonction réciproque.

Définition : La fonction réciproque de la fonction puissance x^n s'appelle **fonction racine $n^{\text{ième}}$**

Notation : On peut noter $\sqrt[n]{x}$ la racine énième du nombre positif x, mais il est préférable de la noter $x^{1/n}$, à ce sujet voir le paragraphe suivant.

Pour x et y dans $[0, +\infty[$, $y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n} \Leftrightarrow y^n = x$

Propriétés : On peut citer quelques propriétés, mais elles seront revues et complétées au paragraphe suivant, car les racines énièmes sont des cas particuliers d'exposants rationnels.

$\sqrt[p]{\sqrt[k]{x}} = \sqrt[pk]{x}$, ou plus simplement $\left(x^{1/k}\right)^{1/p} = x^{1/kp}$

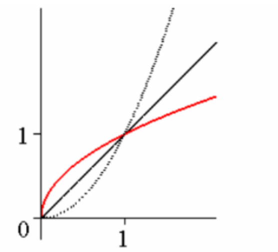
$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}}$

Attention, en revanche, $\sqrt[n]{a+b}=(a+b)^{1/n}$ ne s'exprime pas de façon simple et générale en fonction de $a^{1/n}$ et $b^{1/n}$.

Graphe d'une fonction racine $n^{\text{ième}}$

La fonction racine $n^{\text{ième}}$ étant la fonction réciproque de la fonction puissance $n^{\text{ième}}$ $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$, sa courbe est symétrique de la courbe de la fonction puissance n-ième par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Fonction puissance, d'exposant rationnel

Définition

Pour tout nombre rationnel $r = \frac{p}{q}$, avec p entier relatif, q entier positif non nul, on définit pour tout x de $]0;+\infty[$: $x^{p/q} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$.

Exemples : $8^{1/3} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^1 = 2$, $25^{3/2} = \left(\sqrt{25}\right)^3 = 5^3 = 125$, $25^{-3/2} = \frac{1}{25^{3/2}} = 1/125$

Propriétés

Pour tous réels x et y strictement positifs, r et s éléments de Q :

$$x^{r+s} = x^r x^s$$

$$x^{r-s} = x^r / x^s$$

$$(x^r)^s = x^{rs}$$

$$(xy)^r = x^r y^r$$

Exemples : $2^{1/2}2^{3/4} = 2^{1/2+3/4} = 2^{5/4}$

$\frac{3^4}{3^{3/2}} = 3^{4-3/2} = 3^{5/2}$

$\left(5^{3/2}\right)^{-4} = 5^{-6} = \frac{1}{5^6}$

$20^{3/2} = 4^{3/2}5^{3/2} = 2^3 5^{3/2}$

Remarque : ces propriétés concernent des produits et des quotients, pas des sommes. Pour $x > 0$, les puissances vues au paragraphe précédent sont des cas particuliers de puissances d'exposants rationnels. En particulier les racines $n^{\text{ième}}$.

Or les exposants rationnels sont plus simples à manipuler : par exemple il est plus aisé de calculer $x^{1/2}x^{1/5} = x^{7/10}$ plutôt que $\sqrt{x}\sqrt[5]{x} = \left(\sqrt[10]{x}\right)^7$, d'où le conseil suivant : dorénavant, pour simplifier considérablement les calculs, il faudra veiller à utiliser systématiquement les puissances rationnelles au lieu des racines.

Fonction homographique

Définition

Soit quatre réels a, b, c, d tels que $\boldsymbol{ad - bc}$ **et** $\boldsymbol{c}$ **non nuls.**

La fonction f définie par x ∈ $\mathbb{R} - \{-d/c\} \mapsto \boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}}$ s'appelle fonction homographique.

Remarque : pourquoi écarter les cas $c = 0$ et $ad - bc = 0$? Si $c = 0$ l'expression n'est qu'un polynôme, $ad - bc = 0$ alors $ax + b$ est proportionnel à $cx + b$, quel que soit x, donc l'expression est un nombre constant.

Forme canonique d'une fonction homographique

On cherche à écrire $\frac{ax+b}{cx+d}$ sous la forme $\alpha + \frac{\beta}{\lambda x+\gamma}$. x n'apparaît qu'une fois dans cette expression, il sera plus facile de la dériver, d'en trouver une primitive, de trouver son sens de variation .... Pour arriver à cette expression, on fait apparaître le dénominateur au numérateur, et on simplifie.

$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}\frac{x+b/a}{x+d/c}$ -> On a mis en facteur a eu numérateur et c au dénominateur

$=\frac{a}{c}\frac{x+d/c-d/c+b/a}{x+d/c}$ -> On fait **apparaître au numérateur le dénominateur** $\boldsymbol{x + d/c}$

$=\frac{a}{c}\left(1 + \frac{-d/c+b/a}{x+d/c}\right)$-> On simplifie par $\boldsymbol{x + d/c}$

$=\frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}$ -> On développe et on simplifie encore

N.B. : Il est bien sûr inutile de retenir cette formule l'important est de savoir la retrouver.

Par exemple $\frac{4x-3}{6x+9} = \frac{2}{3} - \frac{3}{2x+3}$

Graphe d'une fonction homographique

La courbe représentant la fonction homographique $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ est une hyperbole de centre le point $\Omega(-d/c, a/c)$ et d'asymptotes $x = -d/c$ et $y = a/c$

Comment tracer cette hyperbole rapidement ?

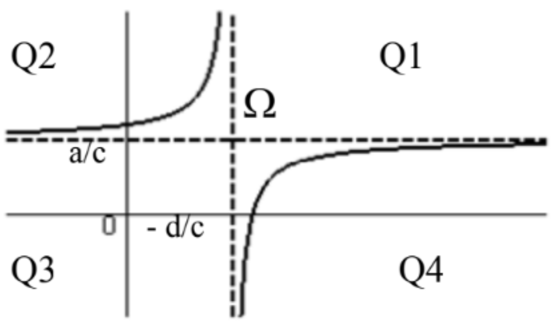
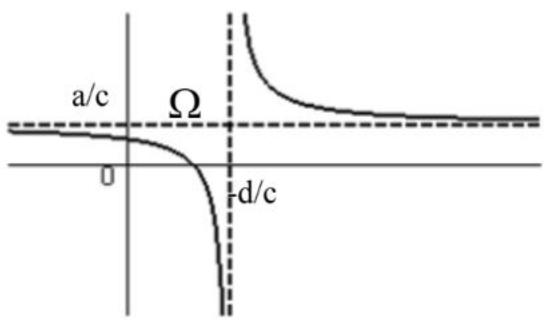
- Placer les asymptotes d'équations

$$x = -d/c\left(\lim_{x\to -d/c} |f(x)| = +\infty\right)$$

$$y = a/c\left(\lim_{x\to +\infty} f\,(x) = \lim_{x\to -\infty} f\,(x) = a/c\right)$$

- Le centre $\Omega(-d/c, a/c)$ est à l'intersection des asymptotes
- Les asymptotes partagent le plan en 4 quadrants. La forme canonique montre que la courbe se trouve dans 2 quadrants opposés, et que le sens de variation de la fonction est constant (la fonction est croissante si $ad - bc > 0$, décroissante si $ad - bc < 0$).

En pratique, il suffit de **calculer 1 point de la courbe** pour connaître les 2 quadrants où elle se trouve, et pour en déduire le sens de variation sans autre calcul.

<table>
<tr>
<td>$ad - bc > 0 \Leftrightarrow f$ est croissante
⇔ l'hyperbole est dans les quadrants Q2 et Q4

</td>
<td>$ad - bc < 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante
⇔ l'hyperbole est dans les quadrants Q1 et Q3

</td>
</tr>
</table>

Fonction logarithme et fonction exponentielle

Fonction logarithmique

Une **fonction logarithmique** est une fonction f, différente de la fonction constante nulle, définie et dérivable sur $\mathbb{R}+^*$telle que, pour tout x et tout y de $\mathbb{R}+^*$, $f(x\,y) = f(x) + f(y)$

Base d'un logarithme

Soit f une fonction logarithmique, on peut montrer qu'il existe un, seul, nombre a, strictement positif et différent de 1, tel que $f(a) = 1$. Ce nombre a est appelé la **base du logarithme**.

Notation : *on note* $\boldsymbol{log_a}$ *la fonction logarithmique de base* a.

Utilité des fonctions logarithmes :

- Elles permettent notamment de comparer des grandeurs évoluant sur des échelles différentes (par exemple, en quelques années, la production de composants électroniques varie de plusieurs ordres de grandeur, son logarithme est beaucoup plus maniable).
- D'autre part, elles apparaissent naturellement dans de nombreux modèles économiques. Voici un exemple : on utilise très souvent le modèle suivant, liant la production (à l'échelle d'une entreprise ou à celle d'un état) Q, la quantité de travail W et le capital investi K (fonction de Cobb-Douglas) $Q = aW^{\alpha}K^{\beta}$. α, β, a, sont des paramètres dont les valeurs ne sont pas données par le modèle, il faut donc les estimer en fonction des données, puis juger de l'adéquation de ces données avec les valeurs données par ce modèle. Sous cette forme, c'est très délicat. Mais cette égalité est équivalente à :

  $\ln \mathrm{Q} = \ln \mathrm{a} + \alpha \ln \mathrm{W} + \beta \ln \mathrm{K}$ Cela simplifie considérablement les choses, ce qui ne vous sautera peut-être pas aux yeux car il s'agit de fonction de plusieurs variables. Ajoutons l'hypothèse courante : $\alpha + \beta = 1$. Alors le modèle devient : $\frac{Q}{W} = a\left(\frac{K}{W}\right)^{\beta}$ Ce qui équivaut à : $ln\left(\frac{Q}{W}\right) = ln\,a + \beta\, ln\left(\frac{K}{W}\right)$. En posant $y = \ln\left(\frac{Q}{W}\right)$ et $x = \ln\left(\frac{K}{W}\right)$, le modèle exprime simplement que y est une fonction affine de x ! Il suffit donc de tracer les points correspondant aux diverses valeurs observées de $ln\left(\frac{Q}{W}\right)$ et $ln\left(\frac{K}{W}\right)$ et de tracer une droite les reliant au mieux pour évaluer les valeurs de β et lna, donc de a, et pour juger (graphiquement pour l'instant, l'économétrie de Licence 3ème année fournira des critères chiffrés) de l'adéquation du modèle (la droite) aux valeurs observées (les points).

Logarithme naturel, ou néperien, $\boldsymbol{In}$:

C'est la seule fonction f :

- dérivable sur $\mathbb{R}+^*$,
- telle que $f'(x) = 1/x$ pour tout x de $\mathbb{R}+^*$,
- et telle que $f(1) = 0$.

On peut prouver que c'est bien une fonction logarithme : $f(ab) = f(a) + f(b)$ pour tout a, b de $\mathbb{R}+^*$.

Il est courant de la noter ln. Sa base est notée e, $e \approx$ 2,72 à 0,01 près.

$$\boldsymbol{ln = log_e}$$

Dans d'anciens ouvrages vous pourrez rencontrer la notation Log (remarquer la majuscule) pour In, et log pour log_{10}.

Dans la pratique, on rencontre essentiellement ln, log_{10}, et log_2 ;

Propriétés

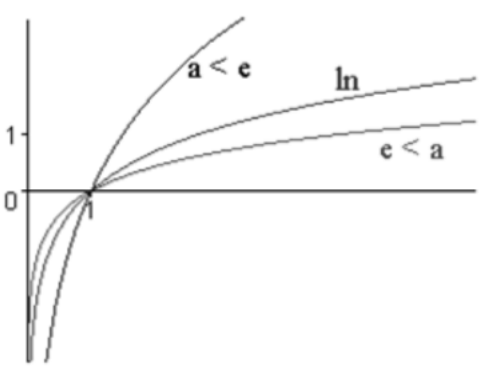
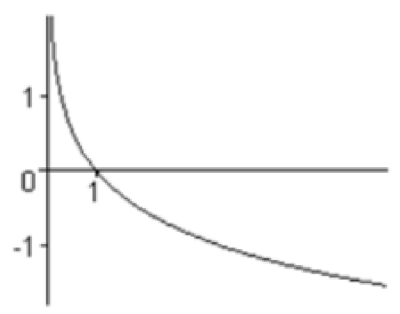
Pour tout $a > 0$, tout α de ℝ, tous x, y de ℝ +∗, $log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$

- $ln(e) = 1$
- $ln(1) = 0$
- $ln(\ xy\ )\ =\ ln\,x\ +\ ln\,y$
- $ln\ (x/y)\ =\ ln\,x - ln\,y$
- $ln(x^{\alpha}) = \alpha \ln x$
- $x = \ln(e^{x})$

En revanche, $ln(x + y)$ ne donne pas lieu à une égalité notable.

Graphe d'une fonction logarithmique

Il importe surtout de connaître l'allure du graphe de la fonction ln, en rouge dans la figure suivante.

Pour tout $a > 1$, la fonction log_a est croissante sur ℝ+*, son graphe se déduit de celui de ln en changeant l'échelle des ordonnées - précisément en divisant les ordonnées par $ln(a)$. 	Le cas $0 < a < 1$ ne se rencontre pas dans la pratique, à titre d'information le graphe aurait cette allure : 

Fonctions exponentielles

La fonction ln est une fonction strictement croissante et continue de ℝ+* dans ℝ, c'est donc une bijection de ℝ+* dans ℝ, elle possède donc une fonction réciproque.

Définition

Fonction exponentielle, notée $\boldsymbol{exp}$: c'est la fonction réciproque de la fonction ln. Elle est définie de ℝ dans $\mathbb{R}+*$, par : $exp(x) = y \Leftrightarrow x = ln(y)$

e^x : d'après le paragraphe précédent, pour tout nombre rationnel $r, ln(e^r) = r\,ln(e) = r$, car $ln(e) = 1$.Donc $exp(r) = e^r$. On étend ceci à tout nombre réel, rationnel (comme 2/3) ou non (comme π) en posant.

Définition : pour tout x de ℝ, $\boldsymbol{e^x = exp(x)}$

La fonction exponentielle de base $\boldsymbol{a}$: pour tout nombre $a > 0$, et tout x de ℝ on définit a^x par :

$$\boldsymbol{a^x = exp\big(xln(a)\big) = e^{xln(a)}}$$

La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$ est appelée fonction exponentielle de base a.

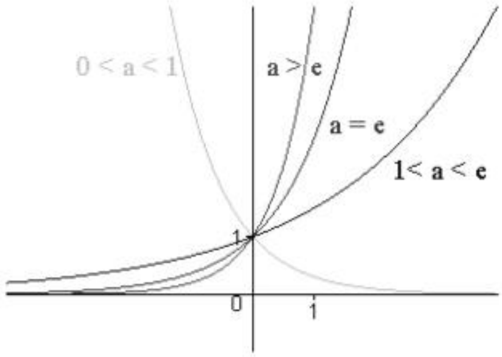
C'est la fonction réciproque de la fonction log_a: $a^x = y \Leftrightarrow x = log_a(y)$.

En effet $log_a(a^x) = ln(exp(x\,ln(a)))\,/\,ln\,a = x\,ln(a)\,/\,ln(a) = x$

D'autre part la notation a^x est cohérente, car pour tout nombre rationnel $r, exp(r\,ln(a)) = exp(ln(a^r)) = a^r$.

Graphe de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est la réciproque de la fonction ln, elle est donc croissante et son graphe est symétrique de celui de la fonction ln, par rapport à la droite d'équation $x = y$. Le graphe d'une fonction exponentielle de base a s'obtient à partir de celui de la fonction exp en divisant les abscisses par $ln(a)$. Si $a < 1$, la fonction est décroissante.



Graphes de $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$ pour différentes valeurs de a

Propriétés

$ln(e^x) = x$ (pour tout x de $\mathbb{R}$) $exp(ln(x)) = (x$ pour tout x de $\mathbb{R}+*)$

$exp(x + y) \quad = e^{x+y} = e^x e^y = exp(x)\, exp(y)$

$exp(x - y) \quad = e^{x-y} = e^x/e^y = exp(x)\, /\, exp(y)$

$(exp(x))^y) = (e^x)^y = e^{xy} = exp(xy)$

$exp(0) = e^0 = 1 \quad exp(1) = e^1 = e$

Et pour tout $a \ > 0$:

$log_a(a^x) = x \quad (pour\ a \neq 1) \quad et\ a^{log_a x} = x \quad (pour\ a \neq 1\ et\ x > 0)$

$a^x = e^{x \ln(a)}$

$a^{x+y} = a^x a^y \quad a^{x-y} = a^x/a^y \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad (ab)^x = a^x b^x$

$a^0 = 1$

Dérivées : en prenant un peu d'avance sur la leçon 4, on peut indiquer que la fonction exp : x $\in \mathbb{R} \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est sa propre dérivée : $exp' = exp$ fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x = e^{x\, ln\, a}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est $x \in R \mapsto ln(a)\, e^{x\, ln(a)} = ln(a)\, a^x$

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 1, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).